METHODES – EXERCICES-
PROBLEMES

PHYSIQUE
TERMINALE S

- ➔ Rappels de cours
- ➔ Conseils de méthode
- ➔ Exercices guidés
- ➔ Exercices d'approfondissement
- ➔ Problèmes de synthèse
- ➔ Tous les corrigés détaillés

Tout le programme

218 exercices corrigés

- Mécanique (98 exercices corrigés
- Electromagnétisme (65 exercices corrigés)
- Electricité (36 exercices corrigés)
- Mécanique relativiste (19 exercices corrigés)

AVANT PROPOS

Ce manuel a pour objectif de mettre à la disposition des enseignant et des élevés de la classe de terminale S, un outil pédagogique progressif, clairement et abondamment illustré par des nombreux exercices corrigés, en parfaite adéquation avec le référence de cette classe.

Ce manuel vise à permettre aux élèves d'acquérir et assimiler aisément les prérequis indispensables à la réussite du baccalauréat. Il s'efforce également de développer leurs compétences pratiques dans le champ disciplinaire relevant du domaine de la physique et d'atteindre les objectifs fixés par le programme national:

Cet ouvrage répond à une double nécessité :

- Vous entrainer car la simple lecture du cours et des exercices s'avère insuffisant pour la maitrise ;
- Vous permettre de vous situer dans le programme de BAC en confortant votre solution à celle du corrigée.

Vous disposez ainsi d'un outil dont je pense que vous sauriez tirer les meilleures parties.

N'oubliez pas ceci : vous êtes scientifique, les corrigées sont une méthode parmi d'autres.

L'essentiel est de trouver les mêmes résultats après une bonne démonstration.

Je cherche, à travers ce modeste travail, à montrer aux élèves que la physique n'est pas difficile pour les élèves qui travaillent régulièrement.

Je suggère la méthode suivante pour traiter un sujet de Physique lors d'un examen :

- Lire le sujet jusqu'au bout avant de commencer à écrire quoi que ce soit.
- Souligner les mots clés et qui donnent les informations sur l'exercice.
- Commencer par l'exercice qui vous parait le plus simple.
- Si vous coincer sur une question passez à autre chose.
- Ne perdez pas beaucoup de temps à tout écrire au brouillon.
- Relire avant de remettre la copie.

Je tiens à remercier les écoles (***Groupe Scolaire Avenir***, ***Groupe Scolaire Brun Trets*** et ***Lycée de Domoni Anjouan Comores***) et, toutes celles et ceux qui voudrons me faire parvenir leurs critiques, remarques ainsi que leurs suggestions afin d'améliorer le contenu de cet ouvrage.

L'auteur : ***Mohamed Soibaha CHAAMBANE***

Programme de Physique Terminale C

Mécanique

Chapitre I **: Mouvement d'un point matériel**

Chapitre II : **Relation Fondamental de la Dynamique (RFD)**

Chapitre III : **Étude Énergétique d'un Système Mécanique**

Chapitre IV : **Champ de Pesanteur $\vec{g}$ et champ Gravitationnel $\vec{G}$**

Chapitre V : **Oscillateurs Mécaniques**

Chapitre VI : **Particules à Grande énergie**

Électromagnétisme

Chapitre VII : **Champ Électrostatique uniforme $\vec{E}$**

Chapitre VIII : **Champ magnétique uniforme $\vec{B}$**

Chapitre IX : **Loi de Laplace**

Chapitre X: **Induction Électromagnétique**

Chapitre XI: **Auto Induction**

Électricité

Chapitre XII : **Dipôle (R,L)**

Chapitre XIII : **Dipôle (R,C)**

Chapitre XIV : **Oscillation électrique (Circuit (L,C))**

Chapitre XV : **Circuit (R,L,C) en régime sinusoïdal forcé**

Tableau de matière

Mouvement D'Un Point Matériel

Rappels sur le Mouvement d'Un Point Matériel

I. Étude vectoriel d'un point matériel

Soit le repère orthonormé $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. Vecteur Position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$
2. Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath}$
3. Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath}$$

Remarque :

Vitesse moyenne :

La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_1 et t_2 est donnée par : $v_{moy} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

II. Etude de quelques mouvements cinématique

1. Mouvement de translation et de rotation uniforme

a)) Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

$$v = cste \;\; et \;\; a = \frac{dv}{dt} = 0$$

Equation horaire (loi horaire)

$x(t) = v(t - t_0) + x_0$; $si\ t_0 = 0 \Longrightarrow x(t) = vt + x_0$

b)) Mouvement circulaire uniforme (MCU)

$\omega = cste \;\; et\ \ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$

Equation horaire : $\theta(t) = \omega(t - t_0) + \theta_0$

$$si\ t_0 = 0 \Longrightarrow \theta(t) = \omega t + \theta_0$$

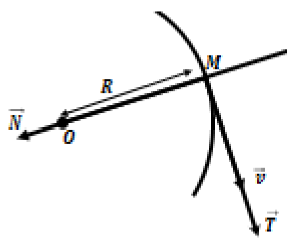
Période T: est le temps nécessaire au bout duquel le point matériel effectue un tour complet : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

c)) Base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$

$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$

où $a_T = \frac{dv}{dt}$: l'accélération tangentielle due à la variation du module du vecteur vitesse et

$a_N = \frac{v^2}{R}$: l'accélération normale, due au changement de direction de $\vec{v}$



Remarque:

Pour démontrer qu'un mouvement est circulaire uniforme, il suffit de montrer que $\vec{a} = a_N\vec{N}$

$$a = a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \; (MCU)$$

Caractéristiques du vecteur accélération

Pour un mouvement circulaire uniforme :

$$\vec{a} \begin{cases} direction: \;\; radiale \\ sens: \; centripète \\ intensité: \; a = a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \end{cases}$$

2. Mouvement de translation et rotation varié

a)) Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV)

Lois horaires du mouvement

$a = \frac{dv}{dt} = cste \;\; \Longrightarrow v(t) = a(t - t_0) + v_0$ et

$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow x(t) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$

Si à l'instant $t_0 = 0$, alors :

les lois horaires peuvent s'écrire :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \;\; et \;\; v(t) = at + v_0$$

Relation indépendante du temps (R.T.I):

$$\Delta v^2 = 2a\Delta x \Longrightarrow {v_1}^2 - {v_0}^2 = 2a(x_1 - x_0)$$

b)) Mouvement circulaire uniformément varié (MCUV)

$\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = cste \;\; \Longrightarrow \omega(t) = \ddot{\theta}\,(t - t_0) + \omega_0$ et

$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}\,(t - t_0)^2 + \omega_0(t - t_0) + \theta_0$

Si à l'instant $t_0 = 0$, alors :

les lois horaires peuvent s'écrire :

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}\,t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \;\; et \;\; \omega(t) = \ddot{\theta}\,t + \theta_0$$

Relation indépendante du temps (RIT):

$$\Delta\omega^2 = 2\ddot{\theta}\,\Delta\theta \Longrightarrow {\omega_1}^2 - {\omega_0}^2 = 2\ddot{\theta}\,(\theta_1 - \theta_0)$$

Remarque

$$v = R\omega \;\; et \;\; a = R\ddot{\theta}$$

Exercices sur le Mouvement d'Un Point Matériel

EXERCICICE 01

On étudie le mouvement d'un mobile ponctuel M sur un axe (O ; i). Ses caractéristiques sont les suivantes: accélération: a= 4 ms^{-2} ; abscisse initiale: x_o=1 m; vitesse initiale : v_o= - 3 ms^{-1}.

1. Quelle est la nature de ce mouvement ?
2. Ecrire les expressions des vecteurs accélération, vitesse et position en fonction de l'abscisse x(t) du point M.
3. Ecrire les équations horaires du mouvement. Représenter graphiquement x(t), v(t) et a(t).
4. Déterminer les dates auxquelles le mobile passe à l'origine O. Quel est alors sa vitesse? Distinguer deux phases dans le mouvement.
5. Au cours de son évolution, le mobile change-t-il de sens de parcours ? Si oui, donner la date et la position correspondant à ce changement ?

EXERCICE 02

Les équations paramétriques du mouvement d'un point matériel lancé dans l'espace sont : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \\ z = -4t^2 + 5t \end{cases}$

1. Donner l'équation cartésienne de la trajectoire.
2. Donner l'expression du vecteur position et en déduire sa norme et sa position à t=1,5s.
3. Déterminer les composantes du vecteur vitesse ainsi que le vecteur accélération du mobile:
   a)) Lorsque ce point passe par le sommet de sa trajectoire.
   b)) Lorsque ce point rencontre le plan z = 0.
4. a)) Déterminer l'accélération du mobile aux points O et A dont les abscisses sont x_0=0m ; x_A=2m. Conclure
   b)) Déterminer les composante tangentielle et normale du vecteur accélération.
   c)) Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire aux points O et à l'instant t=1,5s.

EXERCICE 03

Un point M est repéré, par rapport au repère R(O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$), à l'instant t par les coordonnées suivantes :$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 2t \end{cases}$

1. Donner l'expression de la trajectoire et celle de la vitesse du point M.
2. a)) Donner l'expression de l'accélération du point M.
   b)) Quelle est la nature du mouvement ? Justifier.
3. a)) Déterminer la composante tangentielle de $\vec{a}$.
   b)) En déduire la composante normale de l'accélération.
   c)) En déduire l'expression du rayon de la courbure ρ de la trajectoire en fonction du temps t.
   En déduire ρ à l'instant t = 3s.

EXERCICE 04

Les coordonnées cartésiennes d'un point matériel à l'instant t est donnée dans le repère (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) par: $\begin{cases} x = 2t \\ y = \sqrt{4(1 - t^2)} \end{cases}$.

1. Trouver l'équation de la trajectoire du point M et préciser sa nature.
2. Donner l'expression du vecteur vitesse et son module.
3. a)) Calculer l'accélération tangentielle $\vec{a_t}$ et l'accélération normale $\vec{a_n}$ de la trajectoire.
   b)) En déduire les composantes cartésienne du vecteur l'accélération.
   c)) En déduire que le module de l'accélération est indépendant du repère étudié.

EXERCICE 05

Les coordonnées cartésiennes à l'instant t d'un point matériel M lancée dans l'espace sont :

$\begin{cases} x = 2a(1 + \cos(\omega t)) \\ y = a\sin(\omega t) \\ z = 0 \end{cases}$ où a et ω sont des constantes positives.

1. Déterminer l'équation de la trajectoire du point M et préciser sa nature.
2. Donner l'expression et le module, du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$.
3. Déterminer l'expression de l'accélération tangentielle $\vec{a_t}$ et celle de l'accélération normale $\vec{a_n}$ de la trajectoire.
4. Calculer la valeur minimale du rayon de la courbure R.
5. Représenter graphiquement la trajectoire de M et en déduire la vitesse de M aux points particuliers de la trajectoire.

EXERCICE 06

Dans un relais 4x100, un coureur arrive avec un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v=9,9$m.s^{-1}$. A 15m devant lui son coéquipier s'élance avec une accélération de $3m.s^{-2}$.

On suppose que le passage s'effectue sur une ligne droite.

1. En prenant comme origine des espaces la position du coéquipier et comme origine de temps l'instant où il s'élance, écrire les équations horaires des deux coureurs et déterminer l'instant du témoin.
2. Déterminer l'abscisse de ce point de rencontre. En déduire les distances respectives parcourues par les deux coureurs.
3. A quel instant le coéquipier aura la vitesse $9{,}9m.s^{-1}$. Quelle distance aurait –il parcouru ?

EXERCICE 07

Une automobile démarre lorsque le feu passe au vert avec une accélération a=2,5$m.s^{-2}$ Pendant une durée θ =7,0s ; ensuite le conducteur maintient sa vitesse constante. Lorsque le feu passe au vert, un camion roulant à la vitesse $v = 45km/h$ est situé à une distance $d = 20m$ du feu avant celui-ci, il maintient sa vitesse constante. Dans un premier temps, le camion va doubler l'automobile puis dans un second temps, celui-ci va le dépasser.

1. Déterminer les lois horaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de l'automobile et du camion respectivement.
2. Calculer les dates des dépassements θ_1 et θ_2.
   En déduire les abscisses des dépassements x_1 et x_2.
3. Trouver les vitesses de l'automobile aux instants θ_1 et θ_2.
4. Représenter graphiquement les trajectoires de l'automobile suivant sa vitesse v(t) et son accélération a(t).
5. a)) Si le camion roulait à la vitesse $v_2 = 30,6$km/h pourrait-il rattraper l'automobile ? (On négligera la $2^{ème}$ phase du mouvement de l'automobile pour $t > 7s$).
   b)) Si oui, calculer, l'instant pour lequel la distance qui sépare le camion à l'automobile est minimale. En déduire cette distance.

EXERCICE 08

Les mouvements du train et du voyageur considéré dans ce problème ont des trajectoires rectilignes parallèles.

Un voyageur en retard court le long d'un quai à la vitesse constante de valeur v = 6 ms^{-1} ; quand il est à 20 mètres du dernier wagon le train démarre avec une accélération constante de $1m/s^2$.

1. Ecrire les équations horaires du voyageur et du dernier wagon considérés comme des points matériels.
2. Montrer que le voyageur ne peut pas rattraper le train.
3. Quelle sera la distance minimale entre le voyageur et le dernier wagon ?

EXERCICE 09

Deux automobiles se suivent à 28m l'un de l'autre à la vitesse constante de 86,4 km/h.

La première voiture freine avec une décélération de $7,7m.s^{-2}$ la seconde, manquant d'adhérence, avec une décélération de $4,2m.s^{-2}$. On suppose que les deux conducteurs commencent à freiner simultanément.

1. Montrer que les véhicules se heurtent.
2. Déterminer leur vitesse relative au moment du choc.
3. Quelle aurait dû être, la décélération minimale du second véhicule pour éviter le choc ?

EXERCICE 10

On étudie le mouvement de chute suivant une même verticale de deux billes assimilables à des points matériels. On admet que les mouvements sont uniformément variés.

Le vecteur accélération est vertical est dirigé de haut vers le bas. Son module est$|a|=10m.s^{-2}$.

1. D'un point O, on lance une première bille A verticalement vers le haut avec une vitesse $\overrightarrow{v_O}$ de norme $v_O = 30m.s^{-2}$.
   a)) Ecrire l'équation horaire de son mouvement en prenant le sol comme origine des espaces.
   b)) Quelle est l'altitude maximale atteinte par cette bille ? A quelle date atteinte –elle ce maximum ?
2. Trois seconde après le départ de la bille A, on lance une deuxième bille B verticalement à partir du même point O avec la même vitesse $\overrightarrow{v_O}$.
   Ecrire l'équation du mouvement de B dans le même repère.
   Quand et où les deux billes se rencontre-elles ?

EXERCICE 11

Un point M animé d'un mouvement rectiligne part sans vitesse. Le démarrage fait avec une accélération égale à $0,8m.s^{-2}$.

Puis le point M, dès qu'il atteint la vitesse $8m.s^{-1}$, parcourt 24m à cette vitesse. Enfin au cours du freinage, M, d'un mouvement uniformément retardé, parcourt 8m jusqu'à l'arrêt.

Quelle sont, la durée du mouvement et la distance parcourue.

EXERCICE 12

Une automobile initialement au repos est soumise à une accélération constante à $1,2m.s^{-2}$ Durant 10s. Pendant les 20s qui suivent le conducteur maintient sa vitesse constante. En fin l'automobiliste freine et s'arrête après 8m de freinage.

1. Calculer la distance d_1 parcourue pendant la phase d'accélération et la vitesse de l'automobile à la fin de cette phase.
2. Calculer la distance d_2 parcourue au cours de la $2^{ième}$ phase.
3. Calculer l'accélération a_3 de l'automobile pendant la décélération et la durée de cette phase.
4. Calculer la durée totale du mouvement et la distance totale parcourue par le véhicule.
   En déduire la vitesse moyenne de l'automobile.

EXERCICE 13

Une automobile est en mouvement rectiligne horizontal.

Pendant les 25 premiers seconds la vitesse de l'automobile croit de 0 à 20ms^{-1}.

L'automobile a ensuite un mouvement uniforme puis jusqu'à l'arrêt un mouvement uniformément retardé d'accélération 0,5 ms^{-2}.

La distance totale parcourue par l'automobile est 10 km.

Déduire de ces données :

a)) Le temps pendant lequel le mobile est freiné.
b)) La distance parcourue à vitesse constante.
c)) La durée totale du trajet.

EXERCICE 14

Sur une portion rectiligne ABCD de voie ferrée où s'effectuent des travaux, un train arrivant en A avec une vitesse de module égal à 54km/h à la marche suivante :

- De A à B, tel que AB = 125m, un mouvement uniformément retardé réduisant la vitesse en B à la valeur de 36km/h ;
- De B en C, pendant 1mn un mouvement uniforme ;

- De C en D, un mouvement uniformément accéléré tel que la vitesse reprenne la valeur de 54 km/h en 20s.

1. Déterminer les équations horaires des trois phrases et calculer l'espace parcouru de A à D.
2. Tracer les diagrammes de l'espace x=f(t), de la vitesse $v = g(t)$ et de l'accélération $a = h(t)$ pour l'ensemble des trois phrases.

EXERCICE 15

Sur une piste d'essai rectiligne de longueur AB=13,72km, une voiture expérimentale part du point A sans vitesse initiale, se déplace le long de ABCD selon les phases suivantes :

-A-B : phase de démarrage d'accélération a_1=0,1m/s^2 ;

- phase2 : B-C : mouvement uniforme pendant 14mins;
- C-D :phase de ralentissement d'accélération $|a_2|$=0,1m/s^2

La vitesse de la voiture est nulle en D.

1. Calculer la vitesse maximum acquise par la voiture au cours de son parcours.
2. Calculer le temps mis par la voiture pour faire le trajet ABCD.
3. Calculer les distances AB, BC et CD.
4. Déterminer la vitesse moyenne de la voiture sur le trajet AD.
5. Ecrire les équations horaires du mouvement correspondant aux trois phases.
6. Construire le diagramme des abscisses x(t), de la vitesse v(t) et de l'accélération dans l'ensemble.

EXERCICE 16

1. Une rame de métro est soumise dès son départ à une accélération constante. Au début de son mouvement, elle pénètre dans un tunnel avec une vitesse v_0 et parcourt à partir de cet instant x_1=24m pendant les deux premières seconde (θ_1). Puis elle parcourt 32m pendant les deux secondes suivantes. On prendra pour origine des abscisses (x) le début du tunnel.

a)) Etablir les équations horaires de la rame en x_1 au temps θ_1 et en x_2 au temps θ_2.

b)) En déduire les valeurs de la vitesse v_0 et de l'accélération a de la rame.

2. L'accélération est supprimée 10s après le départ (θ_3). La rame de métro roule à vitesse constante pendant 30s (θ_4). Calculer la vitesse de la rame à l'instant θ_4 et la distance parcourue entre θ_3 et θ_4
3. En fin, elle est soumise à une décélération constante jusqu'à l'arrêt à la station suivante.

a)) Calculer la distance parcourue pendant cette phase (θ_5).

b)) Calculer la distance totale séparant les deux stations.

EXERCICE 17

Une rame de métro effectue un trajet entre deux stations. Partant de la première station, le conducteur lance sa rame avec une accélération a_1=8,5.10^{-2}m.s^{-2} au bout d'une durée θ_1 . Lorsqu'il juge la vitesse suffisante pour pouvoir atteindre l'autre station, le conducteur coupe définitivement le courant. Différentes causes ralentissent le mouvement qu'il s'effectue alors avec une décélération constante $|a_2|$=5.10^{-2}m.s^{-2} pendant une durée θ_2. La rame s'arrête à la deuxième station séparée de la première par la distance $d = 1500m$.

1. Ecrire les équations horaires du mouvement correspondant aux deux phases.
2. a)) Donner une relation entre a_1, a_2, θ_1 et θ_2.

b)) Montrer que :

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{2D|a_2|}{|a_2|a_1 + a_1{}^2}}$$

c)) En déduire les valeurs de $\theta_1$et θ_2.

3. Calculer les longueurs l_1 et l_2 de ces deux phases. En déduire la vitesse maximale de la rame entre les deux stations.
4. En utilisant les résultats de trois premières questions, représenter graphiquement les fonctions : $x = f(t)$, (équation des espaces); $v = g(t)$, (équation de la vitesse) et $a = h(t)$, (équation des accélérations).

Mouvement circulaire uniforme

EXERCICE 18

1. Un point matériel M a une trajectoire circulaire de rayon R. Son vecteur accélération $\vec{a}$=50$\vec{N}$ (en USI, $\vec{N}$ vecteur unitaire centripète).

a)) Montrer que le mouvement est circulaire uniforme.

b)) Sachant que la période T = 0,4πs, quel est le rayon R du cercle trajectoire.

2. On donne l'équation horaire d'un point matériel dans le repère R (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) : $\begin{cases} x = a\cos(\omega t) \\ y = a\sin(\omega t) \end{cases}$

avec a=100cm et ω=10rad/s.

a)) Montrer que la vitesse de M est constante et la calculer.

b)) Montrer que l'accélération est constante et la calculer.

c)) Quelle est la nature de la trajectoire de M ? Donner les caractéristiques du vecteur accélération.

EXERCICE 19

Un point M décrit un cercle de rayon r = 5cm, est repéré par$(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}) = 0$(en rd). Sachant $que\ \theta(t) = 5t + \pi/8$.

a)) En déduire la vitesse angulaire, la fréquence et la période du mouvement.

b)) Quel est le mouvement de m, projection de M sur 0x. Quel est le mouvement de m', projection de M sur 0y.

c)) Donner l'équation de la trajectoire de M.

d)) Quel est le module de la vitesse ? Montrer que $\vec{v}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont perpendiculaires.

e)) Quelle est la nature du mouvement de M.

Déterminer le vecteur accélération. Quelle est sa direction ?

Mouvement circulaire uniformément varié

EXERCICE 20

La fréquence de rotation d'une meule passe entre $t = 0$ et $t = 4s$ de 100 à $1000\ tr.min^{-1}$. On suppose que le mouvement est circulaire uniformément accéléré.

1. Quelle est l'accélération angulaire de la meule entre 0 et 4s ?
2. Quelle est l'expression de la vitesse angulaire en fonction du temps entre 0 et 4s ?
3. Quelle est la vitesse angulaire à t= 3 s ?

Quel est le nombre de tours effectués entre 0 et 4s ?

EXERCICE 21

Une roue, immobile au départ est accélérée de telle sorte que sa vitesse angulaire croit régulièrement jusqu'à 120tr/mn en 1mn. Après avoir tourné un certain temps à cette vitesse, la roue est freinée régulièrement, il faut 5mn pour l'arrêter.

Le nombre total de tours étant 1560, calculer la durée totale de rotation.

EXERCICE 22

On fait tourner un disque initialement au repos jusqu'à atteindre une vitesse constante de $8\mathrm{rad.s^{-1}}$.

1. Quelle la valeur de l'angle balayé par un rayon du disque au cours de ce mouvement si l'accélération est de $2{,}5\mathrm{dar.s^{-2}}$.
2. Ecrire l'équation horaire du mouvement du disque sachant que à $t_0 = 0s, \theta_0 = 0rad$.
3. Lancé à vitesse ci-dessus, le disque est freiné. Il s'arrête alors au bout de 2s.

a)) Calculer sa nouvelle accélération.

b)) Quelle est la valeur de l'angle balayé par un rayon du disque depuis le début du freinage jusqu'à l'arrêt complet.

c)) Quel est le nombre de tours complets effectués pendent cette 2ème phase du mouvement.

EXERCICE 23

Un disque est animé d'un mouvement de rotation uniforme.

Il tourne à $15tr.min^{-1}$.

1. Calculer sa vitesse angulaire en rad/s.
2. De quel angle aura-t-il tourné dans un intervalle de 2 secondes.
3. Ce disque s'arrête de tourner selon un mouvement uniformément freiné en 30 secondes.

Calculer sa « décélération » angulaire.

4. On suppose maintenant que le disque tourne à $6tr.min^{-1}$.

On veut le faire tourner à $20tr.min^{-1}$. Pour cela, on lui fait subir un mouvement circulaire uniformément accéléré.

a)) Calculer le temps mis pour atteindre cette vitesse angulaire si on suppose que l'accélération angulaire du disque est de $7rad.s^{-2}$.

b)) Combien de tours a-t-il réalisés pendant ce temps ?

EXERCICE 24

Deux solides S et S' sont suspendus à un fil inextensible, passant dans la gorge d'une poulie P de rayon r = 160cm. A t = 0, on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale, S est alors animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré vers le bas d'accélération $1m.s^{-2}$.

1. Déterminer l'accélération angulaire de la poulie et l'équation horaire de son mouvement.
2. Quelle est la vitesse angulaire de la poulie lorsque S est descendu de 2m. On l'exprimera en rad/s et en tours/s.
3. On freine alors la poulie (lancée à la vitesse calculée au 2.) qui s'arrête en 20 tours.

a)) Quelle est la décélération angulaire de la poulie ?

b)) Quelle est la durée de freinage ?

Relation Fondamentale De La Dynamique

Rappel s sur la R.F.D

I. Etude des chocs

Vecteur quantité de mouvement ($\vec{P}$)

La quantité de mouvement traduit la difficulté à modifier le mouvement d'un système. Par définition : $\vec{P} = M\vec{v}$

Pour tout choc, il y a toujours conservation du vecteur quantité de mouvement $\vec{P}$.

1. Etude d'un choc élastique

Dans un choc élastique il y a conservation du vecteur quantité de mouvement $\vec{P}$ et de l'énergie cinétique E_C.

Soit un point matériel P_1 de masse m_1 mobile, lancé avec une vitesse v_1, vient heurter un autre point matériel P_2 de de masse m_2 immobile. Détermination des vitesses v_1' et v_2' juste après le choc respectivement sur P_1 et P_2.

