REPUBLIQUE DU SENEGAL
UN PEUPLE-UN BUT-UNE FOI
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
INSPECTION D'ACADEMIE DE PIKINE-GUEDIAWAYE
EMAIL: iapikgue2014@gmail.com / Tél: 33 834 71 44
www.academiedepikineguediawaye.net

Correction

Exercice 1

1. F étant une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ donc $F'(x) = f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

2. a) $G'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\,f(\dfrac{1}{x}) - f(x)$ **doro-cisse.e-monsite.com**

$$= -\frac{1}{x^2}\left(\frac{-\ln x}{1+\frac{1}{x^2}}\right) - \frac{\ln x}{1+x^2} = 0$$

Donc G est une fonction constante sur l'intervalle I

b) D'après 2 a), il existe un réel k tel que $G(x) = k$

Or $G(1) = F(1) - F(1) = 0$ donc $k = 0$ par suite $G(x) = 0$ pour tout x appartenant à I

Exercice 2

1. on a $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ donc $z_0^5 = 1$ par suite $z_0^5 - 1 = 0$
2. en développant : $(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$ on obtient $z^5 - 1$.
3. $z^5 - 1 = 0$ si et seulement si, $(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4) = 0$.

   Soit, $z - 1 = 0$ ou $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$.

   Or $z_0 \neq 1$; donc z_0 est solution de l'équation $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$

   Or : $1+z+z^2+z^3+z^4 = z^2(\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+1+z+z^2)$ si $z \neq 0$;

   Donc, puis que $z_0 \neq 0$, on peut écrire que z_0 est solution de l'équation :

   $$(z^2+\frac{1}{z^2}) + (z+\frac{1}{z}) + 1 = 0$$

4. soit $Z = z + \dfrac{1}{z}$ donc : $Z^2 = z^2 + 2 + \dfrac{1}{z^2}$; l'équation précédente peut alors s'écrire :

   $Z^2 + Z - 1 = 0$ (E).

5. $\Delta = 5$, l'équation (E) admet deux racines réels distinctes $Z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

6. d'après ce qui précède z_0 est solution de l'une des équations $z + \dfrac{1}{z} = Z_1$ ou $z + \dfrac{1}{z} = Z_2$

   soit (E_1) : $z^2 + (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})z + 1 = 0$ et (E_2) : $z^2 + (\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})z + 1 = 0$

pour (E_1) $\Delta = (i\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}})^2$ $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + \dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$;

$z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} - \dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$

pour (E_2) : $\Delta = (i\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}})^2$ $z_3 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + \dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$ et

$z_4 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} - \dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$

et puis que $\cos\frac{2\pi}{5} \succ 0$ et $\sin\frac{2\pi}{5} \succ 0$ la seule solution qui convient est donc z_1 par conséquent

$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ $\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$

<u>Exercice 3 :</u>

1. a. l'équation (E) est la forme y' – ay = 0 avec a = -2. Toutes les solutions de (E) sont donc définies sur IR par $f(x) = ke^{-2x}$ ou k est une constante réelle quelconque.
   a. f(0) = 1 donc k = 1 alors la solution cherchée est $f(x) = e^{-2x}$
2. la valeur moyenne de f sur [n, n+1] est $v_n = \frac{1}{n+1-n}\int_n^{n+1} e^{-2x}dx = \int_n^{n+1} e^{-2x}dx$

   donc $v_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$
3. on a $u_n = v_n$
   a. $u_0 = \frac{1}{2}(1- e^{-2})$, $u_1 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2}$ et $u_2 = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-4}$.
   b. On a $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2(n+1)}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-2}$

   La suite u_n est alors une suite géométrique de raison e^{-2} et de premier terme $u_O = \frac{1}{2}(1- e^{-2})$.

   c. la somme $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_9 = u_0 \frac{1-q^{10}}{1-q}$ on trouve $S = \frac{1}{2}(1-e^{-20})$

<u>Exercice 4</u> :

1.

a. Vrai.
Ceci résulte directement de l'énoncé : un héron mange 10% des rainettes.

b. vrai.
Ceci résulte directement de l'énoncé : un héron mange 20% des grenouilles vertes de la mare.

c. Faux.
On considère les événements :
R : « La grenouille est une rainette ».
V : « La grenouille est une rainette ».
M : « La grenouille est une grenouille verte ».
D'après la formule des probabilités totale on a : $P(M) = P(R) \times P_R(M) + P(V) \times P_V(M)$
En remplaçant par les valeurs numériques données par l'énoncé, on obtient

$P(M) = \frac{3}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{7}{10}\times\frac{2}{10} = \frac{17}{100}$

d. Vrai.
$P(R\cap M) = P(R) \times P_R(M)$
Soit $P(R\cap M) = \frac{3}{10}\times\frac{1}{10} = \frac{3}{100}$

e. Faux

$P_M(R) = \frac{P(R\cap M)}{P(M)} = \frac{3}{17}$.

2. $P(A) = \frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{32}$

$P(B) = C_4^1\,\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{8}$

$P(C) = (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$ Proposition sujet bac