- Avant le choc : $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2$
- Après le choc :

$$\vec{P}' = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \Rightarrow E'_C = \frac{1}{2}m_1{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v'_2}^2$$

Conservation du vecteur quantité de mouvement :

$\vec{P} = \vec{P}' \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$

Projection suivant $\vec{v}_1$:

$$m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \ (1)$$

Conservation de l'énergie cinétique :

$$E_C = E'_C \ soit \ \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \frac{1}{2}m_1{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v'_2}^2$$

$$Soit \ \ m_1{v_1}^2 = m_1{v'_1}^2 + m_2{v'_2}^2 \ (2)$$

d'où :

$$\begin{cases} m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \ \ (1) \\ m_1{v_1}^2 = m_1{v'_1}^2 + m_2{v'_2}^2 (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1(v_1 - v'_1) = m_2v'_2 \\ m_1({v_1}^2 - {v'_1}^2) = m_2{v'_2}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1(v_1 - v'_1) = m_2v'_2 \ \ (1) \\ m_1(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_2{v'_2}^2 \ \ (2) \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow v_1 + v'_1 = v'_2 \ \ (3)$$

Dans (1) : $m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2(v_1 + v'_1)$

$$soit \ \ (m_1 - m_2)v_1 = (m_1 + m_2)v'_1 \Rightarrow$$

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}v_1 \ \ et \ \ v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1$$

Remarque :

$-si \ \ m_1 \gg m_2 \ \ \Rightarrow v'_1 = v_1 \ \ et \ \ v'_2 = 2v_1$

$-si \ \ m_1 \ll m_2 \ \ \Rightarrow v'_1 = -v_1 \ \ et \ \ v'_2 = 0$

$-si \ \ m_1 = m_2 \ \ \Rightarrow v'_1 = 0 \ et \ \ v'_2 = v_1$

2. Etude d'un choc inélastique ou choc avec accrochage

Soit un point matériel P_1 de masse m_1 mobile, lancé avec une vitesse v_1, vient heurter un autre point matériel P_2 de de masse m_2 immobile. Détermination des vitesses v_1' et v_2' juste après le choc respectivement sur P_1 et P_2.

Pour un choc inélastique, les deux points matériels ont mêmes vitesse après le choc c'est-à-dire $v'_1 = v'_2 = v$.

- Avant le choc : $\vec{P} = m_1\vec{v}_1$
- Après le choc : $\vec{P}' = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$

Conservation du vecteur quantité de mouvement :

$$\vec{P} = \vec{P}' \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = (m_1 + m_2)\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

II. Relation Fondamentale de la Dynamique (R.F.D)

Dans un référentiel galiléen, la deuxième loi de Newton énonce que : "La variation temporelle de la quantité de mouvement d'un système est égale à la résultante des forces qui s'applique sur ce système." $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{app}$

III. Les lois de Newton

1. Première loi de Newton (Principe d'inertie)

Dans un référentiel Galiléen, un système isolé est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme.

2. La deuxième Loi de Newton ou

Théorème de Centre d'inertie (T.C.I):

Dans un référentiel Galiléen la somme vectorielle des forces Extérieures qui s'exercent sur un point matériel est égale au Produit du vecteur accélération et de la masse du point matériel :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$en \ éffet : \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$

3. Troisième Loi de Newton ou

Le principe des actions réciproques

"Si un système A exerce une force $\vec{F}_{A/B}$ sur un système B, alors le système B exerce une force$\vec{F}_{B/A}$ sur le système A de même intensité, ayant la même direction mais de sens opposé." :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

Exercices sur la R.F.D

EXERCICICE 01

Un enfant prend place sur une luge au sommet O d'une piste enneigée parfaitement plane, de longueur L=OB=50m, incliné d'un angle α=30° par rapport à l'horizontal. L'ensemble forme un solide de masse m = 55kg. Les forces de frottement exercées par le sol sur la luge sont équivalentes à une force $\vec{F}$ parallèle à la trajectoire et d'intensité $F = 44N$.

1. Un autre enfant communique à l'ensemble {luge +enfant} en O, une vitesse $v_0 = 2m.s^{-1}$ vers le bas et selon la ligne de la plus grande pente OB.
   a)) Déterminer les équations horaires du mouvement ;
   b)) Calculer la durée de la descendante ;
   c)) Déterminer la vitesse V_B au point B.
   d)) En déduire l'énergie mécanique du système { luge + enfant } au bas de la pente.
2. Au bas de la pente de la pente, la luge aborde une piste horizontale, la force de frottement gardent la même valeur qu'au début.
   a)) Déterminer la nouvelle accélération a sur la piste horizontale.
   b)) Trouver les équations horaires du mouvement sur cette horizontale.
   c)) Calculer la distance parcourue avant l'arrêt.
   En déduire la durée totale de la luge sur son mouvement.

EXERCICE 02

On considère deux solides (S_1) et (S_2) de masses respectives $m1 = 500g$ et $m2 = 300g$, relié par un fil inextensible de masse négligeable. Ce fil passe sur la gorge d'une poulie de masse négligeable. S_1 glisse sur un table horizontale et S_2 se trouve à 3m au-dessus du sol.

1. Le système est abandonné sans vitesse initiale et on néglige tous les frottements. Calculer :
   a)) l'accélération a du système ;
   b)) l'énergie cinétique de S_2 lorsqu'il heurte le sol.
   c)) la norme de la tension du fil.
2. En réalité, le contact de S_1 avec la table a eu lieu avec frottement, dont son effet s'oppose à la trajectoire de S_1 et d'intensité $f = 1{,}2N$. Répondre la question 1.
3. Le fil supportant S_1 est parallèle de la plus grande pente d'un plan incliné, faisant un angle $\alpha = 30°$ avec le plan horizontal. La piste est rigoureux, les frottements sont équivalents à une force $\vec{f}$ d'intensité $f = 0{,}2N$.
   a)) Calculer la nouvelle accélération a' de S_1 et en déduire la nature de son mouvement.
   b)) Déterminer l'énergie mécanique de S_1 à l'instant $t = 1{,}2s$.
   c)) A l'instant $t = 1{,}2s$, le fil supportant S_1 et S_2 casse.
   c1)) Donner les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$ de S_1 après la rupture du fil.
   c2)) Donner les lois horaires du mouvement de S_1 en prenant comme origine des dates et d'abscisses l'instant de la rupture.

EXERCICE 03

Sur la gorge d'une poulie de masse négligeable, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal, passe un fil inextensible et de masse négligeable, dont les extrémités supportent deux corps A et B de masseM_A et M_B . On négliger tous les frottements.

1. Dans une première expérience, les deux brins de fils sont verticaux. M_A= 0,539kg et M_B = 0,441kg. Calculer :
   a)) L'accélération du système.
   b)) L'espace parcourue par chaque corps, la vitesse et l'énergie cinétique de chaque corps 3s après avoir abandonnée le lui-même sans vitesse initiale.
2. Dans une deuxième expérience, le brin de fil supportant A est parallèle de la pente d'un plan incliné formant un angle $\alpha = 30°$ avec le plan horizontale.
   a)) Quelles valeurs doit-on donner à M_A et M_B la somme est toujours la même 0,980kg pour que la vitesse du système 3s après l'avoir abandonnée à lui-même soit la même que précédemment, le corps A remonte le plan.
   b)) Calculer l'énergie mécanique du corps A à l'instant $t = 3s$ et la tension du fil au cours du mouvement.
3. Dans une troisième expérience, à t = 3s le fil se casse.
   a)) Quel est le mouvement pris par le corps A ?
   b)) Trouver la position et la vitesse du corps A, 1,2secondes après la rupture du fil.

EXERCICE 04

Un solide est tiré le long de la tige de plus grande pente d'un plan incliné par un câble parallèle à ce plan qui fait un angle α =30° avec l'horizontale. La masse m du solide et égale à 980kg.
On prendra g = 9,8m.s^{-2}. On néglige tous les frottements.
Le mouvement comporte trois phases :
- Il est d'abord uniformément accéléré durant 3s ;
- Uniforme durant 6s sur une distance de 36m ;
- Uniformément retardé pendant une même durée Δt jusqu'à l'arrêt.

a)) Sachant que la distance parcourue est de 60m, calculer la durée totale du trajet effectif par le solide.
b)) Ecrire les équations horaires du mouvement dans chaque phase
c)) Déterminer la force de traction du câble au cours des trois phases du mouvement.
d)) Déterminer la puissance exercée par la force de traction pendant la 2^{e} phase du mouvement.

EXERCICE 05

Un monte-charge soulève un fardeau de masse $\boldsymbol{m = 1tonne}$ d'une hauteur H par rapport au niveau du sol.

La monter comprend 3 phases :

Phase 1 :

MRUA durant 3s, la vitesse du fardeau passe de 0 à v.

Phase 2 : MRU durant 10s d'une longueur de 20m ;

Phase 3 : MRUR durant 5s, la vitesse du solide passe de v à 0.

a)) Calculer la vitesse v du solide.

b)) Ecrire pour chaque phase les équations horaires du mouvement et en déduire H.

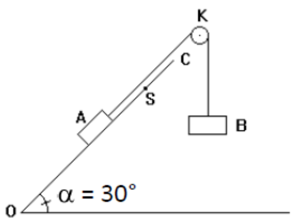
c)) Calculer la tension exercée par la câble sur le fardeau dans chaque phase.

d)) Le câble rompt juste à l'arrêt ; le fardeau étant à une hauteur H par rapport au sol.

Quelle est la nature du mouvement du fardeau juste après la rupture du câble et déterminer le temps mis lorsqu'il le sol.

EXERCIE 06

On considère un solide A de masse $m_A = 400g$ pouvant glisser le long du plan incliné OC parfaitement lisse suivant la ligne de plus grande pente, et un solide B de masse $m_B = 300g$ relié à A par un fil inextensible de masse négligeable passant sur la gorge d'une poulie K de masse négligeable. A la date t = 0, le système est libéré sans vitesse, le solide A partant du point O.



1. Calculer l'accélération du système.

2. a)) Calculer le temps mis par A pour atteindre le point S tel que OS = 2 m.

b)) Calculer la vitesse de A au passage en S.

c)) Au moment où le solide passe en S, le fil casse brusquement. Décrire les mouvements ultérieurs de A et B. (aucun calcul n'est demandé)

3. Lorsque le solide A quitte le plan incliné, il arrive sur le sol horizontal où il rencontre un solide C immobile de masse $m_C = 350g$, après un parcours de longueur $\boldsymbol{L = 10m}$ sur le plan incliné ; le choc est centrale et parfaitement élastique.

a)) Calculer la vitesse v_1 du solide A juste avant le choc.

b)) Exprimer les vitesses v_1' et v_2'de deux corps après le choc, en fonction de $m_A, m_C\ et\ v_1$. Faire son A.N.

EXERCICE 07

Un solide ponctuel (S) de masse m=100g est attaché à l'extrémité B d'un fil de masse négligeable et de longueur l= 300cm. L'autre extrémité du fil est fixé en A. (fig1)

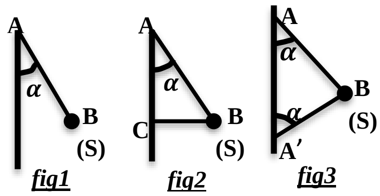
1. (S) étant lancée de façon convenable, l'ensemble tourne autour d'un axe vertical (Δ) passant par A avec une vitesse angulaire $\omega = \boldsymbol{12rad/s}$. Le solide (S) a alors un MCU autour de (Δ) et on appelle α l'angle que fait AB avec (Δ). Calculer α.

2. (S) est maintenait relié à un point fixe C de (Δ) (fig2) par un autre fil de masse négligeable.
Le fil BC est tendu est horizontal lorsque α prend la valeur α_O et l'ensemble tourne à la même vitesse angulaire précédente.
Exprimer la tension du fil BC en fonction de m, l, α_O, g et ω.
A.N : $\alpha_0 = \boldsymbol{30°}$.

3. (S) étant toujours attaché au fil précédent. Le fil BA' reste tendu avec AA'=60cm et $AB = BA' = l = 300cm$. (fig3).

a)) Exprimer les tensions des fils BA et BA' en fonction de m, ω, l, α et g. En déduire leurs valeurs numériques.

b)) Quelle doit être la valeur de ω pour que le fil BA' soit tendu.



EXERCICE 08

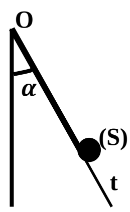
On considère un solide ponctuel S de masse $m = 400g$ et de dimension négligeable. On prendra $g = 9{,}8m.s^{-2}$.

Un système est constitué d'une tige Ot soudée en O à un support vertical OS. La tige Ot forme un angle $\alpha = 60°$ avec OS. Sur cette tige est enfilé un solide S ; il est relié à O par un fi tourner inextensible de longueur $l = 40cm$, on néglige les frottements et on fait tourner le système autour de l'axe OS.

1. a)) Calculer la vitesse de rotation ω_O du système au moment où la réaction de la tige sur le solide S est nulle.

b)) Calculer, dans ce cas, la tension T du fil.

2. Quelles sont respectivement l'intensité de la réaction de la tige sur le solide S et la tension du fil si on fait tourner le système à la vitesse de $1trs.s^{-1}$.



DYNAMIQUE DE ROTATION

Relation Fondamentale de la Dynamique de Rotation

1. **Cas d'un point matériel**

   Soit un point matériel de masse m animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe Δ : $M(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta} = mR\ddot{\theta}$

2. **Cas d'un solide**

$$\sum M(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}$$

3. **Théorème de l'accélération angulaire**

$$\sum M = \sum M(\vec{F}) + \sum M_c = J_\Delta\ddot{\theta}$$

M_C : moment du couple

$M(\vec{F})$: moment des forces extérieures

Moment d'inertie de quelques solides

1. **Anneau de masse m et de rayon R** : $J = mR^2$
2. **Manchon ou cylindre creux** : $J = mR^2$
3. Disque homogène ou Cylindre homogène :

$$J = \frac{1}{2}MR^2$$

4. **Sphère homogène** : $J = \frac{2}{5}MR^2$
5. **Tige** :$J = \frac{1}{12}ML^2$

Théorème de Huygens

Le théorème de Huygens (aussi appelé théorème de l'axe parallèle) facilite grandement le calcul du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque. Soit J_0 le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de masse et J le moment d'inertie par rapport à un autre axe, parallèle au premier et à une distance d de celui-ci. Alors le théorème stipule que :

$$J = J_0 + Md^2$$

Théorème de l'énergie cinétique en rotation

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}J{\omega_f}^2 - \frac{1}{2}J{\omega_i}^2 = \sum W(\vec{F})$$

Énergie cinétique cas de rotation :

$$E_C = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Travail d'une force cas de rotation :

$$W(\vec{F}) = M(\vec{F}).\theta$$

Où $\theta = 2\pi n$ $avee$ $n = nombre$ de $tours$ effectués.

Exercices sur la dynamique de rotation

EXERCICE 01

Un solide (S) de masse $m = 10kg$ est suspendu par une corde inextensible et de masse négligeable est enroulée sur la surface d'un cylindre horizontal homogène de masse $M = 20kg$ et de rayon $r = 10cm$.

1. Le solide est initialement au repos.
 a)) Calculer son accélération au bout de 3m de chute.
 b)) Calculer sa vitesse et la durée de ce mouvement.
 c)) Déterminer les lois horaires correspondant aux mouvements du système (S+cylindre).
 d)) En déduire le nombre de tours effectués par le cylindre après 3m de chute et la durée correspondante.
2. La corde quitte ensuite le cylindre en mouvement.
 a)) Calculer le moment du couple de force qu'il faudra lui appliquer pour l'arrêter après 100tours.
 b)) Quel est l'accélération angulaire de ce mouvement de freinage ? Calculer la durée de ce freinage.

EXERCICE 02

Un disque métallique horizontal, pleine et homogène, de rayon $R = 10cm$ et masse $m = 100g$ tourne autour d'un axe vertical (Δ) passant par son centre d'inertie O. Le disque tourne à la fréquence constante $N = 2400tr.min^{-1}$ à l'instant t=0s, on supprime la force d'entrainement exercée par le moteur ; le disque s'arrête en une durée $t_f = 4min$. Soit M le moment supposé constante du couple de frottements qui produit l'arrêt. On appellera θ l'angle de rotation du disque, $\dot{\theta}$ sa vitesse angulaire, $\ddot{\theta}$ son accélération angulaire.

1. En utilisant la RFD en rotation, montrer que le mouvement du disque est uniformément décéléré (U.D). Calculer $\ddot{\theta}$ et M.
2. Pour 0<t<t_f : calculer l'expression de θ en fonction de t et des données précédentes. En déduire n, le nombre de tours effectués par le disque pendant la durée de freinage.
3. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, redémontrer que le mouvement est U.D. et calculer d'une autre façon n.

EXERCICE 03

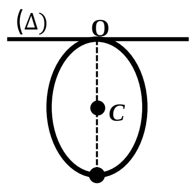
Un cylindre homogène de rayon $R = 10cm$, de masse $M = 2kg$, peut tourner autour de son axe de révolution horizontal (Δ), il s'enroule un fil inextensible de masse négligeable. Ce dernier est fixé par l'un de ces extrémités au cylindre et l'autre extrémité D vertical est appliquée une force de module $F = 9N$.

Le cylindre est traversé suivant un diamètre par une tige T de masse $M' = 2,6kg$ et de longueur $L = 2l = 100cm$ portant à ses extrémités deux masses ponctuelles égales $m_A = m_B = 0,5kg$, situant à une distance l=50cm de l'axe (Δ).

1. On néglige tous les frottements et on abandonne le système sans vitesse initiale.
 a)) Montrer que le système va prendre un mouvement de rotation uniformément accéléré et calculer $\ddot{\theta}$.
 b)) Déterminer les lois horaires θ(t) et $\dot{\theta}$(t) en fonction du temps t.
2. On néglige encore les frottements.
 La force $\vec{F}$, tension d'un fil est réalisée en suspendant en D un objet de masse m'.
 a)) Déterminer la masse m'.
 b)) Calculer le temps nécessaire pour que le point D parcourt 2m.
 c)) Calculer la vitesse angulaire et le nombre de tours effectués par le cylindre à cet instant.
3. Une étude expérimentale montre que dans la réalité, il faut utiliser une masse $m'' = 1,2kg$ pour que le point D parcourt 2m pendant le temps trouvé précédemment. Cet écart entre la théorie et la réalité est dû à un couple de frottement.
 a)) Quel est le moment M_C supposé constant de ce couple de frottements.
 b)) En déduire le module de la tension T du fil et déterminer l'expression de θ(t) en prenant comme origine l'instant où le point D parcourt 2m.

EXERCICE 04

On considère un disque plein, homogène, de masse $M = 500g$, de rayon $R = 20\ cm$ et de centre C.



1. Le disque peut osciller, dans un plan vertical, autour d'un axe horizontal fixe (Δ), perpendiculaire à son plan et passant par un point O de sa circonférence. Au point B diamétralement opposé à O, on fixe un corps ponctuel (S), de masse $= \frac{M}{2}$.
 Montrer que :
 a)) La distance du centre d'inertie G du système S={disque + corps (S)} à l'axe (Δ) est $OG = a = \frac{4}{3}R$.
 b)) Le moment d'inertie du système {disque + corps (S)} par rapport à l'axe (Δ) est J_Δ=$7mR^2$.
2. Le système S constitue un pendule composé.
 On considère les oscillations de faible amplitude autour de l'axe (Δ) de ce pendule.
 On écarte le système d'un angle $\theta_0 = \pi/6$ rad avec la verticale.
 a)) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de S et en déduire sa nature. Trouver la loi horaire correspondante.

b)) Calculer la longueur l du pendule simple synchrone de ce pendule composé.

On néglige les oscillations.

On écarte à nouveau le système d'un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ rad avec la verticale et on le lance avec une vitesse 20rad/s

c)) Calculer la vitesse linéaire de l'extrémité G lorsque le système passe à la position d'équilibre.

3. On enlève le corps (S). On fait tourner le disque, seul, à l'aide d'un moteur.

Lorsque le disque atteint la vitesse de 300 tours par minute, on arrête le moteur et on applique sur le disque un couple de freinage de moment M_f constant. Il s'arrête après avoir effectué 250 tours, comptés à partir de l'arrêt du moteur.

a)) Calculer M_f .

b)) Calculer la durée de cette phase d'arrêt du disque.

EXERCICE 05

On néglige les frottements et la résistance de l'air.

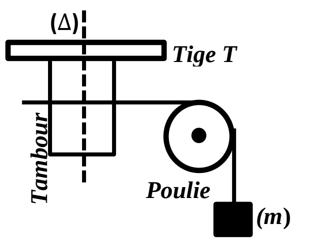
Une tige T de longueur $L = 50\ cm$, de masse $M_1 = 96\ g$, est solidaire d'un tambour cylindrique, d'axe vertical (Δ) fixe, de masse négligeable, et de rayon $R_1 = 5\ cm$. L'axe (Δ) du tambour est perpendiculaire à la tige en son milieu O.

Un fil sans masse et inextensible, ne pouvant glisser sur la poulie ni sur le tambour, est enroulé sur le tambour de façon que les spires ne se chevauchent pas.

Ce fil passe sur la gorge d'une poulie, d'axe de révolution horizontal et perpendiculaire au plan de la figure.

La poulie a une masse $M_2 = 50\ g$ supposée répartie uniformément sur sa circonférence de rayon $R_2 = 10\ cm$.

Pendant le mouvement, on suppose que l'axe de la poulie est fixe, et le brin de fil entre le tambour et la poulie reste horizontal et situé dans le plan de la figure. Un corps de masse $m = 64\ g$ est attaché à l'extrémité du fil.



1. Calculer :

a)) le moment d'inertie J_1 de la tige par rapport à l'axe (Δ).

b)) le moment d'inertie J_2 de la poulie par rapport à son axe de révolution.

2. A l'instant t=0s, on abandonne la masse m sans vitesse initiale.

a)) Vérifier que l'accélération de la masse m est $a = 0{,}7 m.s^{-2}$.

b)) En déduire l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_1$ de la tige.

3. A l'instant t, la vitesse de la masse m est $v = 2m.s^{-1}$.

Calculer :

a)) La distance parcourue par la masse m à cet instant et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ de la tige.

b)) le nombre de tours n effectués par la tige à cet instant. En déduire alors l'instant t.

4. A l'instant t, le fil reliant le tambour et la masse m casse.

On applique une force tangentielle $\vec{F}$ à la poulie d'intensité F pour l'arrêter.

a)) En utilisant la RFD, montrer que le mouvement de la poulie est uniformément retardé, en déduire alors la décélération angulaire de ce mouvement et le nombre de tours effectués par la poulie avant de s'arrêter, sachant que $F = 21N$.

b)) Calculer la durée de ce mouvement de freinage ainsi que l'angle balayer par la poulie.

EXERCICE 06

Une poulie formée de deux cylindres coaxiaux (C_1) et (C_2), de rayons respectifs r_1=10cm et r_2=20cm peu tourner sans frottement autour de son axe (Δ). Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe (Δ) est $J_0 = 4{,}5.10^{-2} kg.m^{-2}$.

On enroule sur le cylindre (C_1) un fil f_1 de masse négligeable, à l'autre extrémité duquel est accrochée une masse m_1=150g.

On enroule sur le cylindre (C_2) un autre fil)f_2 de masse négligeable, à l'extrémité duquel est accrochée une masse $m_2 = 200g$. On abandonne le système sans vitesse initiale.

1. Dans une 1ère expérience les masses m_1 et m_2 se déplacent verticalement dans le même sens.

a)) Calculer l'accélération angulaire de la poulie.

b)) Calculer les tensions T_1 et T_2 des fils $f_1$et f_2 .

2. Dans une deuxième expérience les masses m_1 et m_2 se déplace verticalement dans le sens contraire.

a)) Dans quel sens la poulie se met-elle à tourner ?

Calculer alors l'accélération angulaire de la poulie.

b)) Calculer la vitesse angulaire de la poulie et la vitesse linéaire quand la masse m_1 s'est déplacée de 2m

EXERCICE 07

Sur la gorge d'une poulie de masse m=100g repartie sur la circonférence de rayon r=6cm, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal; passant un fil de masse négligeable.

Ce fil porte une masse m_1=300g et une masse m_2=100g.

La masse m_1 se trouve à 3 m au-dessus du sol; la masse m_2 se trouve du sol sans y reposer.

On abandonne le système à t=0s sans vitesse initiale.

I. 1. a)) Calculer l'accélération prise par la masse m_1.

En déduire sa vitesse lorsqu'elle heurte le sol.

b)) Calculer la tension de chaque fil pendant le mouvement.

2. a)) Quelle force $\vec{F}$ faut-il appliquer tangentiellement à la poulie pour qu'elle s'arrête au bout 6tours, le fil supportant m_2 étant coupé quant m_1 arrive au sol.

   b)) Montrer que le mouvement de la poulie après la rupture du fil est uniformément retardé.

   En déduire la décélération angulaire ainsi que la durée de ce mouvement de freinage.

II. La masse m_1 se déplace suivant la ligne de la plus grande pente d'un plan parallèle à l'axe de la poulie et incliné sur le plan horizontal d'un angle $\alpha=30°$.

1. Quelles valeurs doit-on donner aux deux masses $m_1$et m_2 (leur somme restant la même, est égale à 400g), pour que l'accélération prenne la même valeur qu'en I-1-a).
2. Quelle est alors l'énergie mécanique de la masse $m_1$sur le plan incliné à l'instant t=3s.
3. A l'instant t=3s, le fil reliant m_1 et m_2 casse.

   a)) Donner l'accélération a' prise par m_1 après la rupture du fil.

   b)) Donner les lois horaires du mouvement en prenant comme origine des dates, l'instant de rupture.

   c)) Calculer la durée mise par masse $m_1$pour repasser à sa position de départ.

EXERCICE 08

On considère un cylindre de centre O, de rayon r=2,5cm, pouvant tourner autour d'un axe (Δ) fixe, horizontal, perpendiculaire en O au plan de la figure. Une tige homogène AB, de longueur $2l = 40\ cm$, de milieu O, est fixée sur un diamètre du cylindre. Un fil inextensible et de masse négligeable est enroulé sur le cylindre par l'une de ses extrémités. L'autre extrémité du fil supporte un corps ponctuel de masse M = 200g dont le déplacement vertical peut être repéré par l'axe (GX).

La masse M est abandonnée sans vitesse à l'instant t = 0s, et parcourt, d'un mouvement uniformément varié, la distance $d_1 = 20Cm$ pendant la durée $t_1 = 0{,}6s$. (Voir figure1).

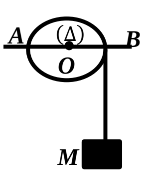
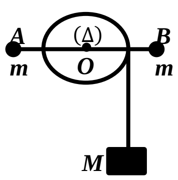


figure 1



figure

1. a)) Calculer l'accélération a_1 de la masse M.

   b)) Vérifier que le moment d'inertie du système (cylindre-tige) par rapport à (Δ) est $J_0=10^{-3}$ kg.m^2.
2. On fixe sur la tige AB, symétriquement opposé par rapport à O, deux solides ponctuels ayant chacun une masse $m = 100\ g$ (figure 2).

   a)) Exprimer, en fonction de M, J_0, m, g et d (distance entre une masse m et le centre O), la nouvelle accélération $a_2$de la masse M.

   b)) Montrer qu'en faisant varier d, la grandeur $y = \frac{1}{a_2}$ est de la forme $y = \alpha X + \beta$ avec $X = d^2$.

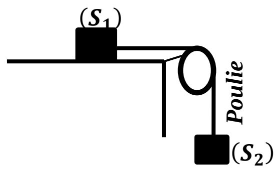
   En déduire numérique α et β.
3. a)) Calculer l'accélération a_2 pour d = 20 cm ainsi que l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_2$ du cylindre.

   b)) En déduire la durée t_2 de ce mouvement et le nombre de tours effectués par le cylindre à cet instant si la masse M parcourt 50cm.
4. A l'instant $= t_2$, on applique un couple de freinage au cylindre a fin de l'arrêter.

   Le cylindre s'arrête alors à une durée t=15 secondes.

   Calculer le moment du couple de freinage qui produit l'arrêt du cylindre ainsi que le nombre de tours total effectués par le cylindre entre ces deux phases.

EXERCICE 09



Deux solides S_1 et S_2 de masses respectives m_1 et m_2 sont reliés par un fil inextensible de masse négligeable passant par la gorge d'une poulie de rayon r tournant sans frottement autour d'un axe horizontal (Δ) passant par son milieu. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à l'axe (Δ) est noté J_Δ. On abandonne le système sans vitesse initiale.

1. Calculer l'accélération prise par le solide S_2.

   Quelle est la nature du mouvement de S_2.
2. En fait, il y a des frottements entre S_1 et la table, la composante $\vec{R_T}$ est supposée constante et le mouvement est possible.

   a)) Calculer la nouvelle accélération prise par le système sachant que le coefficient de frottement entre S_1 et la table est f=75%.

   b)) Si on casse le fil, quelle serait la nature de mouvement deS_1 ?

   Si on néglige tous les frottements, qu'en est- elle réellement ?

   Dans la suite de l'exercice, on négligera tous les frottements.
3. a)) Déterminer les tensions des fils lors du mouvement.

   b)) Calculer la vitesse du solide S_2 après 10s.

   En déduire la vitesse angulaire de la poulie et le nombre de tours effectués par la poulie à cet instant ainsi que la distance parcourue par S_2.
4. a)) Calculer le moment de la force de freinage à appliquer tangentiellement à la poulie pour qu'elle s'arrête au bout de 2s de freinage, le fil supportant les masses étant coupé.

   b)) En déduire l'angle balayer par la poulie pendant la phase de décélération ainsi que le nombre de tours effectués.

<u>Données</u> : $m_1=m_2=100$g ; $J_\Delta=8.10^{-5}$kg.m^2 ; r = 1cm ; g=9,8m.s^{-2}.

EXERCICE 10

Un disque pleine homogène de centre C, de rayon R = 30cm et de masse M = 10Kg, roule sans glisser le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle α = 30° par rapport à l'horizontal. Le disque part sans vitesse sur le plan incliné (roule sans glisser)

1. a)) Déterminer son accélération linéaire lors de la descente du plan incliné.

   b)) Trouver les lois horaires x(t) et $\dot{\theta}(t)$ du disque.

2. Lorsque le disque quitte le plan incliné, il arrive sur le sol horizontal où il rencontre une sphère homogène immobile de masse m, de rayon $r = 20cm$ et moment d'inertie par rapport à son axe après un parcours de longueur $L = 20m$ sur le plan incliné ; le choc est centrale et parfaitement élastique.

   a)) Calculer à cet instant la vitesse v_1 du disque ainsi que le nombre de tours effectués.

   b)) Exprimer les vitesses v_1' et v_2'de deux corps après le choc, en fonction de M, m et v_1.

   c)) Discuter les résultats obtenus en fonction des valeurs de M et de m et faire son. Application Numérique pour $J_0 = 0{,}8\text{kg.m}^2$.

3. En supposant que le disque roule en glissant sur le plan incliné :

   a)) Déterminer l'accélération du centre C du disque en fonction du temps.

   b)) Combien de temps met le disque pour descendre le plan incliné ?

EXERCICE 11

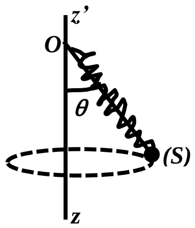
Les parties A et B sont largement indépendantes. On néglige les frottements et la résistance de l'air. On considère un corps S supposé ponctuel de masse $m = 100g$. On prendra : g=10m.s^{-2} .

I. On fixe le corps S à l'extrémité inférieure d'un ressort de longueur à vide $l_0 = 12cm$ et de raideur $k = 50N.m^{-1}$.
L'autre extrémité supérieure est fixée en un point O de l'axe verticale zz'. Ce dernier tourne avec une vitesse de rotation N (tours/seconde). Lorsque N est constant, le ressort s'écarte d'un angle θ par rapport à la verticale et le corps S décrit un cercle dans un plan horizontal. Dans cette condition, la longueur du ressort est $l = 16cm$. (voir figure1).

1. Calculer la valeur de l'angle θ.
2. Déterminer la vitesse de rotation N et en déduire la tension du ressort.

II. Le corps S peut glisser sur la ligne de la plus grande d'un plan incliné d'un angle α=30° par rapport au plan horizontal.
Il est relié à une poulie (p) par un fil inextensible et sans masse. Le fil, supposé suffisamment long, est initialement enroulé sur la gorge de la poulie.
Cette dernière est placée au sommet du plan incliné et peut tourner autour de son axe fixe et horizontal. A l'instant t=0s, on abandonne le corps S sans vitesse initiale et on suppose que le fil se déroule sans glisser sur la gorge de la poulie (p).
Le moment d'inertie de la poulie est J_O et son rayon $r = 10cm$. (voir figure2)

1. Établir l'expression de l'accélération linéaire du corps S en fonction de m, J_O, r, α, et g.
2. Pour déterminer la valeur de cette accélération, on mesure la distance x parcourue par S à l'instant t.
   Exprimer l'accélération linéaire de S en fonction de x et t.
   A.N t=0,8s et x=64cm.
3. En déduire la valeur numérique du moment d'inertie J_O de la poulie (p).



fiaure 1

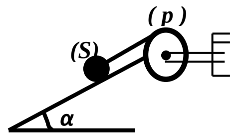


figure 2

Étude Énergétique D'Un Système Mécanique

Rappels sur l'Étude Énergétique d'un système Mécanique

1. Généralité

- Énergie cinétique de translation : $E_C = \frac{1}{2}mv^2$
- Energie potentielle de pesanteur : $E_{PP} = mgz$
- Energie potentielle élastique: $E_{PE} = \frac{1}{2}kx^2$

  K : constante de raideur du ressort

  x : allongement du ressort (m)
- Energie potentielle de torsion : $\boldsymbol{E_{PC} = \frac{1}{2}C\theta^2}$

  C : constante de torsion

  θ : angle d'écartement du ressort par rapport à sa position d'équilibre exprimé en radian (rad)
- Energie Mécanique : $\mathrm{E} = \mathrm{E_C} + \mathrm{E_{PP}}$

2. Théorèmes généraux

Théorème de l'énergie cinétique (T.E.C)

Énoncé du théorème :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique entre deux instants quelconques est égale à la somme de tous les travaux des forces extérieurs :

$$\Delta E_C = E_{C1} - E_{C0} = \sum W(\vec{F}_{ext})$$

Théorème de l'énergie mécanique (T.E.M)

Énoncé du théorème :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie mécanique d'un système entre deux instants quelconques est égale à la somme des travaux des forces non-conservatives:

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \sum W(\vec{F}_{ext})$$

Remarque :

- si $\Delta E = 0 \Longrightarrow E_1 = E_0 = E = cste$, donc l'énergie mécanique se conserve (conservation de l'énergie mécanique): un tel système est dit conservatif.
- *si* $\Delta E < 0 \Longrightarrow E_1 < E_0$,donc l'énergie mécanique diminue au cours du temps : cette diminution de l'énergie mécanique est due aux forces de frottements divers dus au système mécanique. Un tel système est dit dissipatif.

Exercices sur l'étude énergétique d'un système

EXERCICE 01

Un club d'amateurs a construit une fusée de masse m=200kg.

Lors du lancement le moteur exerce une poussée verticale F=constante, durant 10s, puis le moteur est coupé.

La fusée continue sur sa lancée avant de retomber.

La trajectoire est verticale et la masse de la fusée reste pratiquement constante. On prendra $g=9{,}8m.s^{-2}$.

1. Les frottements sont négligeables, la fusée atteint une vitesse de $100km.h^{-1}$ lorsque le moteur s'arrête à t=10s.
   a)) Monter que durant cette phase de lancement le mouvement du centre d'inertie de la fusée est uniformément accéléré.
   b)) Calculer l'accélération et la valeur de la poussée.
   c)) Quelle est l'altitude atteinte lorsque le moteur s'arrête ?
   d)) Quelle est la nature du mouvement ultérieur ?
   Quelle est l'altitude maximale atteinte ?
2. Les frottements sont assimilés à une force constante f=100N et s'exerce tout au long du trajet. La poussée F garde la même valeur qu'à la question précédente et s'exerce pendant 10s.
   a)) Calculer l'altitude atteinte quand le moteur s'arrête.
   b)) Quelle est l'altitude maximale atteinte ?

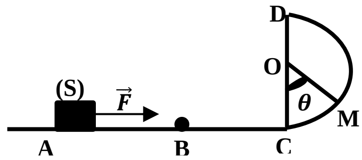
EXERCICE 02

Un solide ponctuel (S) de masse m est initialement au repos en A. On le lance sur la piste ACD, en faisant agir sur lui, le long de la partie AB de sa trajectoire, une force $\vec{F}$ horizontale et d'intensité F constante. On pose AB= l.

La portion AC de la trajectoire est horizontale et la portion CD est un demi-cercle de centre D et de rayon r. Au point M défini par l'angle $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OM})=\theta$.On suppose que la piste ACD est parfaitement lisse et on néglige les frottements.

1. a)) Déterminer l'accélération a du solide puis donner, en fonction F, l, et m, la valeur V_B de la vitesse de (S) en B ;
   b)) Avec quelle vitesse aborde –t-il la piste en C.
2. Etablir en fonction de F, l, m, r, θ et g , au point M l'expression de :
   a)) La valeur v de la vitesse de S.
   b)) L'intensité R de la réaction $\vec{R}$ de la piste.
3. De l'expression de R, déduire, en fonction de m, g, r et l, la valeur minimale F_O de F pour que S atteigne D. Calculer F_0.
4. Les frottements sur la piste AM sont équivalent à une force unique constante f.
   a)) Déterminer l'expression de la vitesse V au point M en fonction de F, L (distance AC), l, m, f, θ et g .
   b)) Sachant que $v_M = 0{,}5ms^{-1}$, en déduire l'intensité de la force de frottement f ainsi que l'accélération du solide entre A et B. Déterminer la nature de son mouvement et l'équation horaire correspondante.
   c)) Calculer la durée mise par le solide pour passer au point C et son énergie mécanique.

Données : m = 0,5kg ; r = 1m ; l = 1,5m ; $g = 10m/s^{-2}$;
F= 1N ; L = 3m ; θ = 30°.



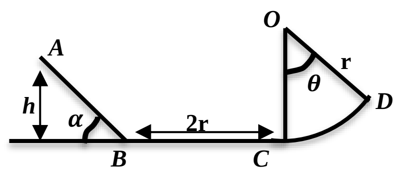
EXERCICE 03

Un solide se masse m= 2kg, de dimensions négligeable est mobile sur une piste situé dans le plan vertical . Cette piste est constituée de 3parties : une partie rectiligne AB incliné d'un angle α =30° par rapport à l'horizontal ; une partie horizontale de longueur 2r avec r= 1m et une partie circulaire CD de centre O, de rayon r et tel que $\theta = (\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}) = 60°$.

Sur les parties AB et BC les frottements sont équivalents à une force unique d'intensité $\|\vec{f}\|=\frac{1}{10}$du poids du solide.

Sur la piste CD on néglige les frottements.

1. Exprimer littéralement la vitesse du solide aux points A, B, C et D en fonction de g, h et r.
2. a)) De quelle hauteur h peut-on lâcher le solide pour que sa vitesse en D soit égale à $2m.s^{-1}$?
   b)) Calculer l'accélération du solide sur le tronçon AB et en déduire la durée de parcours AB
3. a)) Donner l'expression de la force exercée par la piste sur le solide en D en fonction de h, g ,r
   b)) En déduire la valeur minimale de la hauteur h pour que le solide quitte la piste en D.
   c)) Le solide peut-il toucher le plafond situé à 1,5m au-dessus de C ? Justifier votre réponse.



EXERCICE 04

Une bille M assimilable à un point matériel de masse m=50g est abandonnée sans vitesse initiale en un point A d'une piste ABCD.

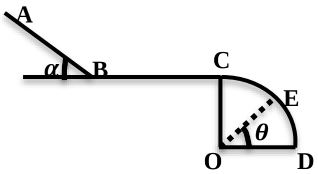
La piste est constituée :

- d'un tronçon rectiligne AB incliné d'un angle α=30° par rapport à l'horizontal ; AB=1,6m ;
- d'un tronçon rectiligne horizontal BC ;
- d'un tronçon circulaire CD, de centre O, et de rayon $r = 60cm$ et tel que OC est perpendiculaire à BC.

Les frottements s'exercent qu'entre B et C, et sont équivalents à une force $\vec{f}$ parallèle au déplacement et d'intensité constante

$$f = 0{,}4N.$$

1. Calculer la vitesse de la bille en B et la durée du trajet AB.
2. a)) Quelle est la nature du mouvement de la bille sur la piste BC.
   b)) Donner l'équation horaire de M sur la portion BC.
   c)) Quelle devrait être la longueur BC pour que M arrive en C avec une vitesse nulle ?
3. La bille M part en C avec une vitesse nulle et aborde la portion CD. La position de M est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE})$ au point E.
   a)) Exprimer, en fonction de g, r, et θ, la vitesse de M en E.
   b)) Donner, en fonction de m, g, r, et θ, l'intensité de la réaction R de la piste sur M en E.
   c)) Calculer l'angle θ_o pour que M quitte la piste. En déduire la vitesse de M en ce pt.



EXERCICE 05

Une petite sphère S, ponctuelle de masse m=200g est accrochée à un fil de masse négligeable, inextensible de longueur l=1m.

L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe.

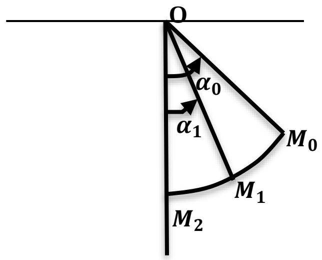
1. Le pendule ainsi obtenu est écarté de sa position d'équilibre d'un angle α_O=40° puis lancé avec une vitesse $v_0 = 2m.s^{-1}$.
   a)) Calculer la vitesse de S lorsqu'elle passe aux points M et A définis respectivement par α_1=25° et α_2=0.
   b)) Déterminer la tension du fil à la position α_1 et α_2.
   c)) En déduire la valeur minimale de la vitesse v_0 pour que la sphère fasse un tour complet, le fil reste tendu au cours du mouvement .
   d)) On écarte à nouveau S d'un angle α_O=40° de sa position d'équilibre et On la lance avec une énergie cinétique E_C=1,2J. Calculer l'angle d'écartement maximal α_m (α_m>α_O).
2. L'ensemble {fil + S} tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical (Δ)
   Le fil fait alors un angle θ=30° avec la verticale.
   a)) En appliquant le TCI, trouver une relation entre l'angle θ et ω. Calculer ω.
   b)) Exprimer et calculer la tension du fil.
   c)) Calculer la vitesse angulaire minimale ω_{min} qui permet au fil d'être tendu.

EXERCICE 06

Une petite sphère S, ponctuelle de masse $m = 200g$ est accrochée à un fil souple, de masse négligeable, inextensible de longueur $l = 80cm$. L'autre extrémité du fil est accrochée à un point fixe O. On prendra : $g = 9{,}8m.s^{-2}$.

Le pendule ainsi obtenu est écarté de sa position d'équilibre d'un angle α_O=40°. S est lancée avec une vitesse $v_0 = 3m.s^{-1}$ à partir du point M_0. On donne α_1=25°.

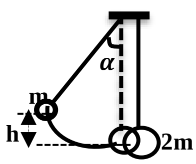
1. Calculer l'énergie mécanique E_0 de la sphère en M_0.
   On prendra E_{pp}=0J, à l'équilibre.4
2. Exprimer et calculer la vitesse de S lorsqu'elle passe aux points M_1 et M_2.
3. Exprimer et calculer la tension du fil aux points M_1 et M_2.
4. Calculer l'énergie mécanique E_2 de la sphère en M_2.Conclure.
5. En déduire la valeur minimale de la vitesse v_0 pour que la sphère fasse un tour complet, le fil reste tendu au cours du mouvement circulaire.
6. Calculer l'angle d'écartement maximal α_m (α_m>α_O) avec
$$\alpha_m = (\overrightarrow{OM_2}; \overrightarrow{OM_m})$$
   A ce moment le fil se casse.
   Donner l'équation horaire de S après la rupture.



EXERCICE 07

Deux billes de masses m et 2m sont suspendues par deux fils. Au départ, sont au repos : les deux billes se touchent et les fils sont verticaux. La bille de masse m est soulevée d'une hauteur h, avec un angle α= 60° et on la lâche sans vitesse initiale. Elle vient alors cogner la bille de masse 2m, initialement au repos.

1. a)) Calculer en fonction de h la vitesse v_1 de la masse m juste avant le choc.
   b)) Déterminer la tension T_1 de m lorsqu'elle repasse la verticale.
2. Trouver les hauteurs maximales auxquelles s'élèvent ces deux billes après la collision dans le cas :
   a)) d'une collision parfaitement inélastique,
   b)) d'une collision élastique.



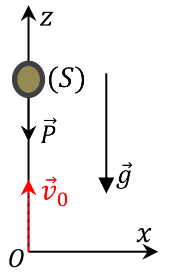
Champ De Pesanteur

Rappels sur le Champ de Pesanteur

I. **Mouvement d'une particule dans le champ de pesanteur cas où $\vec{v}_0$ est parallèle à $\vec{g}$**

Un projectile de masse m est lancé à partir d'un point O verticalement vers le haut avec une vitesse $\vec{v}_0$ à l'instant t=0.

1. Lois horaires du mouvement



Le projectile est soumis à son poids $\vec{P}$

Condition initiale :

$$\vec{v_0}\left|\begin{array}{l} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = v_0 \end{array}\right. ,\overrightarrow{OM_0}\left|\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{array}\right.$$

T.C.I : $\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Dans la base (ox,oz)

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{array}\right. \Rightarrow \vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = 0 \\ v_z = -gt + v_0 \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \end{array}\right.$$

D'où les lois horaires du mouvements sont :

$$\begin{cases} v = gt + v_0 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \end{cases}$$

Nature du mouvement :

Si v_0 est initialement dirigé vers le haut, le mouvement est d'abord uniformément décéléré. Au point maximal $v = 0$, ensuite le mouvement est rectiligne uniformément accéléré vers le bas.

2. Hauteur maximale atteinte par le projectile

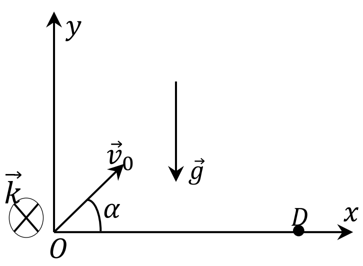
Au point maximal, $v = 0 \Rightarrow v(t) = -gt + v_0 = 0$

$$soit\ t_{max} = \frac{v_0}{g} \Rightarrow z_{max} = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) = \frac{v_0{}^2}{2g}$$

$$La\ hauteur\ maximale\ est\ :\ H_{max} = z_{max} = \frac{v_0{}^2}{2g}$$

II. **Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur Cas où $\vec{v}_0$ non parallèle à $\vec{g}$.**

Un projectile de masse m est lancé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ avec une vitesse initiale de lancement $\vec{v}_0$. Ce vecteur fait avec l'horizontale un angle α, appelé angle de tir.



1. Mouvement plan

- Condition initiale $\vec{v_0}\left|\begin{array}{l} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{array}\right. ,\overrightarrow{OM_0}\left|\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{array}\right.$

Le projectile est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

T.C.I : $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{array}\right. , \vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \\ v_z = 0 \end{array}\right.\ et$$

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x = (v_0\cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Comme $z = 0$, alors le mouvement est plan et a eu lieu dans le plan (Ox, Oy)

2. Equation de la trajectoire

$$\begin{cases} x = (v_0\cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t \end{cases}$$

$$soit\ \ x = (v_0\cos\alpha)t \Longrightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

$$y = -\frac{g}{2v_0{}^2cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$

3. Porté horizontale

La portée est l'abscisse du point d'impact D d'ordonnée y=0.

$$y = -\frac{g}{2v_0{}^2cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha = 0 \Longrightarrow x = \frac{2v_0{}^2cos^2\alpha}{g} \times \tan\alpha$$

$$\Longrightarrow x = \frac{2v_0{}^2cos^2\alpha}{g} \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2v_0{}^2\cos\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{2v_0{}^2\sin 2\alpha}{g}$$

$$D'où : x_D = x = \frac{2v_0{}^2\sin 2\alpha}{g}$$

4. Flèche

La flèche est la hauteur maximale atteinte par le projectile.

Au sommet de la trajectoire : $v_y = 0$.

$$v_y = -gt + v_0\sin\alpha = 0 \Longrightarrow t_{max} = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

$$y_{max} = -\frac{1}{2}gt_{max}{}^2 + (v_0\sin\alpha)t_{max}$$

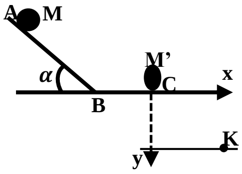
$$\Longrightarrow y_{max} = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + (v_0\sin\alpha).\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

$$\Longrightarrow y_{max} = \frac{v_0{}^2sin^2\alpha}{2g}$$

Exercices sur le champ de pesanteur

EXERCICE 01

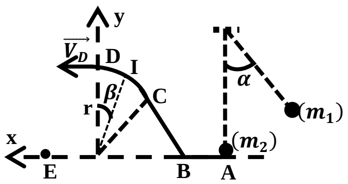
Une bille de masse m=50g est abandonnée sans vitesse initiale au point A d'une gouttière. En C, elle heurte une autre bille M' de masse m'=200g .



1. Juste après le choc supposé parfaitement élastique, la vitesse de la bille M' est v'=1,6m.s^{-1}. En admettant que les vitesses sont colinéaires avant et après le choc, calculer :
   a)) la vitesse v_0 de la bille M juste avant le choc ;
   b)) la vitesse v de M juste après le choc.
2. Après le choc, la bille M' quitte la gouttière.
   a)) Quelle est la nature du mouvement ultérieur de M' ?
   b)) Ecrire l'équation cartésienne de sa trajectoire dans un repère d'axe orthonormé $(\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{CY})$.
   c)) Calculer la distance verticale du point C au point d'impact K de la bille M' sur le sol horizontale situé à h=80m de C.

EXERCICE 02

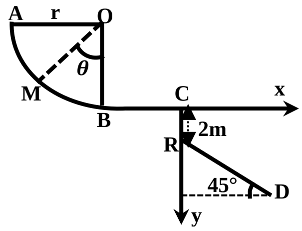
Dans tout le problème, on néglige les frottements et on prend g = 10 m s^{-2}. Un pendule simple est constitué par une bille ponctuelle M_1de masse m_1 = 200 g suspendue about d'un fil inextensible de masse négligeable et longueur l = 0,9 m.



1. On écarte le pendule d'un angle α par rapport à sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initial.
   La vitesse de la bille M$_1$ lors de son passage à la position d'équilibre est $v = 3m.s^{-1}$. Calculer la valeur de l'angle α.
2. Lors de son passage à la position d'équilibre, la bille M$_1$ heurte, au cours d'un choc parfaitement élastique, une autre bille ponctuelle M$_2$ immobile de masse m$_2$ = 100 g.
   La vitesse de la bille M$_2$, juste après le choc, est $5m.s^{-1}$.
   Calculer la vitesse de la bille M$_1$ juste après le choc en appliquant la conservation de la quantité de mouvement.
3. La bille M$_2$ est propulsée avec la vitesse v_A sur une piste qui comporte trois parties : Une partie horizontale AB, Une certaine courbe BC, et Un arc de cercle CD, de rayon r et de centre O. Les points O, A, B et E se trouvent dans un même plan horizontal.
   a)) Exprimer, en fonction de m$_2$, g, r, β e tvc_A, l'intensité de la réaction de la piste sur la bille M$_2$ au point I.
   b)) La bille M$_2$ arrive au point D avec une vitesse horizontale de valeur v_D = 1 m.s^{-1}. Calculer la valeur de r.
4. Arrivée en D, la bille M$_2$ quitte la piste avec la vitesse précédente et tombe en chute libre.
   a)) Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire de la bille M$_2$ dans le repère (o, i, j).
   b)) Calculer la distance OE.

EXERCICE 03

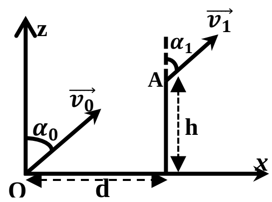
Une gouttière ABC sert de parcours à un mobile supposé ponctuel, de masse m=100g. Le mouvement a lieu dans un plan vertical.



1. Sa partie curviligne AB est un arc de cercle parfaitement lisse $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}rad\,; r = OA = OB = 1m.$
   Le mobile est lancé en A avec une vitesse $v_A = 5m.s^{-1}$ verticale dirigé vers le bas et glisse sur la portion AB.
   a)) Etablir l'expression littérale de la vitesse v_M du mobile en un point M tel que $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}) = \theta$, en fonction de v_A, g, r et θ. Calculer numériquement v_M en B.
   b)) Etablir l'expression littérale de la réaction R de la piste sur le mobile en M en fonction de m, g, θ, r et v_A. Calculer numériquement R en B.
2. La portion BC rectiligne et horizontale est rugueuse.
   Les frottements peuvent être assimilés à une force $\vec{f}$ unique, constante, opposée au mouvement d'intensité f. Sachant que le mobile arrive en C avec une vitesse $v_C = 5m.s^{-1}$. On donne BC=3m.
   a)) Calculer littéralement puis numériquement f.
   b)) Calculer l'accélération du mobile et en déduire la nature de son mouvement.
   c)) Déterminer le temps mis par le mobile pour traverser BC.
   d)) Enoncer « le théorème de l'énergie mécanique ».
   Calculer l'énergie mécanique du système {mobile ; Terre} en B et en C. Conclure.
3. En C, le mobile quitte la piste avec sa vitesse v_C.
   a)) Etablir, dans le repère $(\overrightarrow{Cx},\overrightarrow{Cy})$, l'équation de sa trajectoire.
   b)) Calculer la distance CD où D est le point d'impact du mobile.
   c)) Calculer la durée du saut et en déduire la vitesse v_D.
   d)) Calculer l'énergie mécanique du système {mobile ;Terre} en D. Conclure.

EXERCICE 04

On se propose d'étudier la trajectoire du centre d'inertie G d'un ballon de football. Le ballon quitte, à t=0s, le pied d'un tireur de « coup franc » direct avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ situé dans le plan vertical (O, $\vec{\imath}, \vec{k}$) et fait un angle $\alpha_0 = 60°$ avec l'axe Oz.



A cet instant le centre d'inertie G est au point O.

1. a)) Montrer que le mouvement est plan.

   Préciser le plan du mouvement.

   b)) Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de $v_O, g, et\ \alpha_o$. En déduire la nature du mouvement de G.

2. Le tir est en fait arrêté par le haut du « mur » dressé par l'équipe adverse. Le mur est situé à une distance $d = 6{,}0m$ du tireur. Sa hauteur $h = 1{,}95m$.

   a)) Calculer la vitesse initiale v_O du ballon.

   b)) Déterminer le temps mis par celui-ci pour atteindre le mur.

   c)) Etablir en fonction de g, h et v_O, l'expression de la vitesse v_1 de G en haut du mur. Calculer sa valeur numérique.

   d)) La vitesse $\overrightarrow{v_1}$ fait un angle α_1 avec l'axe Oz.

   Exprimer $sin\alpha_1/sin\alpha_0$ en fonction de g, h et v_0.

   Donner sa valeur numérique. En déduire la valeur de α_1.

3. Si le tir n'était pas contré, à quelle distance D du tireur tomberait le ballon.

EXERCICE 05

Un solide S, assimilable à un point matériel de masse $m = 0{,}5kg$, est lancé du point A avec une vitesse $v_0 = 2m.s^{-1}$.

Le solide S est soumis à une force constante $\vec{F}$ horizontale s'exerçant qu'entre A et B. Les frottements de la piste sont équivalents à une force opposée à la vitesse et d'intensité $f = 1N$.

1. a)) Déterminer l'accélération de S sur la piste AB et les lois horaires de son mouvement.

   b)) Calculer la vitesse de S au point B. En déduire alors la durée t_{AB} et l'énergie mécanique E_B de S en B.

2. Le solide aborde maintenant de tronçon BO incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale.

   Il atteint le point O avec vitesse $v_0 = 2m.s^{-1}$.

   L'intensité de la force de frottement est $f = 1N$.

   a)) Calculer la longueur $L = BO$ de la piste.

   b)) Calculer l'énergie mécanique E_0 de S en O.

3. Le solide quitte la piste au point O avec la vitesse $\overrightarrow{v_0}$.

   Les frottements de l'air sont négligeables (figure1).

   a)) Déterminer les lois horaires du mouvement dans (Ox, Oy).

   En déduire l'équation de la trajectoire.

   b)) Calculer la distance OC, C étant le point d'impact.

   Quelle est la durée du saut ?

   c)) Calculer l'énergie mécanique E du système au point C.

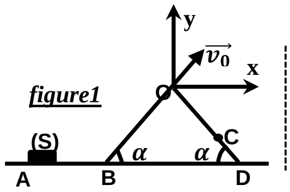
   Enoncer le « théorème de l'énergie mécanique ».

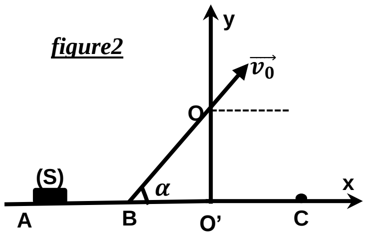
4. Le solide quitte la piste au point O avec une vitesse v_0 précédente (figure2).

   a)) Déterminer l'équation de la trajectoire de S dans (O'x, O'y).

   b)) Calculer la distance O'C où C est le point d'impact de S.

   Données : F= 5N ; AB=1m ; g=9,8$m.s^{-2}$.





EXERCICE 06

Dans tout l'exercice, on négligera les frottements de l'air et on prendra g=9,8m.s^{-2}.

Deux fusées A et B doivent être liées simultanément à partir de deux points O et P situés au sol et distants de $d = 30m$. Ces fusées vont exploser à la date $t = 4s$, après leur lancement.

L'une B est située de P avec une vitesse $\overrightarrow{v_B}$ verticale, l'autre A est tirée de O avec une vitesse $\overrightarrow{v_A}$ inclinée de α par rapport à l'horizontale et situé dans un plan vertical passant par P.

On donne : $v_A = 51{,}4m.s^{-1}\ et\ v_B = 50m.s^{-1}$.

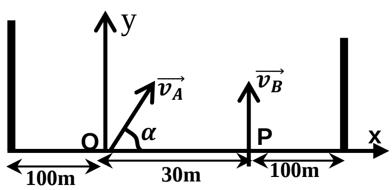
1. a)) Montrer que le vecteur accélération est le même pour les deux fusées.

   b)) Donner les lois horaires x(t), y(t) ainsi que l'équation cartésienne de trajectoire dans la base (Ox,Oy) de chaque fusée. Préciser la nature de leur trajectoire.

2. a)) Déterminer l'inclinaison α de la vitesse $\overrightarrow{v_A}$ de A pour que l'explosion ait lieu à la verticale de P.

   b)) Quelle est la distance qui sépare les deux fusées au moment de l'explosion?

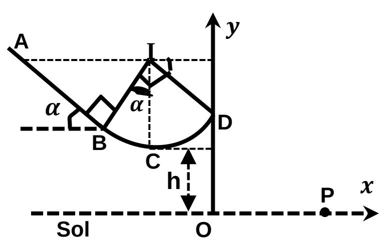
   c)) Les barrières de sécurité pour les spectateurs sont installées de façon à respecter la distance 100m des points de lancement O. Ces spectateurs sont-ils en sécurités lors de la retombée de la fusée en cas de non explosion en altitude?



EXERCICE 07

Dans ce problème on prendra g= 10 m.s^{-2}.

Tous les calculs seront effectués à 10^{-2}près.



Un solide (S) de masse $m = 50\ g$, de dimension négligeable, peut glisser sur une piste ABCD située dans un plan vertical :

- AB est la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale ; $AB = 1{,}6\ m$.

BCD est le quart d'un cercle de centre I et de rayon $R = 0{,}9\ m$;

C est situé sur la verticale passant par I.

1. On néglige les frottements. (S) part du point A sans vitesse.

a)) Calculer sa vitesse en B, en C et en D.

b)) Calculer l'intensité de la force $\vec{N}$ exercée par la piste sur (S) en C et en D.

c)) Donner les caractéristiques de $\overrightarrow{v_D}$ de (S) au point D.

2. On néglige la résistance de l'air. A partir du point D, (S) tombe dans le vide avec la vitesse $\overrightarrow{v_D}$ précédente.

Le point C est situé à la hauteur h = 1,55 m du sol.

a)) Donner l'équation cartésienne de la trajectoire du mouvement de (S) à partir du point D, dans le repère (O ; x, z).

b)) Jusqu'à quelle hauteur H au-dessus du sol horizontal monte le solide (S) ?

c)) Calculer la distance OP où P est le point d'impact de (S) sur le sol horizontal.

3. Dans cette question, la piste exerce au mouvement de (S) une force de frottement $\vec{f}$, parallèle et de sens contraire à sa vitesse à chaque instant, et d'intensité constante le long de ABCD.

Partant de A sans vitesse, (S) s'arrête en D.

a)) Calculer le travail $\overrightarrow{W_f}$ de la force de frottements entre A et D.

b)) En déduire l'intensité de la force $\vec{f}$.

<u>*EXERCICE 08*</u>

Une bille de masse $m = 50g$ se déplace sans frottement dans un plan vertical suivant une piste circulaire ABC de rayon $r = 0{,}5m$. Un système de guidage permet de maintenir en contact permanant avec la piste. On donne $\alpha = 30°$ et o prendra: g=$10m.s^{-2}$.

1. La bille lancée avec une vitesse $\overrightarrow{v_A}$ au point A, arrive en C avec une vitesse v_C =3,75m.s^{-1} .

a)) Calculer v_A.

b)) Avec quelle vitesse V_B la bille passe-t-elle au point B.

c)) Calculer la réaction R_B qu'exerce la piste sur la bille en B.

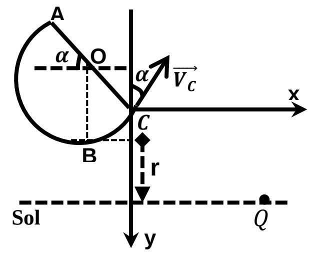
2. On suppose que les frottements entre A et C sont équivalents à une force unique $\vec{F}$ parallèle et de sens contraire au vecteur vitesse de la bille. Sachant que la bille part en A avec la même vitesse v_A calculée précédemment, calculer la vitesse v_C de la bille en C sachant que $F = 0{,}1N$.

3. On néglige à nouveau les frottements et la bille quitte la piste en au point C avec la vitesse précédente v_C .

a)) Donner l'équation de la trajectoire de la bille dans (Cx,Cy).

b)) Déterminer les coordonnées du point Q où la bille touche le sol, sachant que le sol horizontal se trouve à une distance $r = 0{,}5m$ du point B.

c)) En déduire la distance CQ et la vitesse de la bille lorsqu'elle touche le sol horizontal en Q.



<u>*EXERCICE 09*</u>

Dans l'exercice on négligera les frottements .

Un solide S de masse m=200g glisse sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontal.

1. S part de A sans vitesse initiale et arrive en B avec une vitesse v_B. On donne $AB = L = 1{,}5m$.

a)) Déterminer la valeur numérique de v_B ;

b)) Calculer l'accélération de S sur la piste AB et en déduire la nature de son mouvement.

c)) Donner les lois horaires du correspondant et en déduire la durée du trajet AB.

2. Au pt B, le plan se raccorde tangentiellement avec une piste circulaire (BCO) de rayon r=1m.

a)) Exprimer la vitesse V en un point M quelconque, en fonction de r, $\theta, \alpha, g\ et\ v_B$.

b)) En déduire les vitesses $v_C\ et\ v_O$ à son passage par les points C et O.

c)) Donner l'expression de la force $\vec{F}$ exercée sur la piste BO en M en fonction de m, r, $\theta, \alpha, g\ et\ v_B$.

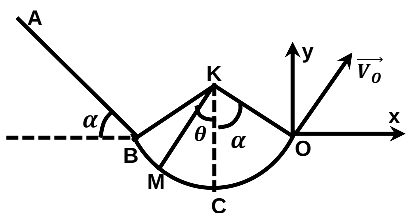
Calculer sa valeur numérique aux points C et O.

3. Le solide S quitte la piste en O avec la vitesse v_O.

a)) Etablir dans le repère (O,x, y) l'équation cartésienne de la trajectoire.

b)) Déterminer l'altitude maximale atteinte par le solide S en son mouvement.

c)) A quelle distance de l'origine O, le solide S va-t-il de nouveau rencontrer l'axe Ox ?



EXERCICE 10

Une bille (B_1) de masse $m_1 = 200g$ est assimilable à un point matériel peut glisser sur une piste ABC situé dans un plan vertical.

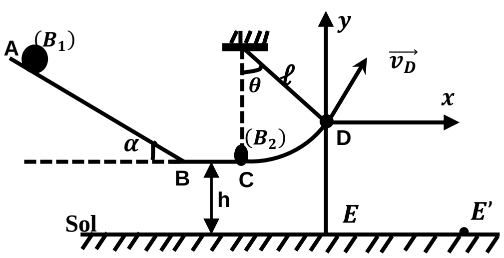
Piste AB : ligne de la plus grande pente d'un plan de longueur $2{,}5m$ incliné d'un angle α = 30° avec l'horizontal.

Piste $BC = 2r$: ligne dans le plan horizontal (H) qui se trouve à une hauteur $h = 1{,}20m$ du sol.

Le point est C extrémité d'un fil vertical de longueur l.

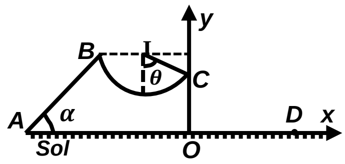
L'autre extrémité du fil est fixée au point O toujours sur la verticale contenant C. Le plan horizontal (H) est parfaitement raccordé en B au plan incliné.

1. (B_1) part du point A sans vitesse initiale, déterminer la vitesse v_C de la bille au point C
2. Au point C, se trouve une autre bille (B_2) de masse m_2= 300g, initialement au repos. (B_2) est suspendue au point C. Le système {(B_2) + fil} constitue donc un pendule simple. La vitesse de la bille (B_2) juste après le choc est $v_O = 4m.s^{-1}$. Le choc est parfaitement élastique. Calculer la vitesse de (B_1) juste après le choc.
3. Lorsque (B_2) arrive en D avec une vitesse $v_D = 3{,}5m.s^{-1}$ et telle que $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}) = \theta = 45°$, le fil reste tendu et se casse.
   a)) Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire $y = f(x)$ de (B_2) dans le repère $(\overrightarrow{Dx},\overrightarrow{Dy})$.
   b)) Déterminer la distance EE' où E' est le point d'impact de (B_2) au sol.
4. En réalité les frottements sur la piste AC sont équivalents à une force $\vec{f}=\frac{1}{10}\overrightarrow{P_1}$, poids de ($B_1$).
   a)) Calculer la vitesse de la bille (B_1) aux points B et C.
   b)) Etudier le mouvement de (B_1) sur la piste AC et donner les lois horaires correspondantes.
   c)) En déduire la durée totale mise par la bille (B_1) pour atteindre le point C.
   d)) En supposant que le choc entre (B_1) et (B_2) est parfaitement mou, calculer la vitesse du système $S = \{B_1 + B_2\}$ juste après le choc. Déduire la hauteur maximale atteinte par S en son mouvement et l'angle correspondant.



EXERCICE 11

Un solide (S) assimilable à un point matériel de masse $m = 50g$ est en mouvement sur une piste constituée d'une partie rectiligne AB inclinée d'un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontale et d'une partie circulaire BC de centre I et de rayon $r = 0{,}5\,m$.



On donne $\theta = \pi/4\,rad$.

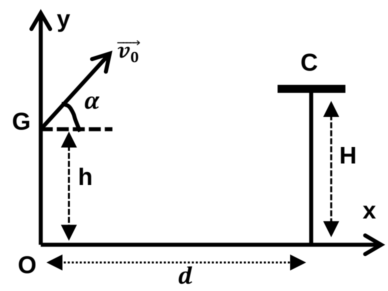
1. Le solide S est lance du point A une vitesse v_A=6m.s^{-1}.
   Il arrive au point B avec une vitesse nulle.
   Calculer la distance AB sachant que le point matériel est soumis à une force de frottement $\vec{f}$, d'intensité $f = 10^{-2}N$.
2. On néglige les frottements dur la partie circulaire BC.
   Calculer la vitesse V_C de (S) au point C.
3. (S) quitte la piste en C avec cette vitesse v_C.
   a)) Etablir l'équation de la trajectoire de S dans (Ox,Oy).
   b)) Déterminer les coordonnées du point D où le solide touche le sol.

EXERCICE 12

Au cours d'une compétition de basketball au Palais des Sports de Treichville, un basketteur A, tire en direction du panier constitué par un simple cercle métallique, dont le plan horizontal est situé à $H = 3{,}05m$ du sol. Lorsque le ballon est lancé par le joueur A :
le centre G du ballon est à h= 2,00 m du sol ; la distance séparant les verticales passant par le centre C du panier et G est d= 7,10 m ; sa vitesse $\overrightarrow{v_0}$ fait un angle α = 45° avec l'horizontale.

Le panier est marqué ou réussi lorsque le centre du ballon passe par le centre du panier. On néglige l'action de l'air sur le ballon.

Données : g = 9.80 m.s^{-2} Masse du ballon : m = 0,60 kg ;



1. Montrer que l'équation de la trajectoire de G dans le repère (Ox ,Oy) est : $y = -\frac{9{,}8}{{v_0}^2}x^2 + x + 2$
2. Calculer la valeur de v_0, pour que le panier soit réussi.
3. Dans la suite de l'exercice, on prendra $v_0 = 9{,}03m.s^{-1}$.
   a)) Établir et calculer la durée nécessaire au ballon pour parvenir au centre du panier.
   b)) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer la valeur de la vitesse du ballon lorsque le panier est marqué.

c)) Un joueur B de l'équipe adverse, situé à 0,90 m du joueur A, entre celui-ci et le panier, tente maintenant d'empêcher le tir en levant verticalement les bras. La hauteur atteinte par B est 2,70 m. Si le ballon part avec la même vitesse que précédemment, le panier sera-t-il marqué ?

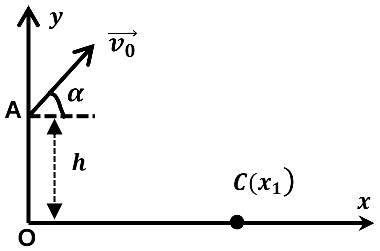
EXERCICE 13

Au cours d'un championnat, un athlète remporte l'épreuve du lancement de poids avec un jet de $x_1 = 19{,}43m$. Le poids a une masse m=7,35kg.

La trajectoire part de A à une hauteur $h = 1{,}80m$ au-dessus du sol.

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ fait un angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontale.

On assimile le projectile à un solide ponctuel.



1. Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de h, tanα et g.
2. Déterminer la norme de $\overrightarrow{v_0}$ en fonction de h, α, g et x_1.
3. Calculer la hauteur maximale h_{max} atteinte par le projectile et les coordonnées du vecteur vitesse au sommet de la trajectoire.
4. Déterminer la norme du vecteur vitesse du projectile au point C.

EXERCICE 14

Un pendule simple est formé par un fil inextensible de longueur $l = 1m$ portant une masse $m = 100g$. On néglige tous les frottements et on prendra ; $g = 10m.s^{-2}$.

A/ Une bille de masse $m = 100g$ assimilable à un point matériel est reliée à un point fixe I par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur $l = 1m$ et de masse négligeable. Le fil est écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_0=60°. La bille est lancée vers le bas avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_1}$ perpendiculaire à (IA).

1. Calculer la vitesse v_0 de la bille quand elle passe à la position d'équilibre. A.N :$v_1 = 4m.s^{-1}$.
2. Pour une position quelconque de M de la bille sur la trajectoire circulaire, repéré par l'angle θ, établir les expressions :

a)) De la vitesse v de la bille en fonction de $v_1, g, l, \theta,\ et\ \theta_0$.

b)) De la tension T du fil en fonction de $m, v_1, g, l, \theta,\ et\ \theta_0$.

3. A partir de l'expression de la tension du fil, déterminer la valeur minimale de la vitesse v_1 pour que la bille fasse un tour complet, le fil reste tendu au cours du mouvement.

B/. Le pendule est lancé du point A avec une vites $v_1 = 6{,}25m.s^{-1}$, le fil casse au passage à la verticale à un instant pris comme origine des dates.

1. Calculer la vitesse de la bille quand elle passe en O.
2. Déterminer dans le repère (Ox, Oy) l'équation de la trajectoire de la bille après la rupture du fil.
3. La bille touche un plan situé à $h = 1m$ au-dessous de O, en point C. Déterminer l'abscisse de C.

C/. Le système est maintenant utilisé comme un pendule conique.

1. a)) Si la vitesse de rotation est N=1,5Hz , trouver la tension du fil et le demi angle au sommet I.

b)) Si la demi angle au sommet est θ_0=60°. Trouver la vitesse de rotation N en tr /s.

2. Le fil si écarté d'un angle de 60° par rapport à la verticale.

La masse m est lancé avec une énergie cinétique de 0,028J et arrive à la position correspondante à l'angle θ_{max} ($\theta_{max} > \theta_0$).

a)) Calculer cet angle d'écartement maximal θ_{max}.

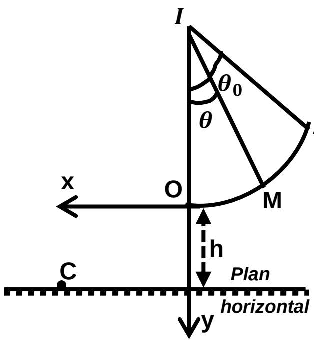
b)) A ce moment le fil se casse.

Donner l'équation horaire de m après la rupture.

(On demande juste une application littéraire).

Données : m = 2 kg, g = 9,8$m.s^{-2}$; $h_0 = 1{,}60m$;

$v_0 = 2m.s^{-1}$; $\alpha = 30°$.



Champ Gravitationnel

Rappels sur le champ Gravitationnel

1. <u>Définition de quelques références</u>

Choix d'un référentiel.

- Un référentiel est un objet matériel par rapport auquel on étudie le mouvement d'un autre objet appelé mobile.
- *<u>Le référentiel Galiléen</u>* : c'est un référentiel dans lequel le principe de l'Inertie est vérifié.
- Le référentiel terrestre ou référentiel du laboratoire.

- *<u>Le référentiel géocentrique :</u>* est un référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines qui apparaissent fixes.
- Ce référentiel est commode pour l'étude des satellites de la Terre.
- Ce référentiel n'est pas entraîné dans le mouvement de rotation de la Terre (ce référentiel est Galiléen) .
- Dans ce référentiel, la Terre est animée d'un mouvement de rotation uniforme de l'ouest vers l'est, autour de l'axe des pôles.

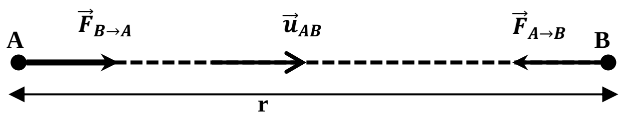
<u>Le référentiel héliocentrique ou de Copernic</u> :

Le référentiel de Copernic est le référentiel centré sur le centre de masse du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles éloignées.

- Ce référentiel est commode pour l'étude des satellites du Soleil.
- Dans ce référentiel, la Terre décrit une orbite elliptique autour du Soleil en une année.

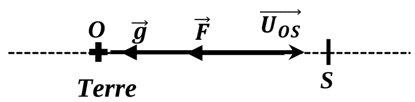
2. <u>La loi de Gravitation (loi de l'attraction universelle)</u>

« Deux corps ponctuels A et B de masses respectives m_A et m_B exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction, directement opposées, dirigées suivant la droite (AB), de valeur proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle au carré de leur distance r ».



$$\vec F_{A\to B} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\vec u_{AB} = -\vec F_{B\to A}$$

3. <u>Champ gravitation crée en un point de l'espace</u>



$$T.C.I:\ \vec F = m\vec g \Rightarrow \vec F = -G\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{U_{OS}} = -G\frac{mM_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}}$$

$$Or\quad \vec F = m\overrightarrow{g(h)} \Rightarrow \overrightarrow{g(h)} = -G\frac{M_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}}$$

Vecteur champ gravitationnel :

$$\overrightarrow{g(h)} = -G\frac{M_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}}$$

Au sol : $h = 0 \Rightarrow g_0 = \frac{GM_T}{{R_T}^2}$ $(champ\ gravitationnel\ au\ sol\ )$

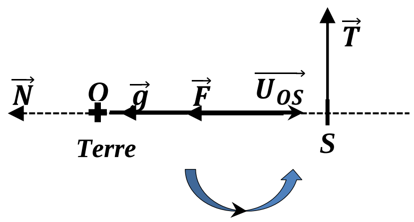
$$GM_T = g_0 {R_T}^2 \Rightarrow \overrightarrow{g(h)} = -g_0\frac{{R_T}^2}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}}$$

$$\Rightarrow g(h) = g_0\frac{{R_T}^2}{(R+h)^2}$$

champ gravitationnel à l'altitude h :

$$g(h) = g_0\frac{{R_T}^2}{(R+h)^2}$$

4. <u>Comment démontrer que le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique est circulaire uniforme</u>



En appliquant le théorème de centre d'inertie : (TCI)

$$\vec F = G\frac{mM_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_{SO}} = m\vec a \Rightarrow \vec a = G\frac{M_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_{SO}} = \overrightarrow{a_N}$$

Alors le vecteur accélération est radial (porté par le rayon SO) et centripète (même sens que $\overrightarrow{SO}$), il n'y a donc pas d'accélération tangentielle : $a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cste$:

alors : le mouvement est uniforme.

Et comme le mouvement du satellite est déjà circulaire, alors le mouvement du satellite est circulaire uniforme de rayon $r = R + h$.

5. *<u>Comment établir les expressions de la vitesse v, de la période T et de la vitesse angulaire ω du satellite</u>*.

- *<u>Expression de la vitesse d'un satellite</u>*

Comme le mouvement du satellite est C.U, alors :

$$a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T + h} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

$$Or\ \ GM_T = g_0{R_T}^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0{R_T}^2}{R_T+h}} = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}$$

- *<u>Expression de la période T d'un satellite</u>*

la période T du satellite est le temps nécessaire mis par ce satellite pour effectuer un tour complet autour de la terre.

$$T_S = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_T + h)}{R_T} \times \sqrt{\frac{R_T + h}{g_0}} = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0}}$$

- *Expression de la vitesse angulaire ω_s du satellite*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = R_T\sqrt{\frac{g_0}{(R_T + h)^3}}$$

6. Etablissement de *la 3ème loi de Kepler* :

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Longrightarrow v = \frac{2\pi r}{T} \Longrightarrow v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \ (1)$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \ soit \ v^2 = \frac{GM}{r} \ (2)$$

$$(1) = (2) \ alors: \ \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \Longrightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cste$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cste \ (\text{3ème loi de Kepler})$$

T : la période de révolution du planète;

r : le rayon de l'orbite (r = R + z) ; M : la masse du planète.

G : la constante de gravitation universelle.

7. *Satellite géostationnaire*

Un satellite géostationnaire est un satellite qui paraît immobile par rapport à un point de référence à la surface de la Terre dont sa période de rotation est identique à celle de la Terre (T=24h).

Ce satellite est placé à une altitude environ z=36 000km.

Par un simple calcul :

$$T = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0}} \Longrightarrow \frac{T^2 {R_T}^2}{4\pi^2} = \frac{(R_T + h)^3}{g_0}$$

$$soit : (R_T + h)^3 = \frac{T^2 {R_T}^2 g_0}{4\pi^2} \Longrightarrow R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 {R_T}^2 g_0}{4\pi^2}}$$

- Le rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire est :

$$r = (R_T + h) = \sqrt[3]{\frac{T^2 {R_T}^2 g_0}{4\pi^2}}$$

- L'altitude d'un satellite géostationnaire :

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 {R_T}^2 g_0}{4\pi^2}} - R_T \quad (h = 36\,000 km)$$

Remarque :

$r = R + z \ \ et \ \ GM = g_0 R^2$

Exercices sur le Champ gravitation

$$On\ Prendra\ G = 6{,}67.10^{-11}U.S.I\ ;$$
$$G_O = g_0 = 9{,}8m.s^{-2}\ ;\ R = R_T = 6380km$$

EXERCICE 01

Lorsqu'un satellite est animé d'un mouvement circulaire autour d'une planète, le rayon *r* de son orbite et la période *T* de son mouvement vérifient la loi de Kepler:

$$\mathrm{T}^2/_{\mathrm{r}^3} = {4\pi^2}/_{\mathrm{GM}} = cste$$

1. Les satellites géostationnaires de la Terre ont une orbite circulaire de rayon r = 42 164 km et une période T_G = 86 164 s. Calculer la masse M_T de la Terre.
2. Mars a deux satellites naturels, Phobos et Deimos. Phobos gravite9380 km du centre de Mars avec une période de 7 h 39 min. Deimos a une trajectoire quasi circulaire de rayon r_D = 23460 km et une période T_D = 30 h 18 min.
 a)) Calculer la masse de la planète Mars à partir des caractéristiques du mouvement de Phobos, puis de Deimos.
 b)) Comparer les valeurs obtenues.
3. Au cours de la mission APOLLO XVII en 1972, le module de commande en orbite circulaire autour de la Lune, à une distance de 2 040 km du centre de celle-ci, avait une période de 8 240 s dans le repère sélénocentrique.
 Calculer la masse de la Lune.

EXERCICE 02

Le 2 avril 1989, ARIANE V30 a été lancée depuis la base de Kourou (proche de l'équateur, en Guyane) pour placer en orbite le satellite de télévision directe TÉLÉ X. À l'issue du processus d'installation, le satellite est en orbite circulaire, dans un plan équatorial, à l'altitude h=35 782km.

La masse de la Terre $M_T = 5{,}975kg$, la masse du satellite $m = 277kg$ et 1jour sidéral correspond à $T_O = 86164s$

Le télescope spatial HUBBLE a été mis sur une orbite circulaire autour du centre *T* de la Terre. Il évolue à une altitude *h* = 600 km. Ce télescope, considéré comme un objet ponctuel, est noté Het a une masse *m* = 12.10^3 kg.

Les images qu'il fournit, sont converties en signaux électriques et acheminées vers la Terre par l'intermédiaire de satellites en orbite circulaire à une altitude $h_G = 35\ 800km.$

1. a)) Appliquer la loi de l'attraction universelle de Newton au télescope situé à l'altitude *h.*
 b)) Donner, en fonction de *m* , g_O, *R* et *h* , l'expression littérale de la valeur de la force de gravitation qu'il subit.
 c)) Calculer la valeur de cette force pour *h* =h_H = 600 km.
2. Le mouvement du télescope est étudié dans le repère géocentrique dont l'origine est T.
 a)) Montrer que son mouvement circulaire est uniforme.
 b)) Exprimer littéralement sa vitesse v sur son orbite en fonction de $R, g_o\ et\ h$ puis la calculer en $m.s^{-1}\ et\ en\ km.h^{-1}$ quand $h = h_H = 600km.$
 c)) Déterminer sa période de révolution T.

EXERCICE 03

Le satellite américain d'observation Landsat-5 est assimilable à un point matériel décrivant une orbite circulaire d'altitude z=705km au tour de la terre. Sa masse vaut m_{sat}=2t.

I. 1. a)) Dans quel révérenciel cette trajectoire est-il définie ?
 b)) Montrer que la vitesse du satellite est constante dans ce révérenciel.
 c))) Exprimer la vitesse de Landsat-5 en fonction de g_O ,R_T et z (altitude de la trajectoire).
2. Le satellite Landsat-5 est géostationnaire.
 a)) Définir ce terme.
 b)) Calculer littéralement, puis numériquement le rayon de l'orbite de Landsat-5 , en fonction de $g_o, R_T\ et\ \omega_T$ (ω_T : vitesse angulaire de la terre autour de l'axe de pôles)
 c)) A quelles utilisations pratiques peut être consacré un tel satellite.

II. 1. Calculer la vitesse du satellite et en déduire son énergie cinétique.
 2. L'énergie potentielle du satellite dans le champ de gravitation terrestre s'exprime par :

$$E_P = -\frac{G.M_T.m_{Sat}}{r}$$

en choisissant l'origine des énergies potentielles à distance infinie de la terre : calculer sa valeur dans le cas présent.
En déduire l'énergie mécanique du satellite.

3. a)) Quelle énergie minimale faut-il fournir à Landsat-5 pour qu'il s'éloigne définitivement de la terre.
 b)) Calculer la vitesse de libération de ce satellite, supposé initialement sur son orbite autour de Terre.
 Comparer avec la valeur habituelle.

EXERCICE 04

Dans un repère géocentrique supposé galiléen, on considère un satellite de centre d'inertie S dont la trajectoire' est un orbite circulaire située dans le plan équatorial à la l'altitude h=7,8.10^5m autour de la terre.

On considère la que la terre est sphérique et homogène de masse M_T , de centre d'inertie O et de rayon R_T.

I. 1. a)) Faire un schéma sur lequel apparaitra la force exercée par la Terre sur le satellite, le vecteur champ gravitationnel crée en S et le vecteur unitaire $\overrightarrow{U_{OS}}$.
 b)) A partir de la loi de gravitation universelle, établir la

valeur du vecteur champ gravitation g(h) à l'altitude h en fonction de G, M_T, R_T et h. En déduire que $g(h) = g_0 \frac{R_T{}^2}{(R_T+h)^2}$.

2. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.
3. Etablir l'expression de la vitesse V du satellite dans le référencie géocentrique en fonction de g_0, R_T et h, et celle de la période T et de vitesse angulaire ω.

II. On considère maintenant un satellite en orbite à basse altitude h

1. Calculer numériquement V, T et ω.
2. Le satellite se déplace dans le même sens que la terre. Déterminer la durée T' qui sépare deux passages successifs du satellite à la verticale d'un point donnée de l'Equateur. On rappelle que la période de rotation de la terre sur elle-même est T_O=8,6.10^4s.

III. On considère maintenant un satellite en orbite géostationnaire.

1. Quelle est la particularité d'un satellite géostationnaire?
2. Exprimer l'altitude h à laquelle évolue un tel satellite puis calculer sa valeur.

IV. On considère maintenant un satellite évoluant initialement à l'altitude h_o=780Km, perd de l'altitude à chaque tour sous l'influence d'actions diverses. La réduction d'altitude à la fin de chaque tour est supposée égale au millième de l'altitude au début en début de tour.

1. Etablir une relation entre l'altitude h_{n+1} en début du $(n+1)^{ème}$ tour et l'altitude h_o en début du $n^{ème}$ tour.
2. En déduire une relation entre h_n et h_o.
3. En déduire la valeur de n du nombre de tours effectués par le satellite quant il atteint l'altitude de 400Km.

__EXERCICE 05__

Soit un satellite de masse m tournant autour de la terre de masse M à distance r du centre de la terre. En supposant que sa trajectoire est circulaire :

1. Donner l'expression l'énergie potentielle correspondant à la force de gravitation entre le satellite et la terre, préciser l'origine choisie pour l'énergie potentielle.
2. Donner l'énergie mécanique totale en fonction de G, M, m et r.
3. Montrer que les trajectoires circulaires vérifient la troisième loi de Kepler $\omega^2 r^3 = GM$.
4. Si un satellite parait immobile dans le ciel, calculer sa hauteur, sa vitesse et son énergie totale.
5. Calculer la vitesse de libération de ce satellite. On donne : M = 5.98 1024 kg et m = 68 kg.

__EXERCICE 06__

Lancé, le 7aout 1997 à 10h41 depuis Kennedy Space Center, la navette spatiale américain Discovery. Pendant la phase de décollage La masse totale vaut $M = 2{,}041.10^7$kg, on admet que l'éjection des gaz par les moteurs a les mêmes effets qu'une force de poussée $F = 3{,}24.10^7 N$. On suppose que g_0 reste constante pendant toute la phase de départ.

I. __Etude de la phase de lancement__

1. Faire l'inventaire de toutes les forces s'exerçant sur la navette à l'instant de décollage et les représenter ces forces su un schéma.

(On néglige tous les frottements et la diminution de masse).

2. Calculer la valeur de l'accélération au décollage.
3. Calculer la distance parcourue pendant les 2 secondes qui suivent le décollage et on néglige la variation de l'accélération pendant cette durée.

II. __Etude de Discovery en orbite autour de la Terre__

Dix minutes après le décollage, la navette est en mouvement circulaire uniforme autour de la terre à l'altitude $h = 296km$. Sa masse vaut égale à $6{,}968.10^4 kg$.

1. On assimile la navette à un point matériel.

Sur un schéma, représenter son accélération.

Que peut-on dire de cette accélération ?

2. a)) Montrer que l'intensité du champ de gravitation à l'altitude h est donnée par :

g(h) = $g_0(\frac{R_T}{R_T+h})^2$. b)) Calculer la valeur de g(h) à l'altitude de l'orbite de discovery.

3. Montrer que l'expression de la vitesse de la navette est :

V=$\sqrt{g(h).(R_T+h)}$; faire son A.N.

III. __Etude de la phase d'approche à, l'atterrissage__

Discovery a atterri le 18 aout 1997,à la date t=7h07min.

Dans cette phase d'approche, le moteur s'arrêt, la navette est soumis à son poids et aux forces de flottement de l'air. On retrouvera ci-dessous la valeur de sa vitesse à différentes dates :

La masse de Discovery dans cette phase d'approche d'atterrissage vaut $69{,}68.10^3 kg$.

Date	Altitude(en km)	Vitesse(en m/s)
$T_1 = t - 8min$	54,86	1475
$T_2 = t - 3min$	11,58	223,5

1. Calculer le travail du poids entre les dates t_1 et t_2.
2. En utilisant le T.E.C, calculer le travail des forces de

frottements de l'air sur l'orbiteur entre les instants t_1 et t_1 de cette phase d'approche.

EXERCICE 07

On suppose que la Terre, de masse M_T, de rayon R_T et de centre O, est une sphère et qu'elle présente une répartition de masse à symétrie sphérique et que le satellite peut être assimilé à un point matériel. Le satellite artificiel S, de masse ms, décrit une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. On suppose que le satellite est soumis uniquement à la force gravitationnelle exercée par la Terre. On notera K, la constante de gravitation universelle.

1. Exprimer l'intensité du champ de gravitation terrestre G(h) en fonction de M_T , R_T , h et K.
   $Puis\ en\ fonction\ de\ R_T, h\ et\ G_0$
2. Montrer que le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique est uniforme.
3. En déduire l'expression de la vitesse vs du satellite en fonction de G_O, R_T et h puis celle de sa période de révolution T_S.
4. Calculer V_S et T_S sachant que :
   $G_O = 9{,}8\ m.s^{-2}$; h = 200 km et R_T= 6400 km.
5. METEOSAT 8 : un satellite géostationnaire.
   Les satellites météorologiques comme Météosat sont des appareils d'observation géostationnaires.
   Ce satellite a été lancé par ARIANE 5 le 28 août 2002.
   Il est opérationnel depuis le 28 janvier 2004. Il fournit de façon continue des informations couvrant une zone circulaire représentant environ 42% de la surface de la Terre.
   a)) Préciser les conditions à remplir par METEOSAT 8 pour qu'il soit géostationnaire.
   b)) En déduire, pour METEOSAT 8, la valeur du rayon $r = R_T + h$ de son orbite puis celle de son altitude h.

   Donnée : $M_T = 5{,}98 \times 10^{24} kg$

EXERCICE 08

On considère une planète P de masse M. Le mouvement de l'un de ses satellites S, assimilé à un point matériel de masse m, est étudié dans un référentiel considéré comme galiléen, muni d'un repère dont l'origine coïncide avec le centre O de la planète P et les trois axes dirigés vers trois étoiles fixes. On admet que la planète a une distribution de masse à symétrie sphérique et que l'orbite de son satellite est un cercle de centre O et de rayon r.

1. Donner les caractéristiques de la force de gravitation exercée par la planète P sur le satellite S. Faire un schéma.
2. Donner l'expression du vecteur champ de gravitation créé par la planète P au point où se trouve le satellite S.
   Représenter ce vecteur champ sur le schéma précédent.
3. Déterminer la nature du mouvement du satellite S dans le référentiel d'étude précisé.
4. Exprimer le module de la vitesse linéaire v et la période de révolution T du satellite S en fonction de la constante de gravitation G, du rayon r de la trajectoire du satellite et de la masse M de la planète P.
   Montrer que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est une constante.
5. Sachant que l'orbite du satellite S a un rayon $r = 185500\ km$ et que sa période de révolution vaut $T = 22{,}6$ heures, déterminer la masse M de la planète P.
6. Un autre satellite S' de la planète P a une période de révolution $T' = 108{,}4$ heures. Déterminer le rayon r' de son orbite.

EXERCICE 09

Un satellite supposé ponctuel, de masse m, décrit une orbite circulaire d'altitude h autour de la Terre assimilée à une sphère de rayon RT. On fera l'étude dans un référentiel géocentrique considéré comme galiléen.

1. Etablir l'expression de la valeur g du vecteur champ de gravitation à l'altitude h en fonction de sa valeur g_o au niveau du sol, de R_T et de h.
2. Déterminer l'expression de la vitesse $V_S$du satellite, celle de sa période et celle de son énergie cinétique.
   $A.N:\ m_S = 1020kg, R_T = 6400km\ et\ h = 400km.$
3. L'énergie potentielle du satellite dans le champ de pesanteur à l'altitude h est donnée par la relation :
   $E_P = -\frac{G\, m_S M_T}{R_T + h}$ avec G constante de gravitation et M_T masse de la Terre et en convenant que $E_P = 0$ pour h = ∞.
   a)) Justifier le signe négatif et exprimer $E_P$en fonction de $m_S, R_T,\ g_o\ et\ h.$
   b)) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E du satellite puis comparer E_P à E_C et E à E_C.
4. On fournit au satellite un supplément d'énergie :
   $\Delta E = +\,5.10^8\ J$. Il prend alors une nouvelle orbite circulaire. En utilisant les résultats du 3, déterminer :
   a)) sa nouvelle énergie cinétique et sa vitesse.
   b)) sa nouvelle énergie potentielle et son altitude.

EXERCICE 10

La terre est assimilable à une sphère homogène de centre O, de masse M et de rayon R.

Le champ de gravitation créé par la terre en tout point A de l'espace situé à une distance r du point O est $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$:

G la constante de gravitation universelle et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA}$.

1. Un satellite S de masse m décrit d'un mouvement uniforme une orbite circulaire de rayon r autour de laTerre. Le mouvement est rapporté au repère géocentrique et on suppose que S est soumis à la seule action du champ de gravitation terrestre.
   a)) Exprimer la vitesse v de S en fonction de g_o,R et r.

b)) Déduire l'expression de la période T du mouvement.

Calculer T. A.N. : r = 8000km.

2. A partir du travail élémentaire $dw = \vec{f}.\vec{dr}$ de la force de gravitation exercée par la terre sur le satellite, montrer que le travail de $\vec{f}$, lors de son déplacement du sol jusqu'à l'ordre de rayon r est donné par : W=$mg_oR^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$.
3. En déduire l'expression de l'énergie potentielle du système terre - satellite en fonction de g_o, m, r et R.
On choisira le niveau du sol comme état de référence pour l'énergie potentielle.
4. Exprimer l'énergie cinétique de S en fonction de m, g_o, r et R. Déduire l'expression de l'énergie mécanique totale.
5. Il se produit une très faible variation dr du rayon, telle que la trajectoire puisse toujours être comme circulaire. Exprimer la variation dv de la vitesse qui en résulte et montrer que : $dv = -\frac{\pi}{T}dr$

EXERCICE 11 **: *(Problème)***

Le premier lanceur Ariane est une fusée à trois étages dont la hauteur totale est de 47,4 m et qui pèse, avec sa charge utile (satellite), 208 tonnes au décollage. Le premier étage qui fonctionne pendant 145 secondes est équipé de 4 moteurs Viking V alimentés par du peroxyde d'azote N_2O_4 (masse de peroxyde emportée : 147,5 tonnes).

L'intensité de la force de poussée totale $\vec{F}$ de ces 4 réacteurs est constante pendant leur fonctionnement :
elle vaut F = 2445 kN.

Ce lanceur peut mettre en orbite circulaire basse de 200 km d'altitude un satellite de 4850 kg; il peut également placer sur une orbite géostationnaire un satellite de 965kg; il peut aussi être utilisé pour placer en orbite héliosynchrone des satellites très utiles pour des applications météorologiques.

I. L'ascension de la fusée Ariane

Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme :
son intensité est g_0 = 9,8 m.s $^{-2}$.
On choisit un axe Oz vertical dirigé vers le haut.
On étudie le mouvement de la fusée dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen.

1. a)) Représenter clairement, sur un schéma, en les nommant, les deux forces qui agissent sur la fusée Ariane lorsqu'elle s'élève verticalement. On néglige les frottements et la poussée d'Archimède dans l'air.
b)) A un instant quelconque, la masse de la fusée est m. Déterminer en fonction de m et des intensités des 2 forces précédentes la valeur de l'accélération a.
2. a)) On considère d'abord la situation au décollage.
La masse de la fusée vaut alors m_1.
Calculer la valeur de l'accélération a_1 à cet instant.
b)) On envisage la situation qui est celle immédiatement avant que tout le peroxyde d'azote ne soit consommé.
La masse de la fusée vaut alors m_2. Calculer la valeur de m_2 puis celle de l'accélération a_2 à cet instant.

Le mouvement d'ascension de la fusée est-il uniformément accéléré ?

3. La vitesse d'éjection $\vec{v_e}$ des gaz issus de la combustion du peroxyde d'azote est donnée par la relation :

$$\vec{v_e} = \frac{\Delta t}{\Delta m}.\vec{F}$$

où $\frac{\Delta t}{\Delta m}$ est l'inverse de la variation de masse de la fusée par unité de temps et caractérise la consommation des moteurs.

a)) Vérifier l'unité de v_e par analyse dimensionnelle.
Calculer la valeur numérique de v_e.
b)) Quel est le signe de $\frac{\Delta t}{\Delta m}$? En déduire le sens de $\vec{v_e}$.
Qu'en pensez-vous ?
c)) A l'aide d'une loi connue qu'on énoncera, expliquer pourquoi l'éjection des gaz propulse la fusée vers le haut.

II. Étude du satellite artificiel situé à basse altitude (h = 200 km)

On s'intéresse au mouvement d'un satellite artificiel S, de masse m_s, en orbite circulaire (rayon r)autour de la Terre de masse M_T, de rayon R_T et de centre O. On suppose que la Terre est une sphère et qu'elle présente une répartition de masse à symétrie sphérique et que le satellite peut être assimilé à un point.

1. a)) Préciser les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse v.
b)) Enoncer la loi de la gravitation universelle. On appelle G la constante de gravitation universelle. Faire un schéma sur lequel les vecteurs-forces sont représentés.
2. Le satellite S est à l'altitude h : on a donc r = R + h.
On appelle $\vec{F_S}$ la force qu'exerce la Terre sur le satellite. Cette force dépend de la position du satellite et on pose $\vec{F_S} = m_S\vec{g}(h)$. On note g(h) l'intensité de la pesanteur à l'endroit où se trouve le satellite:
a)) Exprimer g(h) en fonction de M_T, R_T, h et G puis g(h) en fonction de R_T, h et g_0 = g(0).
b)) Appliquer le T.C.I au satellite en orbite circulaire.
En déduire l'expression de la vitesse v_S du satellite en fonction de g_0 , R_T et h puis celle de sa période de révolution T_S.
c)) Application numérique.
Calculer v_S et T_S sachant que :
g_0 = 9,8 m.s $^{-2}$; h = 200 km et R_T = 6400 km.

Champ Électrostatique

Rappels sur le champ Électrostatique

I. Champ électrostatique uniforme $\vec{E}$

- La force Electrostatique : $\vec{F_e} = q\vec{E}$

- Caractéristiques du vecteur champ électrique $\vec{E}$

direction : Perpendiculaire aux deux plaques

sens : Orienté de la plaque positive vers la plaque négative

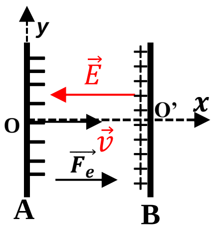
intensité : $E = \frac{U}{d}$, elle est exprimée en V/m.

Les 2 plaques soumises à la tension U (volt) sont distantes de d (mètre).

Généralité :

Considérons les particules d'hélium ${}^4He^{2+}$ de masse m et de charge q , animées d'une vitesse horizontale v_0.

1. Plaques Parallèles



1. Nature du mouvement sur les plaques A et B

La particule d'hélium est soumis à la force $\vec{F_e} = q\vec{E}$

_T.C.I :_ $\vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ _avec_ $q = +2e,$

Projection sur le plan (x,y) :

$$\vec{E}\begin{vmatrix} E_x = -E \\ E_y = 0 \end{vmatrix} \; ; \; \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = -\frac{qE}{m} \; (MRUV) \\ a_y = 0 \end{vmatrix}$$

Le mouvement- de la particule ${}^4He^{2+}$ entre les plaques A et B est rectiligne uniformément varié suivant Ox et rectiligne uniforme suivant Oy.

Nature de la trajectoire

Conditions initiales : à t=0,

$$\vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{vmatrix} \; et \; \vec{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{OM}\begin{vmatrix} x = \frac{eE}{2m}t^2 + v_0 t \\ y = 0 \end{vmatrix}$$

y = 0, alors la trajectoire est une droite mais son mouvement est uniformément décéléré suivant Ox.

2. Vitesse des particules en B

TCI :

$$E_C(B) - E_C(A) = W(\vec{F_e}) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = |q|U$$

$$v = \sqrt{{v_0}^2 + \frac{2|q|U}{m}}$$

Pour nous les particules utilisées sont ${}^4He^{2+}$:

_A.N :_ $m = Au = 4u \; et \; q = +2e$

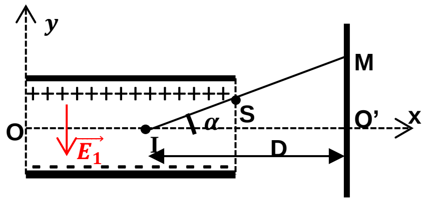
$$où \; u = 1{,}67.10^{-27}kg \quad et \; e = 1{,}6.10^{-19}$$

3. Temps mis par les particules pour atteindre B

Comme le mouvement suivant Ox est RUV, alors

$$a = \frac{\Delta v}{t} \Rightarrow t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v - v_0}{a}$$

II. Plaque plane



1. Equation de la trajectoire

Conditions initiales : à t=0,

$$\vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{vmatrix} \; et \; \vec{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}$$

La particule d'hélium est soumis à la force $\vec{F_e} = q\vec{E}$

_T.C.I :_ $\vec{F_e} = q\vec{E_1} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E_1}$

$$\vec{E_1}\begin{vmatrix} E_{1x} = 0 \\ E_{1y} = -E \end{vmatrix} \; ; \; \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{qE}{m} \end{vmatrix} \; ; \; \vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0 \\ v_y = -\frac{qE}{m}t \end{vmatrix} \; et$$

$$\vec{OM}\begin{vmatrix} x = v_0 t \\ y = -\frac{qE}{2m}t^2 \end{vmatrix}$$

$$y = -\frac{qE_1}{2m{v_0}^2}x^2 = \frac{qU_1}{2md{v_0}^2}x^2$$

Alors la trajectoire des électrons à l'intérieur du condensateur est un arc de parabole.

2. Coordonnées du point de sorti S

$$S\begin{vmatrix} x_S = l \\ y_S = -\frac{qE_1}{2m{v_0}^2}l^2 = \frac{qU_1}{2md{v_0}^2}l^2 \end{vmatrix}$$

Remarque :

$$Posons : \; k = \frac{el^2}{2md{v_0}^2} = cte$$

$y_S = kU$ _, alors_ y_S _est proportionnelle à_ U_1

3. Vitesse au point de sortie S

$$\vec{v_S}\begin{vmatrix} v_{Sx} = v_0 \\ v_{Sy} = -\frac{qE}{m}t_S \end{vmatrix} \; où \; x_S = v_0 t_S = l \Rightarrow t_S = \frac{l}{v_0}$$

$$\vec{v_S}\begin{vmatrix} v_{Sx} = v_0 \\ v_{Sy} = -\frac{qEl}{mv_0} \end{vmatrix} \Rightarrow v_S = \sqrt{{v_0}^2 + \left(\frac{qEl}{mv_0}\right)^2}$$

4. Condition sur la tension U_1 pour que la particule sorte du champ sans heurter les plaques

La particule sort du champ électrique sans heurter les plaques si pour $x_S = l \; et \; y_S < \frac{d}{2}$

$$y_S = \frac{qU_1}{2md{v_0}^2}l^2 < \frac{d}{2} \Rightarrow U_1 < \frac{md^2{v_0}^2}{ql^2}$$

5. *Valeur de l'angle* α

$$\tan\alpha = \frac{y_S}{l/2} = \frac{2y_S}{l} = \frac{2}{l}\times\frac{-qE}{2m{v_0}^2}l^2 = -\frac{qEl}{m{v_0}^2}$$

6. Equation de la trajectoire au delà de S

Au-delà de S, les particules suivent une droite

$(T): y = ax + b$

$$\text{où } a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} \quad avec \quad y = -\frac{qE_1}{2m{v_0}^2}x^2 \;\Rightarrow a = -\frac{qE_1}{m{v_0}^2}l$$

$$Or\;\; S\epsilon\,(T) \Rightarrow\; y_S = -\frac{qE_1}{m{v_0}^2}l\,x_S + b \;\Rightarrow$$

$$b = y_S + \left(-\frac{qE_1}{m{v_0}^2}\right)x_S$$

Entre S et M, le mouvement des particules est rectiligne uniforme car au-delà de S, le champ $\vec{E} = \vec{0}$.

7. Valeur de la déviation verticale y_M

$$\tan\alpha = \frac{y_M}{IO'} \;\Rightarrow\; y_M = IO'\tan\alpha$$

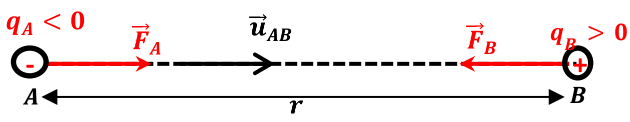
$$Avec\;\; \tan\alpha = -\frac{qEl}{m{v_0}^2} \quad et\;\; IO' = D$$

$$y_M = -\frac{qEl}{m{v_0}^2}D$$

Remarque :

La Loi de Coulomb

Deux charges électriques ponctuelles immobiles, q_A et q_B, placées en A et B, exercent l'une sur l'autre une force dirigée suivant la droite qui les joint, répulsive si les charges sont de même signe, attractive si les charges sont de signe contraire. Cette force varie comme le produit de leurs charges et comme l'inverse du carré de la distance qui les sépare.



$$\vec{F}_A = \vec{F}_B = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A\times q_B}{r^2}\vec{u}_{AB}$$

ε_0 : est la constante diélectrique (ou permittivité) du vide.

Exercices sur le champ Électrostatique

EXERCICE 01

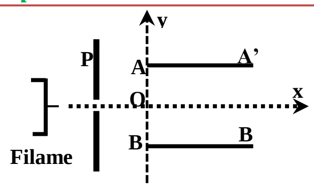
Un électron de masse m=9,1.10^{-31}kg quitte la cathode d'un et cathode est canon avec une vitesse de valeur négligeable. La tension entre anodeU_{AC}=800V. La distance entre ces deux plaques parallèles est d=4cm. On donne : e=1,6.10^{-19}C.

1. a)) Représenter le vecteur champ électrique $\vec{E}$.
   b)) Calculer la valeur de ce champ.
2. a)) Représenter le vecteur force $\vec{F}$ agissant sur l'électron.
   b)) Caractériser le vecteur accélération $\vec{a}$ du mouvement.
3. Calculer, en joules puis en électronvolt, l'énergie cinétique de l'électron lorsqu'il arrive sur l'anode.
   En déduire la valeur de sa vitesse en ce moment.
4. a)) Etablir l'équation horaire du mouvement de l'électron entre la cathode et l'anode.
   b)) Calculer la durée de son passage entre la cathode et l'anode. c)) En déduire la valeur de sa vitesse à l'arrivée sur l'anode.

Indication : Faire le schéma du dispositif

EXERCICE 02

1. On considère un faisceau d'électron émis à partir du filament d'un canon à électrons d'un oscilloscope.
   Ces électrons sont émis avec une vitesse initiale nulle et sont accélérés par une tension U réglable établie entre le filament et l'anode du canon à électrons.
   On règle la tension U pour que les électrons atteignent l'anode P avec une vitesse v=16000km.s^{-1}.
   Calculer la valeur correspondante de U.
2. Le faisceau d'électrons obtenu pénètre entre les plaques horizontales AA' et BB' d'un condensateur à la vitesse de 16000km.s^{-1}. La longueur des plaques vaut $l = 8cm$.
   La tension entre les armature est $U_1 = V_{A'} - V_{B'} > 0$.
   La distance entre les armatures est d.
   a)) Etablir l'équation du mouvement d'un électron entre les armatures du condensateur.
   b)) Quelle est la relation d'émergence du faisceau d'électrons ? (Relation entre v, U_1, m, l et d pour que le faisceau ne rencontre pas l'une des armatures du condensateur).
   c)) Un écran est disposé à une distance D du milieu du condensateur. Montrer que la déviation verticale du faisceau d'électron sur l'écran est proportionnelle à la tension U_1
   d)) La sensibilité verticale s = $\frac{U_1}{y}$ vaut 10V.cm^{-1}.
   Quelle doit être la distance D, sachant que d = 2cm ?

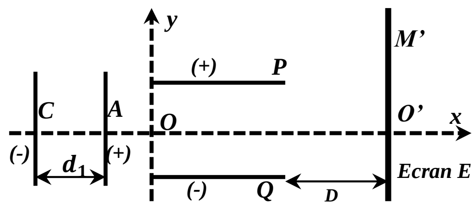


EXERCICE 03

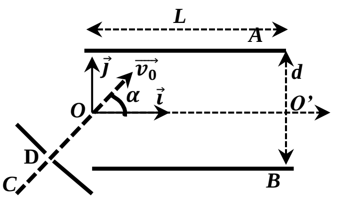
On établit entre deux plaques parallèles verticales ; anode A et cathode C une différence de potentielle U_1=800V.
Un électron animé d'une vitesse V_e=1,5.10^5m.s^{-1} aux plaques, pénètre en C. A et C sont placés à une distance d_1=4cm.
Un galvanomètre placé dans le circuit anode-cathode indique un courant d'intensité I=7mA.

1. a)) Déterminer l'équation de la trajectoire suivie par les électrons entre A et C, et préciser sa nature.
   b)) Quelle est la vitesse v_A d'un électron lorsqu'il atteint l'anode A ?
   c)) Quel est le nombre d'électron capté par l'anode en 1s.
2. Les électrons traversent l'anode A et pénètre en O entre les armatures horizontales P et Q longueur l =10cm et équidistant de 4cm.
   La tension entre les deux plaques est U_2=V_P -V_Q=100V.
   a)) Quelle est la valeur de la vitesse V_O en A.
   b)) Etablir dans le repère (Ox ; Oy) l'équation cartésienne de la trajectoire suivie par les électrons à l'intérieur du condensateur et donner sa nature.
3. On place sur l'écran fluorescent perpendiculaire à l'axe Ox à une distance $D = 50cm$ de la sortie des plaques.
   Soit M le point de réception des électrons sur l'écran E.
   a)) Calculer l'ordonnée d'un électron lorsqu'il sort des plaques au point S.
   b)) Donner l'équation et la nature de la trajectoire de ces particules au-delà de S.
   c)) Montrer que cette trajectoire passe par un point I (5;0) en cm et en déduire la valeur de la déviation verticale sur l'écran.

Données : m_e=9,1.10^{-31}kg et $q = -e = -1,6.10^{-19}$C.



EXERCICE 04



Un condensateur plan est constitué de deux plaques métalliques rectangulaires horizontales A et B de longueur L, séparées par une distance d.

Un faisceau homocinétique de protons, émis en C à vitesse nulle, est accéléré entre les points C et D, situés dans le plan (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) ; il pénètre en O, en formant l'angle α avec $\vec{\imath}$, dans le champ électrique $\vec{E}$, supposé uniforme, du condensateur.

1. Indiquer en le justifiant, le signe de $V_D - V_C$.
   Calculer en fonction de $U = |V_D - V_C|$ la vitesse v_O de pénétration dans le champ électrique uniforme.
   On donne : U=10^3V ; m_p=1,6.10^{-27}kg
2. Indiquer en le justifiant, le signe de $V_A - V_B$ tel que le faisceau de protons puis passer par le point $O'(L,0,0)$.
3. Etablir l'équation de la trajectoire des protons dans le repère (O, $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) en fonction de U, U'=$|V_A - V_B|$, α et d.
   Quelle est la nature du mouvement des protons ?
4. Calculer la valeur numérique de U' qui permet de réaliser la sortie en O' pour α=30°, L=20cm et d=7cm.
5. Dans le cas où la tension U' a la valeur précédente calculée, déterminer la distance minimale du plateau supérieur passe le faisceau de protons.

EXERCICE 05

Un dispositif de déflexion électrique est constitué par deux plaques P et P' d'un condensateur. Ces plaques ont une longueur l=8cm et son distances d=4cm. En O pénètre un faisceau homocinétique d'électron de masse m ; leur vitesse en O est $\vec{v_O}$=$v_O\vec{\imath}$ avec v_O=10^7m.s^{-1}. On applique une tension $U_{PP'}$= U>0 entre les deux plaques, vec U=500V.

1. a)) Dessiner le champ électrique $\vec{E}$ entre les deux plaques.
   b)) Exprimer la valeur du champ électrique E.
   Donner les coordonnées de $\vec{E}$ dans le repère (O, $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$, $\vec{k}$).
2. Donner à la date t, les coordonnées :
   a)) du vecteur accélération $\vec{a}$;
   b)) du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
   Déduire l'équation cartésienne de la trajectoire.
3. On s'intéresse aux caractéristiques de l'électron à la sortie du condensateur en S.
   a)) Déterminer les coordonnées du point de sortie S ; vérifier que la déviation Y_S est proportionnelle à U.
   b)) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v_S}$ en S, l'angle α que fait ce vecteur vitesse avec l'axe Ox et sa vitesse v_S en fonction de Y_S, v_O, e, m, l, E.
   c)) Calculer numériquement la durée t à l'intérieur du dispositif, ainsi que les valeurs de α, Y_S et v_S.
4. Le faisceau d'électron est reçu en I sur un écran placé perpendiculairement à l'axe Ox.
   a)) Quelle est la nature du mouvement des électrons entre S et I.
   b)) Etablir l'expression littérale donnant la distance h=IH en fonction de e, m, U, I, L, d, et v_O.
   c)) Calculer numériquement h.
   On donne : OH=L=0,3m ; e=1,6.10^{-19}C ; m_e=9,1.10^{-31}kg.
   Indication : la tangente en S à l'arc de parabole, décrit en O et S, coupe OO' en son milieu.

EXERCICE 06

1. Une bille de masse m=50g , supposée ponctuelle ,tombe en chute libre d'une hauteur h, sans vitesse initiale , sous la seule action du champ de pesanteur .
   Calculer sa vitesse après une chute de hauteur h.
2. La bille M porte une charge électrique q.
   On suppose au champ de pesanteur, un champ électrique uniforme $\vec{E}$ horizontal, de même direction et même sens que l'axe$\overrightarrow{Ox}$. (figure1)
   La bille est abandonnée sans vitesse initial en un point O de l'espace où règnent ces deux champs.
   Elle arrive en B, situé d'une hauteur h par rapport à O.
   a)) Quel est le signe de la charge porté par la bille M.
   b)) Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire de M dans le repère ($\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$) et donner sa nature.
   c)) Calculer la distance d.
3. On suppose que la bile M porte une charge q>0 et on l'abandonne ensuite sans vitesse initiale au point A milieu de deux plaques verticale distance de $d = 41cm$ et de longueur $l = h$ (fig2).
   a)) Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire M dans le repère ($\overrightarrow{Ox}$; $\overrightarrow{Oy}$).
   b)) Calculer le temps mis par la bille pour passer sur l'axe Ox.
   c)) Quelle doit être la valeur de la tension U appliquer entre les deux plaques pour que la bille arrive au point B.

Données : h=0,5m ; E=10^5v.m^{-1} ;
$|q|$=4.10^{-7}C ;$g = 9{,}8m.s^{-2}$.

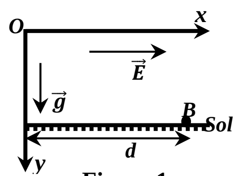


Figure 1

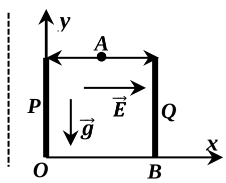


Figure 2

EXERCICE 7

On dispose de deux plaques horizontales l'une au-dessous de l'autre (la plaque positive en haut et la négative en bas).

Elles sont distantes de 5 cm et la différence de potentiel entre les deux est de 10^5 V. On place une goutte d'huile d'une masse $m = 0.1\ mg$ et portant une charge électrique de $q = -10^{-12}\ C$.

1. Déterminer l'intensité du champ électrique E qui est entre les deux plaques et en déduire l'intensité de la force électrique, F, que subit la goutte d'huile.
2. Faire un schéma de l'ensemble et représenter le champ $\vec{E}$ ainsi que les forces qui agissent sur la goutte d'huile.
3. D'après le bilan des forces, quel est le mouvement de la goutte ?

EXERCICE 8 **(Problème)**

Le mouvement dans l'air d'une goutte d'huile obtenue par pulvérisation et introduite entre les plaques horizontales ,équidistant de d, d'un condensateur plan auxquelles on peut appliquer une différence de potentielle réglable $V_B - V_A = U_0 > 0$ donnant un champ électrique uniforme $\vec{E}$. La pulvérisation a pour effet de charger plus ou moins les gouttes par frottement.

On appelle ρ la masse volumique de l'huile.

On observe le mouvement d'une goutte d'abord en absence de champ électrique puis en présence du champ électrique.

On constante qu'en absence du champ électrique, la goutte tombe verticalement et atteint très rapidement une vitesse constante v_1.

En présence du champ électrique, la goutte prend une vitesse v_2 constante de valeur supérieure à v_1, son mouvement reste verticale et ascendant. L'action de l'air sur la goutte la goutte est assimilée à une force unique $\vec{f}$ de même direction que le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la goutte et de sens opposé, telle que $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$, avec η coefficient de viscosité de l'air et r le rayon de la goutte.

On néglige la poussée d'Archimède.

I. Etude préliminaire

1. Lors des mesures, la goutte admet un mouvement vertical de vecteur vitesse $\vec{v}$ constante.

Que peut-on dire de l'ensemble des forces qu'elle subit ? Justifier.

2. Exprimer la masse de gouttelette supposée sphérique en fonction de ρ *et* r. En déduire l'expression de son poids.

II. Etude en l'absence du champ électrique

1. Dresser le bilan des forces subies par la goutte.
2. Sur un schéma soigné et légendé placer ces forces.
3. Etablir l'expression du rayon r en fonction de v_1 et des données utiles.

III. Etude en présence du champ électrique

1. Sur un schéma soigné et légendé, placer le champ électrique et les forces subies par la goutte. (On justifiera le sens de la force électrique et le sens du champ électrique).
2. En déduire le sens de la charge électrique q porté par la goutte.
3. Etablir l'expression de la charge électrique q en fonction de r, v_1, v_2 et des données utiles.

EXERCICE 9

Entre deux armatures, séparées d'une distance $d = 12cm$,d'un condensateur plan et horizontal est établie une atmosphère gazeuse par pulvérisation de gouttelette d'huile de rayon r.

L'atmosphère gazeuse se traduit par une constante de viscosité η.

A l'instant t=0, la vitesse est supposée nulle.

Le mouvement est supposé rectiligne et vertical.

1. Calculer la vitesse limite atteinte par la gouttelette à 0,01près, en absence du champ électrique.
2. En appliquant un champ électrique $\vec{E}$, vertical et dirigé vers le bas, avec un e d.d.p U une gouttelette s'immobilise ;
   Calculer la charge électrique q porté par cette gouttelette.
3. Sous l'action d'un faisceau de R_X , la gouttelette remonte d'une distance $l = 1mm$ en un temps $t = 5{,}8s$.
   Donner la nouvelle charge électrique de la gouttelette.

Données : $r = 1{,}6.10^{-6}m$; $\eta = 1{,}8.10^{-5}Pa.s$;
$\rho_{huile} = 880g.cm^{-3}$; $U = 3950V$; $g = 9{,}81m.s^{-2}$

EXERCICE 10

On dispose deux plaques métalliques verticalement, l'une en face de l'autre. Elles sont reliées à un générateur de manière à ce que le champ électrique entre les deux plaques ait une valeur de $E = 2.10^5 V/m$. Les deux plaques sont distantes de d= 20 cm.

Au bout d'un fil, une petite sphère de masse $m = 0.40\ g$ pend entre les deux plaques. Cette sphère est chargée électriquement, et le fil est incliné d'un angle de $\alpha = 20°$ par rapport à la verticale lorsqu'il est soumis au champ entre les deux plaques.

Le fil est incliné vers la plaque chargée négativement.

1. Déterminer la tension électrique aux bornes des deux plaques métalliques.
2. Déterminer le signe de la charge de la sphère.
3. Déterminer l'intensité du poids, P, de la sphère.
4. La sphère étant en équilibre, représenter sur un schéma l'ensemble des forces qui agissent sur la sphère et en déduire la condition d'équilibre.
5. D'après le schéma, la condition ci-dessus et les projections sur les axes Ox et Oy déduire la valeur de T (la tension du fil) puis celle de F l'intensité de la force électrique.
6. En déduire la charge électrique portée par la sphère.

Champ Magnétique

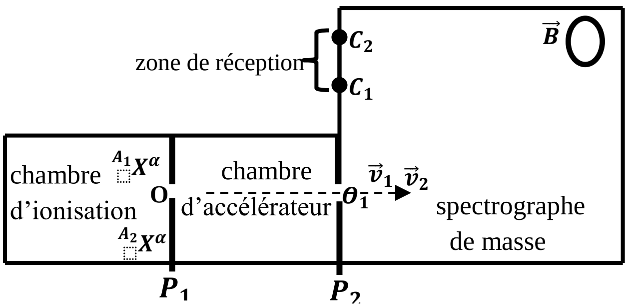
Rappels sur le champ Magnétique

I. Etude d'un Spectrographe de masse

Le rôle de l'appareil est de séparer les différents isotopes d'un même élément. Il faut d'abord ioniser les atomes dans une chambre.

Les ions sont alors accélérés par un champ électrique puis déviés par un champ magnétique. Cette déviation est différente suivant l'isotope, ce qui permet de les séparer. Après séparation, les particules sont collectées. Un comptage électronique des impacts permet d'en déduire les proportions relatives de chaque isotope dans un échantillon donné.

Rappel :



- La masse d'un ion $^{A}X^{\alpha}$ est :

$$m\left({}^{A}X^{\alpha}\right) = Au \quad avec \quad u = 1{,}67.10^{-27}kg$$

- La charge d'un ion $^{A}X^{\alpha}$ *est :* $q = \alpha e \quad avec \quad e = 1{,}6.10^{-19}C$

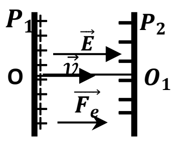
on se propose de séparer les ions $^{A_1}X^{\alpha}$ *et* $^{A_2}X^{\alpha}$ de même charge q et de masses respectives m_1 et m_2. En O, la vitesse des ions est pratiquement nulle ; ils sont accélérés par la tension $U=V_{P1}-V_{P2}$ appliquée entre les plaques P_1 et P_2. Ils pénètrent ensuite en O_1, dans un champ magnétique uniforme B perpendiculaire au plan de la figure.

1. Préciser le sens de $\vec{E}$ et la force électrique $\vec{F_e}$.

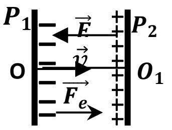
Déduire le signe de la tension $U= V_{P1}-V_{P2}$

Comme les plaques sont parallèles, alors :

- *si* $q = \alpha e > 0 \Rightarrow \vec{E}$ *et* $\vec{v}$ *ont même sens donc :* $U = V_{P_1} - V_{P_2} > 0$



- *si* $q = \alpha e < 0 \Rightarrow \vec{E}$ *et* $\vec{v}$ *ont sens opposé :* $U = V_{P_1} - V_{P_2} < 0$



2. Montrer que les ions arrivant en O_1 ont même énergie cinétique.

En déduire qu' à la sortie de l'accélérateur $m_1{v_1}^2 = m_2{v_2}^2$

Les ions sont soumis à la force électrostatique $\vec{F_e} = q\vec{E}$.

T.E.C : entre O et O_1

$$E_C(O_1) = |q|U = |\alpha|eU = cste$$

$\Rightarrow E_{C1} = E_{C2} = E_C(O_1) = |\alpha|eU = cste$, alors les ions arrivent en O_1 avec une même énergie cinétique ($E_C = |\alpha|eU = cste$).

$$On\ a : E_{C1} = E_{C2} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 \Rightarrow m_1{v_1}^2 = m_2{v_2}^2$$

3. Exprimer les vitesses v_1 et v_2 des deux ions en O_2 en fonction de U, q et de leurs masses m_1 et m_2

T.E.C : entre O et O_1

$E_C(O_1) = |q|U = cste \Rightarrow E_{C1} = E_{C2} = E_C(O_1) = |q|U = cste$

$Alors : E_{C1} = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = |q|U \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m_1}} \quad et\ v_2 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m_2}}$

En déduire que $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$

$${v_1}^2 = \frac{2|q|U}{m_1} \quad et \quad {v_2}^2 = \frac{2|q|U}{m_2} \Rightarrow \frac{{v_1}^2}{{v_2}^2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

4. Préciser sur un schéma le sens de $\vec{B}$ pour que les ions puissent parvenir en C_1 et C_2.

La particule de masse m est soumise à la force magnétique

$\vec{F_m} = q\vec{v_0}\Lambda\vec{B}$ (elle est toujours orientée vers la zone de réception)

Le sens de $\vec{B}$ est déeterminé par la règle de 3doigts de la main droite tel que le trièdre $\left(\vec{F_m},\ q\vec{v},\ \vec{B}\right)$ soit direct.

- Si q>0, en utilisant la règle de 3doigts de la main droite le vecteur $\vec{B}$ es entrant (figure a).
- Si q<0, en utilisant la règle de 3doigts de la main droite le vecteur $\vec{B}$ es sortant (figure b).

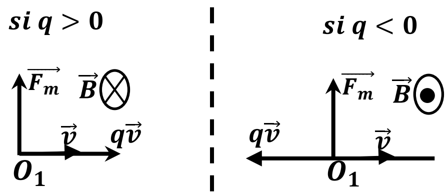
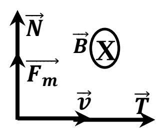


figure a *figure b*

5. Démontrer que les ions sont animés d'un mouvement circulaire uniforme des rayons respectifs R_1 et R_2

Les particules sont soumises à la force magnétique $\vec{F_m} = q\vec{v}\Lambda\vec{B}$

Ici on suppose $q > 0$:



$\text{T.C.I: } \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$

Dans la base de Frenet $(\vec{T},\vec{N})$

$\vec{F_m} = |q|vB\vec{N}$ et $\vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N}$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte$$

$v = cte \Rightarrow$ le mouvement est uniforme

Par identification : $\frac{v^2}{R} = \frac{|q|vB}{m} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B} = cte$

alors le mouvement est circulaire.

D'où le mouvement des particules est circulaire uniforme des rayons :

$$R_1 = \frac{m_1v_1}{|q|B} \quad et \quad R_2 = \frac{m_2v_2}{|q|B}$$

6. Expression de R_1 et R_2 en fonction de m_1 ou m_2, q, U, B

$$R_1^{\,2}=\frac{m_1^{\,2}v_1^{\,2}}{|q|^2B^2}=\frac{m_1^{\,2}}{|q|^2B^2}\times\frac{2|q|U}{m_1}=\frac{2m_1U}{|q|B^2}\ \Rightarrow R_1=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{|q|}}$$

$$et\ R_2=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U}{|q|}}\quad \text{on en déduit encore que}\quad \frac{R_1}{R_2}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

7. Calcul de la distance MP

$$C_1C_2=O_1C_2-O_1C_1=2R_2-2R_1=2(R_2-R_1)\ \Rightarrow$$

$$C_1C_2=2\left(\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U}{|q|}}-\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{|q|}}\right)=\frac{2}{B}\sqrt{\frac{2U}{|q|}}\left(\sqrt{m_2}-\sqrt{m_1}\right)$$

$$C_1C_2=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{8U}{|q|}}\left(\sqrt{m_2}-\sqrt{m_1}\right)$$

8. Temps mis par chaque ions pour atteindre leurs points d'impact

$T=\frac{\theta}{\omega}$, avec $\theta=\pi\,\text{rad}$ (pour une demi-circonférence)

$$R_1=\frac{m_1v_1}{|q|B}\quad et\ v_1=R_1\omega_1=\frac{m_1v_1}{|q|B}\omega_1\ \Rightarrow \omega_1=\frac{|q|B}{m_1}$$

$$T_1=\frac{\pi}{\omega_1}=\frac{\pi m_1}{|q|B}\quad et\ T_2=\frac{\pi m_2}{|q|B}$$

9. Composition isotopique

La composition isotopique représente le pourcentage de ceux deux isotopes dans l'atome naturel et les pourcentage n_1 et n_2 sont proportionnelle à leurs intensités du courant ionique i_1 et i_2.

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{i_1}{i_2}\quad ou\ bien\quad n_1=\frac{i_1}{i_1+i_2}\times 100\quad et\quad n_2=\frac{i_2}{i_1+i_2}\times 100$$

Remarque : $n_1+n_2=1$

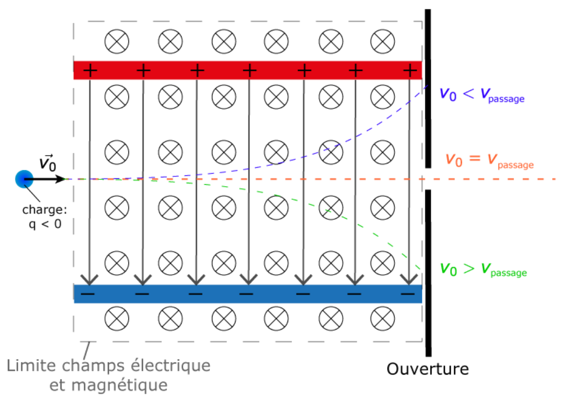
La masse molaire de l'atome naturel est :

$$M(X)=\frac{n_1A_1+n_2A_2}{100}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{n}n_iA_i$$

II. Etude d'un Filtre de vitesse

Sélecteur de vitesse (Filtre de Wien)

L'utilisation d'un filtre de Wien est un moyen facile de sélectionner des particules chargées à une vitesse spécifique.



Configuration:

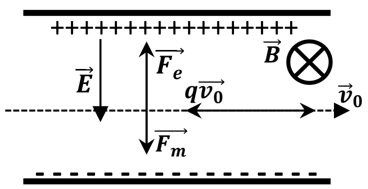
Le sélecteur de vitesse est un dispositif constitué par des champs électriques et magnétiques perpendiculaires. Un condensateur à plaques produisant un champ électrique, est placé dans un champ magnétique. Au bout de la plaque de condensateur se trouve une ouverture qui laisse passer les particules se trouvant au milieu du condensateur.

Le faisceau de particules entre dans le filtre de vitesse de telle sorte que la direction du mouvement des particules, le champ électrique et le champ magnétique sont deux à deux perpendiculaires..

Fonction:

En entrant dans le filtre de Wien les champ électrique et magnétique engendrent deux forces différentes (poids négligé).

- Le champ E engendre une force électrique $\vec{F}_e=q\vec{E}$
- Le mouvement de charge dans un champ magnétique engendre une force de Lorentz $\vec{F}_m=q\vec{v}\wedge\vec{B}$ et $F_m=|q|vB$



Seules les particules dans lesquelles la force électrique F_e et la force de Lorentz F_m sont égales et de sens contraire, ne sont pas déviées dans le filtre. Pour ces particules on a:

$$\vec{F}_m+\vec{F}_e=\vec{0}\ \Rightarrow\ F_m=F_e\Rightarrow\ |q|v_0B=|q|E\ \Rightarrow v_0=\frac{E}{B}$$

La vitesse des particules devant passer le filtre de Wien estt :

$$v_{passage}=v_0=\frac{E}{B}$$

Remarque

- Si les particules ont une vitesse $v_1<v_0$, la force électrique F_e est plus grande que la force magnétique F_m. En effet :

$$F_m=|q|v_1B<|q|v_0B=|q|E=F_e\Longrightarrow F_m<F_e$$

Alors les particules seront déviées vers la plaque sur laquelle la force électrique $\vec{F}_e$ est orientée.

- Si les particules ont une vitesse $v_1>v_0$, la force de Lorentz F_m est plus grande que la force électrique F_e. En effet :

$$F_m=|q|v_1B>|q|v_0B=|q|E=F_e\Longrightarrow F_m>F_e$$

Alors les particules seront déviées vers la plaque sur laquelle la force magnétique $\vec{F}_m$ est orientée

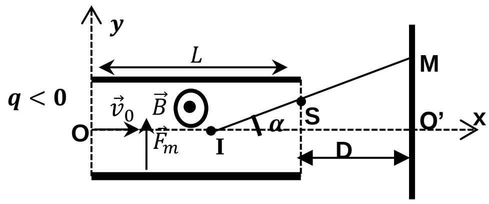
Limites:

Ni la masse des particules, ni leur charge des sont importantes pour ce filtre de vitesse. Toutes les particules à vitesse v_0 passent le filtre de Wien quel que soit leur masse et leur charge.

Aussi toutes les particules non chargées passent le filtre, quel que soit leur vitesse.

III. Déflexion magnétique

Considérons les particules de masse m et de charge < 0 , animées d'une vitesse horizontale v_0.



1. Equation de la trajectoire

Conditions initiales : à t=0,

$$\vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{vmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}$$

La particule d'hélium est soumis à la force $\vec{F_m} = q\vec{v}_0\Lambda\vec{B}$

T.C.I : $\vec{F_m} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F_m}$ et $F_m = |q|v_0B$

$$\vec{F_m}\begin{vmatrix} F_{mx} = 0 \\ F_{my} = F_m \end{vmatrix} \;;\; \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{|q|Bv_0}{m} \end{vmatrix} \;;\; \vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0 \\ v_y = \dfrac{|q|Bv_0}{m}t \end{vmatrix} \quad et$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_0 t \\ y = \dfrac{qBv_0}{2m}t^2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow y = \frac{|q|B}{2mv_0}x^2$$

2. Coordonnées du point de sorti S

$$S\begin{vmatrix} x_S = L \\ y_S = \dfrac{|q|B}{2mv_0}L^2 \end{vmatrix}$$

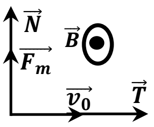
3. Vitesse au point de sortie S

$$\vec{v_S}\begin{vmatrix} v_{sx} = v_0 \\ v_{sy} = -\dfrac{|q|Bv_0}{m}t_S \end{vmatrix} \quad \text{où} \quad x_S = v_0t_S = L \Longrightarrow t_S = \frac{L}{v_0}$$

$$\vec{v_S}\begin{vmatrix} v_{sx} = v_0 \\ v_{sy} = -\dfrac{|q|BL}{m} \end{vmatrix} \;\Rightarrow\; v_S = \sqrt{{v_0}^2 + \left(\frac{qBL}{m}\right)^2}$$

4. Montrons que le mouvement dans le champ magnétique $\vec{B}$ est circulaire uniforme

T. C. I: $\vec{F_m} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{a} = \dfrac{\vec{F_m}}{m}$



Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$

$\vec{F_m} = |q|v_0B\vec{N}$ et $\vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N}$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{{v_0}^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N}$$

$\Rightarrow a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \;\Rightarrow$ v = cte : le mouvement est uniforme

Par identification :

$\frac{{v_0}^2}{R} = \frac{|q|B}{m} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B} = cte$ alors le mouvement est circulaire.

D'où le mouvement des particules est circulaire uniforme de rayon : $R = \frac{mv_0}{|q|B}$

5. *Valeur de l'angle* α

$$\tan\alpha = \frac{y_S}{L/2} = \frac{2y_S}{L} = \frac{2}{L}\times\frac{|q|B}{2mv_0}L^2 = \frac{|q|B}{mv_0}L$$

6. Equation de la trajectoire au delà de S

Au-delà de S, les particules suivent une droite

$(T) : y = ax + b$

$$\text{où } a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L} \quad avec \quad y = \frac{|q|B}{2mv_0}x^2 \;\Rightarrow a = \frac{|q|B}{mv_0}L$$

$$Or \;\; S\epsilon\,(T) \Rightarrow y_S = \frac{|q|B}{mv_0}L\,x_S + b \;\Rightarrow b = y_S + \frac{|q|B}{mv_0}L^2$$

Entre S et M, le mouvement des particules est rectiligne uniforme car au-delà de S, le champ $\vec{B} = \vec{0}$.

7. Valeur de la déflexion magnétique y_M

$$\tan\alpha = \frac{y_M}{IO'} \;\Rightarrow\; y_M = IO'\tan\alpha$$

$$Avec \;\; \tan\alpha = \frac{|q|B}{mv_0}L\,, \qquad IO' = \frac{L}{2} + \mathrm{D} \quad \text{et } R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

$$y_M = \frac{|q|B}{mv_0}L\left(\frac{L}{2} + D\right) = \frac{L}{R}\left(\frac{L}{2} + D\right)$$

III. Etude d'un cyclotron

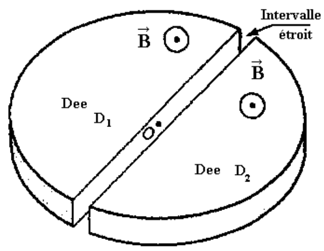
Un cyclotron sert à accélérer des particules chargées, des protons par exemple. Ces particules permettent de réaliser des expériences de Physique nucléaire dans le but d'explorer le noyau atomique.

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 *et* D_2 dénommés "dées" et séparés par un intervalle étroit.

Un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ règne à l'intérieur des "dées", sa direction est parallèle à l'axe de ces demi-cylindres.

Un champ électrostatique $\vec{E}$ variable peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les dées.

Il permet d'augmenter la vitesse des protons à chaque fois quels pénètrent dans cet intervalle. On l'obtient en établissant une tension alternative sinusoïdale de valeur maximale U_m et de fréquence N entre les "dées".



1. Nature de mouvement des particules entre les Dee

Dans l'intervalle étroite, il existe une un champ électrique uniforme E constant pendant la durée courte de la traversée.

La particule est soumise à la force électrique $\vec{F} = q\vec{E} = Cste$

T.C.I : $\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \Longrightarrow a = \frac{q\vec{E}}{m} = cste$

La vitesse initiale étant nulle, alors la particule est animée d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

2. Comment montrer que le mouvement des particules dans un D est circulaire uniforme.

La particule est soumis à la force $\overrightarrow{F_m} = q\vec{v}\Lambda\vec{B}$

La force $\overrightarrow{F_m}$ est centrale donc $\overrightarrow{F_m} = |q|vB\vec{N}$

T.C.I : $\overrightarrow{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N}$

Donc l'accélération de la particule est donc centrale :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N} + \frac{dv}{dt}\vec{T} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = ste$$

D'où le mouvement est uniforme.

Expression du Rayon R

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{|q|vB}{m} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B} = cste$$

Le mouvement est donc circulaire uniforme sur un trajectoire de rayon R tel que : $R = \frac{mv}{|q|B}$

3. La durée du parcours d'un particule dans un dee

La durée du parcours dans un dee vaut une demi-période de rotation T dans le champ magnétique $\vec{B}$; cette rotation s'effectue à vitesse constante v le long d'une trajectoire circulaire de rayon R

$$v = \frac{Longueur\ du\ trajectoire}{Durée\ de\ rotation} = \frac{2\pi R}{T}\ soit\ T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$or\ R = \frac{mv}{|q|B} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{v}.\frac{mv}{|q|B} = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

D'où de passage dans un dee est :

$$t_P = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{|q|B}$$

Ce temps ne dépend pas de la vitesse *v* acquise par la particule et ceci permettra la synchronisation des accélérations successives.

Fréquence du générateur

La fréquence d'oscillation de cette tension *u* (*t*) permettant d'obtenir une accélération de la particule à chaque passage dans l'intervalle entre les deux « D ».

À chaque intervalle de temps t_P, le champ électrique doit être inversé et cela doit donc correspondre à une demi-période d'oscillation :

$$t_P = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} \Rightarrow f = \frac{1}{2t_P} = \frac{|q|B}{2\pi m}$$

4. Un ion est injecté dans la zone d'accélération avec une vitesse nulle. Quelle est sa vitesse v_1 au moment de la pénétration dans le premier « D » :

$$T.E.C : \frac{1}{2}m{v_1}^2 = |q|U\ \ soit\ \ v_1 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$$

Le rayon de la première trajectoire semi-circulaire est donc :

$$R_1 = \frac{mv_1}{|q|B} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{|q|}}$$

5. Expression de R_n de la $n^{ième}$ trajectoire demi-circulaire en fonction de R_1

T.E.C : entre D_1 et D_2

- Pour le 2ème passage la particule traverse avec une vitesse v_2

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = |q|U\ \ soit\ {v_2}^2 - {v_1}^2 = \frac{2|q|U}{m}$$

$$Or\ \ {v_1}^2 = \frac{2|q|U}{m} \Rightarrow {v_2}^2 - {v_1}^2 = {v_1}^2 \Rightarrow {v_2}^2 = 2{v_1}^2$$

- Pour le 3ème passage la particule traverse avec une vitesse v_3

$$\frac{1}{2}m{v_3}^2 - \frac{1}{2}m{v_2}^2 = |q|U\ \ soit\ {v_3}^2 - {v_2}^2 = \frac{2|q|U}{m}$$

$${v_2}^2 = 2{v_1}^2 \Rightarrow {v_3}^2 - 2{v_1}^2 = {v_1}^2 \Rightarrow {v_3}^2 = 3{v_1}^2$$

- Pour le 4ème passage la particule traverse avec une vitesse v_4

$$\frac{1}{2}m{v_4}^2 - \frac{1}{2}m{v_3}^2 = |q|U\ \ soit\ {v_4}^2 - {v_3}^2 = \frac{2|q|U}{m}$$

$$Or\ \ {v_3}^2 = 3{v_1}^2 \Rightarrow {v_4}^2 - 3{v_1}^2 = {v_1}^2 \Rightarrow {v_4}^2 = 4{v_1}^2$$

- Pour le nème passage la particule traverse avec une vitesse v_n

$${v_n}^2 = n{v_1}^2 \Rightarrow v_n = v_1\sqrt{n}$$

À chaque demi-tour, l'énergie cinétique est incrémentée de $|q|U$:

$$E_{C(n)} = \frac{1}{2}m{v_n}^2 = \frac{1}{2}m{v_1}^2 \times n = n|q|U \Rightarrow \frac{1}{2}m{v_n}^2 = n|q|U$$

Expression de R_n

$$R_n = \frac{mv_n}{|q|B} = \frac{mv_1}{|q|B}\sqrt{n} = R_1\sqrt{n} \Rightarrow R_n = R_1\sqrt{n}\ \ et\ n = \left(\frac{R_n}{R_1}\right)^2$$

Nombre de tours effectués par la particule

Comme il y a deux passages par tours le nombre de tours est :

$$n' = \frac{n}{2} = \frac{1}{2}.\left(\frac{R_n}{R_1}\right)^2 \quad où\ n' = nombre\ de\ tour\ éffectués$$

Exercices sur le champ magnétique uniforme

Données : $e = 1{,}6 \times 10^{-19} C$ et $u = 1{,}67 \times 10^{-27} kg$

EXERCICE 01

1. Une chambre d'ionisation produit des ions $^{20}Ne^{+}$ et $^{22}Ne^{+}$ de masses respectives $m_1$et m_2. Leur poids est négligeable devant les forces électromagnétiques qu'ils subissent et leur mouvement a lieu dans le vide. Les ion s produits pénètrent, avec une vitesse initiale négligeable, dans un accélérateur où ils sont soumis à un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E_O}$ créé par une tension U=$V_M - V_N$ établie entre deux plaques conductrices M et N selon le schéma ci-après. On désigne par v_1 et v_2 les vitesses respectifs, en O_1, des ions $^{20}Ne^{+}$ et $^{22}Ne^{+}$.

a)) Représenter sur un schéma le vecteur champ électrique $\overrightarrow{E_O}$ et déterminer le signe de U_O.

b)) Exprimer v_1, la- vitesse de l'isotope $^{20}Ne^{+}$ en O_1, sortie de l'accélérateur, en fonction de U_O, e, et m_1.

Calculer sa valeur pour U_O=2.10⁴V.

c)) Montrer que qu'en O_1 : $m_1{v_1}^2 = m_2{v_2}^2$.

En déduire la valeur de v_2.

2. Arrivée en O_1, les ions entrent dans un sélecteur de vitesse limité par les plaques P et Q. Dans cette région, ils sont soumis à l'action simultanée de deux champs : champ électrique uniforme $\vec{E}$ créé par une tension positive U=$V_Q - V_P$ et un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ *perpendiculaire* aux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ et au vecteur champ électrique $\vec{E}$.

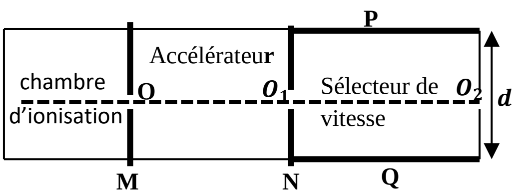
a)) Représenter $\vec{E}$ et $\vec{B}$, sur un schéma, pour que la force électrique $\overrightarrow{F_e}$ et la force magnétique $\overrightarrow{F_m}$ soient opposées.

On règle U de façon que le mouvement des ions $^{20}Ne^{+}$ soit rectiligne uniforme de la trajectoire O_1O_2.

b)) Représenter sur un autre schéma les forces agissant sur un ion $^{20}Ne^{+}$ ainsi que le vecteur $\overrightarrow{v_1}$.

c)) Exprimer U, en fonction de v_1, d (distance entre les plaques P et Q) et de B. Calculer U pour B=0,1T et d=5cm.

d)) Dans quelle direction seront déviés les ions $^{22}Ne^{+}$?



EXERCICE 02

Une chambre d'ionisation produit des ions potassium $^{39}K^{+}$; $^{40}K^{+}$ et $^{41}K^{+}$, de masses respectives m_1, m_2 *et* m_3.

On néglige les forces de pesanteur. Ils pénètrent en S sans vitesse initiale, dans un accélérateur linéaire où ils sont soumis à l'action d'un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E_O}$ créé par une différence de potentiel $U_O = V_A - V_B$. On désigne par $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ les vecteurs vitesses en O des ions $^{39}K^{+}$; $^{40}K^{+}$ et $^{41}K^{+}$ respectivement.

1. Représenter sur un schéma le vecteur champ électrique $\overrightarrow{E_O}$ et en déduire le signe de U_O.

2. a)) Montrer que les ions arrivant en O ont même énergie cinétique

b)) En déduire qu'en O, à la sortie de l'accélérateur, on a : $m_1{v_1}^2 = m_2{v_2}^2 = m_3{v_3}^2$.

c)) Calculer la vitesse v_3 des ions $^{40}K^{+}$.

<u>On donne</u> : $m_3 = 66{,}4.10^{-27} kg$ et U_O=5.10⁴V.

3. Arrivée en O, les isotopes pénètrent entre les plaques Q et P distantes de longueur l, entre lesquelles règne un champ électrique $\vec{E}$ créé par une différence de potentiel U=$V_P - V_Q$>0.

a)) Déterminer l'équation de la trajectoire entre les plaques P et Q pour chaque isotope en fonction de E, e $m_1,\ m_2$ *ou* $m_3,\ v_1, v_2$ *ou* v_3 . Conclure.

b)) Calculer la déviation angulaire de l'isotope^{40}K à la sortie des plaques. On donne : $d = 5cm$; $l = 2cm$; $U = 1000V$.

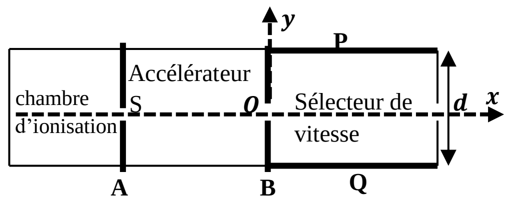
4. On superpose au champ électrique $\vec{E}$ précédemment, un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au vecteurs vitesses $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ et au champ électrique $\vec{E}$.

a)) Quelle doit être l'orientation du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ pour que les forces électrique et magnétique appliquées à un ion soient de sens contraires.

b)) On ajuste la valeur du champ magnétique $\vec{B}$ pour que le mouvement de l'isotope ^{40}K soit rectiligne uniforme.

Déterminer alors la valeur du champ magnétique B.

c)) Comment seront déviés les ions $^{39}K^{+}$ et $^{41}K^{+}$.



EXERCICE 03

Une chambre d'ionisation produit des ions d'hélium $^{3}_{2}He^{+}, ^{4}_{2}He^{+}$, $^{6}_{2}He^{+}$de masses respectives m_1, m_2, m_3. Leur poids est négligeable devant les forces électromagnétiques qu'ils subissent.

Ils pénètrent en S sans vitesse initiale dans un accélérateur linéaire où ils sont soumis à l'action d'un champ électrique uniforme $\vec{E}_0$ créé par une différence de potentiel $U_0 = V_M - V_N$.

On désignera par $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ les vecteurs vitesse en O des ions $^{3}_{2}He^{+}, ^{4}_{2}He^{+}, ^{6}_{2}He^{+}$.

On notera e la charge électrique élémentaire.

1. a)) Déterminer le signe de U_0 et représenter le champ électrique $\vec{E}_0$ dans l'accélérateur.

b)) Exprimer l'accélération d'un ion ${}_{2}^{4}He^{+}$en fonction de U_0, d_o, e et m_2 ; préciser la nature de son mouvement.

2. Montrer qu'en O, à la sortie de l'accélérateur,

$$m_1 {v_1}^2 = m_2 {v_2}^2 = m_3 {v_3}^2$$

3. Les ions pénètrent ensuite dans un sélecteur de vitesse limité par les plaques P et Q. Ils sont alors soumis à l'action simultanée de deux champs: un champ électrique uniforme $\vec{E}$, créé par une différence de potentiel positive U = V_Q - V_p , et un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{E}$.

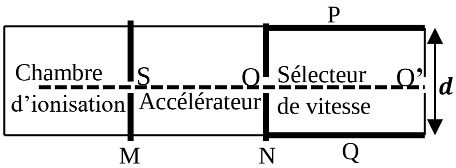
a)) Représenter le champ magnétique $\vec{E}$ pour que la force électrique et la force magnétique aient même direction, mais des sens contraires.

b)) On règle la valeur de U de façon que le mouvement des ions ${}_{2}^{4}He^{+}$ soit rectiligne uniforme de trajectoire OO'.

Exprimer U en fonction de B, v_2 et d.

4. Comment seront déviés les ions ${}_{2}^{3}He^{+}$, ${}_{2}^{6}He^{+}$?

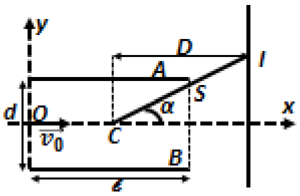
On se contentera de donner l'allure des trajectoires sans préciser leur nature et sans faire de calcul.



EXERCICE 04

I. Deux plaques métalliques rectangulaire et horizontales A et B, de longueur l et distantes de d, sont soumises à un différence de potentiel positive U=$V_A - V_B = 100V$.

On donne : d=4cm ; l=10cm.



1. Représenter le vecteur champ $\vec{E}$ à l'intérieur des plaques et calculer sa norme E.

2. Un électron pénètre dans le champ électrostatique au point O avec une vitesse initiale v_o parallèle aux plaques.

a)) En négligeant le poids de l'électron devant la force électrostatique, établir l'équation de cartésienne de la trajectoire de cet électron. En déduire les coordonnées du point S et la vitesse v_s de la particule à la sortie en S.

b)) Montrer que le mouvement de la particule au-delà de S est rectiligne uniforme et en déduire l'équation de la trajectoire la caractérisant.

On donne : $m_e = 9{,}1.10^{-31}kg$; $v_o = 10^7 m.s^{-1}$.

3. On place un écran à la distance D =50cm du centre des plaques, perpendiculaire à Ox.

a)) Calculer la valeur de l'angle α en degré.

b)) Déterminer les coordonnées du point d'impact I.

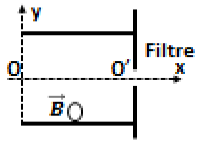
c)) Calculer la durée totale mise par la particule de O à I.

II. On superpose au champ électrostatique précédent, un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au plan xOy, et on place à la distance I du point O un filtre qui ne laisse passer les particules que par le trou O' situé sur l'axe Ox

1. Quelle doit être l'orientation du vecteur champ $\vec{B}$ pour que les forces électromagnétiques se décomposent exactement.

2. Quelle condition doit remplir un électron pour traverser le filtre ?

Qu'arrive-t-il aux électrons qui ne remplissent pas cette condition ?



3. Proposer un nom pour ce dispositif.

On donne : $B = 3{,}33.10^{-4}T$.

EXERCICE 05

1. Un faisceau d'électrons, émis d'une cathode par l'effet thermoélectrique est accéléré au moyen d'une anode OA. La différence de potentiel entre l'anode et la cathode vaut U_O=285V. En admettant que les électrons sont émis par la cathode avec une vitesse négligeable, calculer

la vitesse v_o des électrons lorsqu'ils traversent le trou A.

2. Le faisceau d'électrons pénètre ensuite dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B}$, dans laquelle il décrit un quart de cercle de rayon R=20cm.

a)) Préciser sur un schéma le sens du champ magnétique $\vec{B}$ pour que le faisceau puisse parvenir en C.

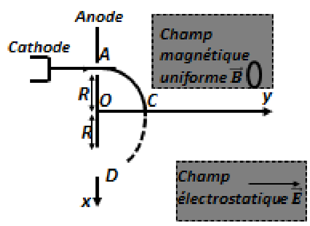
Montrer que les trajectoires des particules sont planes.

b)) Montrer que le mouvement de ces particules est circulaire.

c)) Calculer littéralement (en fonction de U_O et de R) puis numériquement, la norme B du champ magnétique.

b)) Caractériser le vecteur vitesse $\vec{v}$ des électrons (direction et norme) à la du trou C.

3. Le faisceau d'électron est enfin dévié par un champ électrique uniforme $\vec{E}$ parallèle à l'axe (Oy) régnant dans le dièdre xOy.



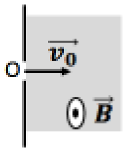
a)) Etablir les équations horaires du mouvement projeté sur les axes (Ox) et (Oy).

c)) En déduire l'équation et la nature de la trajectoire.

d)) Calculer la valeur à donner à la norme E du champ électrique pour que le faisceau d'électrons traverse le trou D à une distance R du point O, on exprimera E en fonction de E_O et de R.

EXERCICE 06

On se propose de mesurer la charge massique e/m de l'électron, c'est-à-dire le rapport de la valeur absolue de sa charge à sa masse. On néglige le poids de l'électron devant les autres forces.



On envoie un pinceau d'électron dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Tous les électrons du pinceau entent dans un champ magnétique en même point O avec la même vitesse $\vec{v_0}$ perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{B}$.

1. Démontrer que chaque électron du pinceau prend, dans le champ magnétique un mouvement circulaire uniforme (de rayon R à préciser) dans un plan que l'on précisera.
2. On superpose au champ magnétique uniforme $\vec{B}$ un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ perpendiculaire à la fois à $\vec{v_0}$ et à $\vec{B}$ de telle sorte que le mouvement des électrons soit rectiligne.

a)) Démontrer que le mouvement rectiligne des électrons est nécessairement uniforme.

b)) Préciser le sens de $\vec{E}$, le sens de $\vec{B}$ étant celui indiqué sur la figure. Trouver une relation entre v_0, E et B.

3. a)) Exprimer e/m en fonction de E, R et B.

Evoluer numériquement e/m.

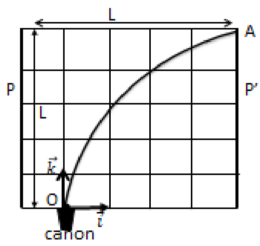
b)) En déduire la masse m de l'électron.

Données $B = 10^{-3}T$; $E = 2{,}65.10^4 V.m^{-1}$;

$on\ mesure\ R = 15cm\ et\ e = 1{,}6.10^{-19}C.$

EXERCICE 07

Dans tout l'exercice, le poids des électrons est négligeable devant les autres forces mises en jeu. Dans un tube où règne le vide, on dispose un canon émettant en un point O un pinceau homocinétique d'électrons de vitesse $\vec{v_o} = v_o\vec{k}$. Pour visualiser la trajectoire des particules, un écran fluorescent est placé dans le plan orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



1. Entre deux plaques P et P', de longueur L, parallèle au plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$, on crée un champ électriqu9e uniforme $\vec{E}$ tel que la trajectoire des électrons, donnée en vraie grandeur passe exactement par le point A(L, 0, L).

a)) Préciser la direction et le sens du champ électrique.

b)) En prenant pour origine des dates celle de l'émission d'un électron en O, établir les équations paramétriques du mouvement entre O et A. En déduire l'équation de la trajectoire.

c)) Montrer que la charge massique de l'électron e/m est donnée par la relation : $e/m = 2{v_o}^2/EL$.

2. Dans une deuxième expérience, on remplace le champ électrique par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ tel que la trajectoire des électrons émis à la vitesse $\vec{v_0}$ soit un quart de cercle dans le plan de l'écran.

a)) Préciser la direction et le sens de $\vec{B}$.

Montrer que la valeur de la vitesse est constante.

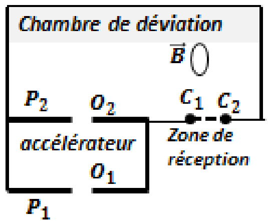
b)) Etablir la relation : $e/m = v_o/BL$.

c)) A l'aide des deux expériences précédentes, déterminer la vitesse d'émission v_o ainsi que la charge massique e/m.

A.N : $L = 4cm; E = 4.10^4 V.m^{-1}$ et $B = 1{,}69.10^{-3}T$

EXERCICE 08

A l'aide du spectrographe de masse, on se propose de séparer les ions $^{107}Ag^+$et $^{109}Ag^+$ de même charge q et de masses respectives m_1 et m_2.



En O_1, la vitesse des ions est pratiquement nulle ; ils sont accélérés par la tension $U = V_{P_1} - V_{P_2} = 6.10^4 V$ appliquée entre les plaques P_1 et P_2, distantes de 10cm. Ils pénètrent ensuite en O_2, dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la figure.

1. a)) Préciser le sens de $\vec{E}$ et la force électrique $\vec{F_e}$.

b)) Exprimer les vitesses v_1 et v_2 des deux ions en O_2 en fonction de U, q et de leurs masses m_1 et m_2 .

c)) En déduire que $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$.

2. a)) Préciser la direction et le sens de champ magnétique $\vec{B}$ pour que les ions arrivent en C_1.

b)) Démontrer que les ions sont animés d'un mouvement circulaire uniforme des rayons respectifs R_1 et R_2.

c)) Montrer que : $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$.

En déduire la valeur numérique de $\frac{R_1}{R_2}$.

d)) Exprimer les rayons R_1 et R_2 de leurs trajectoires en fonction de U, q, B et de leurs masses m_1 et m_2.

Calculer numériquement les distances O_2C_1 et O_2C_2.

En déduire la distance C_1C_2.

3. a)) Calculer le temps de parcours de chaque types de particules entre l'entrée en O_2 et le point d'impact sur l'écran.

b)) A leur sortie d'un champ magnétique, les ions sont captés par un fil métallique F relié à la terre par l'intermédiaire d'un galvanomètre G. le fil F reçoit successivement les ions $^{107}Ag^+$ et $^{109}Ag^+$ en C_1 et C_2.

Le galvanomètre indique $I_1 = 61{,}62.10^{-6}A$ et $I_2 = 58{,}38.10^{-6}A$.

Quelle est la composition isotopique d'argent.

En déduire la masse molaire atomique d'argent naturel.

Données : $M_1 = 107 g.mol^{-1}$; $M_2 = 109 g.mol^{-1}$;

$N = 6.10^{23} mol^{-1}$; B=1T.

EXERCICE 09

1. Mouvement dans le champ électrique

Une source radioactivité émet des particules α (noyaux d'hélium He^{2+}). Elles sortent par l'ouverture O_1 avec une vitesse négligeable à l'instant t=0s. Chaque particule est ensuite accélérée entre deux plaques métalliques parallèles P_1 et P_2 séparée par une distance d=10cm.

La tension d'accélération est $U_O=1{,}0.10^3$V.

a)) Donner les caractéristiques de la force électrostatiques $\overrightarrow{F_E}$ qui s'exerce sur la particule α entre P_1 et P_2 et en déduire la plaque de potentiel le plus élevé.

b)) Le mouvement d'une particule α entre les ouvertures O_1 et O_2 est rectiligne, uniformément accéléré.
Calculer la valeur de l'accélération a_1.

c)) Etablir les équations horaires du mouvement $v_1(t)$ et x(t).

d)) Calculer le temps t_1 mis par la particule α pour aller de O_1 à O_2. Quelle est sa vitesse à la sortie du champ électrique.

2. Mouvement dans le champ magnétique

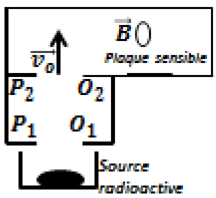
La particule α pénètre ensuite dans une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ d'intensité B=0,2T orthogonal au plan de la figure. a)) Quel doit être le sens de $\vec{B}$ pour que la particule α soit déviée vers la plaque sensible ?

b)) Montrer que le mouvement de la particule α est circulaire uniforme.

c)) Déterminer le rayon R de sa trajectoire, son accélération a_2 et le temps t_1 mis pour atteindre la plaque sensible.

3. Diagrammes du mouvement

Représenter graphiquement l'accélération a(t), la vitesse v(t) et la distance parcourue d(t) par la particule au cours de deux phases du mouvement.



EXERCICE 10

On se propose de déterminer le nombre de masse de l'un des isotopes du potassium, élément chimique, mélange de deux types d'isotopes: ^{39}K et ^{X}K. L'isotope ^{39}K est plus abondant.

On utilise alors un spectrographe de masse constitué essentiellement de trois compartiments. Dans le premier compartiment, les atomes de potassium sont ionisés en cations dans le deuxième compartiment, les ions sont accélérés, leurs vitesses initiales étant négligeables et dans le troisième compartiment, les ions sont soumis à l'action d'un champ magnétique ; en fin de course, ils atteignent un écran luminescent.

Données : le mouvement des particules a lieu dans le vide ; le poids d'un ion est négligeable devant la force électrique et la force magnétique. la tension U établie entre les plaques A et C a pour valeur $U = V_A - V_C = 1{,}0kV$; champ magnétique régnant dans la zone 3 est B = 100 mT ; la masse d'un nucléon est $m_0 = 1{,}6710^{-27}kg$; la masse de l'ion $^{39}K^+$ est $m_1 = 39m_0$, la masse de l'ion $^{x}K^+$ est $m_2 = xm_0$.

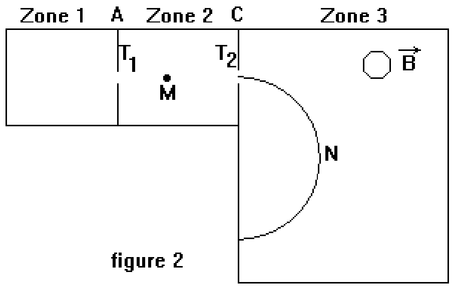


figure 2

1. Entre les plaques A et C, les ions sont accélérés par un champ électrique uniforme.
Leur vitesse au point T1 de la plaque A est supposée nulle.

a)) Reproduire la figure et représenter la force électrique s'exerçant sur un ion potassium se trouvant en M.

b)) Montrer que, arrivés au niveau de la plaque C, en T2, tous les ions potassium ont la même énergie cinétique.

c)) Montrer alors qu'en T2, la vitesse de chaque ion $^{39}K^+$ a pour expression : $v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{39m_0}}$. En déduire, sans démonstration, l'expression de la vitesse v_2 des isotopes $^{x}K^+$ en T2.

2. A partir de T2, les ions pénètrent dans la zone 3 avec des vitesses perpendiculaires à la plaque C.
Chaque type d'isotope effectue, dans le plan de la figure, un mouvement circulaire uniforme.

a)) En un point N de l'une des trajectoires, représenter sur la figure déjà reproduite, la vitesse d'un ion potassium et la force magnétique qui s'exerce sur cet ion.

b)) Compléter la figure en représentant le sens du champ magnétique régnant dans la zone 3.

c)) Montrer que le rayon de la trajectoire des ions $^{39}K^+$a pour expression $R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{78m_0U}{e}}$. En déduire l'expression du rayon R_2

d)) Déterminer, par calcul, la valeur du rayon R_1.

3. Les deux types d'isotopes rencontrent l'écran luminescent en deux points d'impact I_1 et I_2 ; le point d'impact I_1 étant plus lumineux. a)) Préciser, en justifiant, le point d'impact de chaque type d'isotopes.

b)) Montrer que le rapport des rayons des trajectoires des isotopes du potassium dans la zone 3 est : $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{39}{x}}$.

c)) La distance entre les points d'impact est d = 1,5 cm.
Déterminer la valeur du nombre de masse x de l'isotope $^{39}K^+$.

EXERCICE 11

Par l'intermédiaire d'un orifice O situé à l'extrémité d'un tube incliné, un faisceau d'ions $^{40}Ca^{2+}$, ayant même vecteur vitesse $\vec{v}_O$ faisant un angle α_o =15° avec l'horizontale, pénètrent dans l'espace situé entre deux plaques horizontales, distance de d=2cm, où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$ d'intensité E= 10^4V/m. Le faisceau peut ressortir par l'orifice S situé à la distance D=5cm de O et dans le même plan horizontal.

1. a)) Appliquer la R.F.D et démontrer que le mouvement des particules a lieu dans le plan vertical Oxy contenant le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_o}$ et le vecteur champ électrique $\vec{E}$.

b)) En déduire, en fonction de q, charge de l'ion, de m, E, v_o et α_o, les équations horaires, les équations des vitesses et l'équation de la trajectoire d'un ion du faisceau.

Démontrer qu'en S on a $V_S = V_O$ et $|\alpha_S|=|\alpha_O|$.

2. a)) Donner l'expression de l'énergie cinétique des particules qui sortent en S en fonction de q, E, α_o et D.

Calculer l'énergie cinétique E_C, des ions $^{40}Ca^{2+}$sortant en S.

b)) Quelle est la valeur de la tension accélératrice qu'il a fallu utiliser pour communiquer cette énergie cinétique à des ions $^{40}Ca^{2+}$ initialement au repos.

4. Les particules pénètrent ensuite en S' dans un espace où règne un champ magnétique uniforme d'intensité B=0,116T perpendiculaire au plan Oxy. Donner l'expression du rayon R en fonction de l'énergie cinétique E_C, de la masse m, de la charge q, et du champ magnétique B.

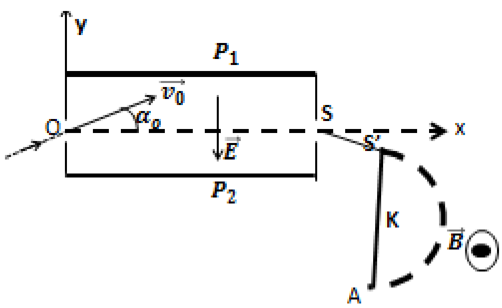
Calculer le rayon R pour les ions $^{40}Ca^{2+}$.

Déterminer l'impact du faisceau sur l'écran K : calculer la distance L=S'A.

5. Pour des ions $^{X}Ca^{2+}$ on trouve expérimentalement L'=S'A'=1,049L comme valeur de la distance correspond au point d'impact .

Quelle est la masse atomique de ces ions $^{X}Ca^{2+}$?

On donne : N_A=6,0221.$10^{23}mol^{-1}$; e=1,6.10^{-19}C.



EXERCICE 12

Le bore naturel est un mélange de deux nucléides isotopes $^{10}_{19}B^+$et $^{11}_{5}B^+$. On se propose de déterminer le pourcentage n_1 et n_2 de ces deux nucléides constituant le bore naturel.

1. On vaporise du bore dans une chambre d'ionisation.

Les atomes s'ionisent en perdant un électron et on obtient deux sortes d'ions $^{10}_{5}B^+$ et $^{11}_{5}B^+$ des masses respectives m_1 et m_2.

Ces ions pénètrent dans une chambre d'accélération avec une vitesse négligeable où ils sont soumis à l'action d'un champ électrique uniforme $\vec{E}$, obtenu en appliquant une différence de potentiel U=$V_A - V_C = 1200V$.

a)) Montrer que l'énergie cinétique est la même pour tous les ions arrivant en O, quel que soit l'isotope ionisé.

Calculer la valeur numérique de cette énergie cinétique.

b)) Exprimer les valeurs de v_1 et v_2 de vecteurs vitesses en fonction de e, m_1 ou m_2 et U. Calculer la vitesse v_1 de l'ion $^{10}_{5}B^+$.

c)) Montrer que les vitesses v_1 et v_2 de deux sortes d'ions en O sont liées à leurs masses par la relation $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$.

2. A leur sortie de la chambre d'accélération, les ions pénètrent dans un chambre de séparation magnétique, où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ (B=0,125T), normal au plan de la figure.

a)) Préciser sur un schéma le sens de $\vec{B}$ pour que les ions puissent parvenir en M et P.

b)) Montrer que le mouvement de ces ions est plane, circulaire et uniforme de rayon R= $\frac{mv}{eB}$.

c)) Exprimer littéralement R_1 et R_2 en fonction de e, m_1 ou m_2, U et B. En déduire une relation entre R_1 , R_2 , m_1 et m_2.

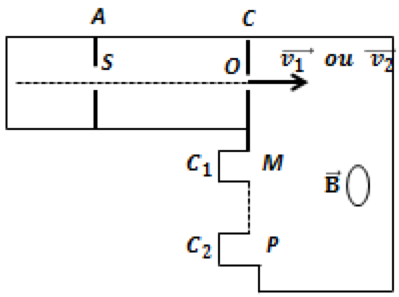
d)) Calculer la distance MP qui sépare les points d'impact des ions en M et P.

3. Ces ions sont reçus en M et en P dans des collecteurs C_1 et C_2. Ces collecteurs fournissent des courants ioniques dont les intensités i_1 et i_2 sont proportionnelles à n_1 et n_2.

On trouve $\frac{i_2}{i_1}$ = 4,32.

Déterminer les valeurs de n_1 et n_2 déduite de cette expérience.

Calculer alors une valeur approchée de la masse atomique molaire du bore naturel.



EXERCICE 13

Dans le spectrographe de masse schématisé à la figure, des ions positifs de masse m, de charge q, sorte en M d'une chambre d'ionisation avec une vitesse négligeable. Ils sont accéléré entre M et N par une tension U=$|V_M - V_N|$ continue et réglable. Ils sont ensuite déviés entre A et B par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Ils sont enfin recueillis à l'entrée fixe C d'un collecteur.

Dans cet appareil tous les ions que l'on veut recueillir en C doivent suivre la même trajectoire MNABC.

D'autre part, le vide est réalisé dans l'appareil et l'effet de pesanteur sur les ions est négligeable.

La portion AB est un arc de cercle de centre O et de rayon R.

1. a)) Donner le signe U suivant le signe de la charge q.

   b)) Etablir en fonction de q, m et U, la vitesse v avec laquelle un ion du faisceau parvient en A.

Dans la suite de l'exercice on supposera q>0.

2. a)) Démontrer que la trajectoire imposée sur un ion sur la portion AB est circulaire uniforme

   b)) Déduire des questions précédentes, l'exprimer de la tension U en fonction q, B, m et R.

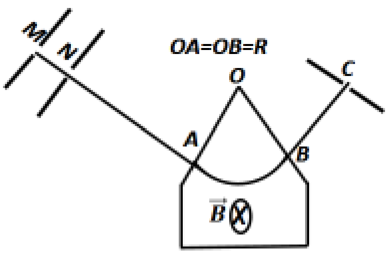
3. On utilise ce spectrographe de masse pour identifier les isotopes du strontium ; les atomes de strontium s'ionisent sous forme d'ion Sr^{2+}. a)) On se place d'abord dans la chambre d'ionisation du strontium 88.

   Calculer la valeur à donner à la tension U pour que les ions du strontium 88 soient collectés en C.

   b)) On place maintenant dans chambre d'ionisation un mélange d'isotopes du strontium. Pour les recueillir successivement en C, il faut donner à U différentes valeurs comprises entre 13 930V et 14 440V. Entre quelles valeurs se situent les nombres de masse de ces isotopes ?

<u>Données</u> : $R = 70cm$; $B = 160m$T ;

masse d'un atome de strontium 88 : 87,6u



<u>EXERCICE 14</u>

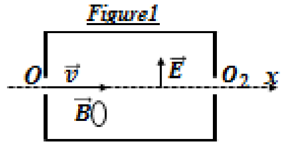
Dans l'exercice on néglige l'action de la pesanteur.

On utilise un spectrographe de masse formé de deux parties : un filtre de vitesse et une chambre de déviation.

1. Une source d'ions émet les deux isotopes $^6Li^+$et $^7Li^+$.

   Les ions pénètrent en O_1dans une zone où règnent simultanément un champ électrique uniforme vertical $\vec{E}$ et un champ magnétique uniforme horizontal $\vec{B}$. Les vitesses d'entrées des ions en O_1 ont des valeurs différentes mais les vecteurs vitesses ont tous la même direction O_1x (figure1).

Figure1



   a)) Donner les caractéristiques de la force électrostatique $\overrightarrow{F_E}$ s'exerçant sur un ion de charge q.

   b)) Donner les caractéristiques de la force magnétique $\overrightarrow{F_M}$ s'exerçant en O_1 sur un ion possédant un vecteur vitesse $\vec{v}$.

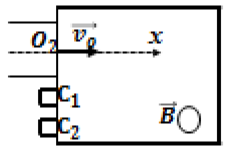
   En déduire le sens du vecteur champ $\vec{B}$.

   c)) Montrer que seuls les ions pénétrant en O_1 avec la vitesse v_o sortiront en O_2 en n'ayant subi aucune déviation.

   Calculer v_0.

   d)) Que deviennent les ions ayant une vitesse $v_1 > v_o$ et ceux ayant une vitesse $v_2 < v_o$?

Figure2



2. Les ions $^6Li^+$ et $^7Li^+$ sortant en O_2 parallèle à O_2x, pénètrent dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ (figure2).

a)) Montrer que le mouvement des ions est circulaire uniforme.

b)) On place deux collecteurs C_1 et C_2 chargés de récupérer respectivement les ions $^6Li^+$et $^7Li^+$.

   Calculer les distances O_2C_1 et O_2C_2.

c)) En une minute, la quantité d'électricité reçue par C_1 est $q_1 = 6{,}60.10^{-8}C$ et celle reçue par C_2 est $q_2 = 8{,}14.10^{-7}C$.

   Déterminer le pourcentage du lithium $^6Li^+$ et celui du lithium $^7Li^+$ dans le lithium naturel.

   En déduire la molaire moyenne de lithium naturel.

<u>*Données*</u> : *B=0,2T et E=*$1{,}2.10^4 V.m^{-1}$. *m(* $^6Li^+$*)=*$10^{-26}kg$;

m($^7Li^+$*)=*$1{,}17.10^{-26}kg$; $e = 1.,6.10^{-19}C$.

<u>EXERCICE 15</u>

A l'intérieur d'une chambre d'ionisation, on produit des ions des $^aZn^{2+}$ et $^bZn^{2+}$de masse respectives m_1 et m_2.

I. Ces ions pénètrent dans l'accélérateur par le trou S avec une vitesse nulle ; ils sont accélérés sous l'action d'une tension $U=V_P - V_{P'}$, établie entre P et P'.

Ils parviennent au trou S' qui les conduit vers le filtre de vitesse.

1. Montrer que les énergies cinétiques des particules sont égales.
2. Déterminer le rapport $^{v_1}/_{v_2}$en fonction de a et b.

   Calculer sa valeur pour a=68 ; b=70.
3. Déterminer la valeur de la tension U permettant d'obtenir $v_1 = 10^5 m.s^{-1}$. Quelle est alors la valeur de v_2.

II. Les deux isotopes pénètrent ensuite à l'intérieur du filtre de vitesse avec les vitesses horizontales $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

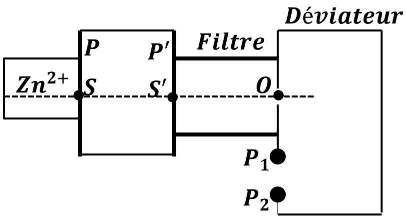
Le faisceau d'ions Zn^{2+} est soumis à l'action simultanée d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire à la fois à $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ et un champ électrique uniforme $\vec{E}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

On règle E à la valeur $E_1 = 4000V.m^{-1}$ pour que le mouvement des ions $^aZn^{2+}$ soit, dans le filtre de vitesse, rectiligne uniforme.

Calculer la valeur du champ magnétique B.

III. Ces ions sélectionnés au point O pénètrent dans le déviateur magnétique où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B'}$, perpendiculaire aux vecteurs vitesses des ions.

1. Montrer que dans le déviateur le mouvement des ions est circulaire uniforme.
2. Soient P_1 et P_2 les points d'impact des ions sur l'écran. Calculer la valeur du champ B' pour $OP_1 = 2000mm$.
3. Déterminer le rapport ${OP_1}/{OP_2}$ en fonction de a et b puis calculer la distance P_1P_2.



EXERCICE 16

Des ions positifs (isotopes $^{68}Zn^{2+}$ et $^{x}Zn^{2+}$ du zinc) de masses respectives m_1=68u et m_2 =xu avec u=1,67.10^{-27}kg , émis à partir du point O_1 avec une vitesse initiale négligeable, sont accélérés entre O_1 et O_2 par la tension $|U_{P_1P_2}| = |U_O| = 5kV$ existant entre les plaques P_1 et P_2 Ils se déplacent dans le vide selon la direction O_1x.

1. <u>Accélération des ions :</u>

a)) Quel est le signe de la tension U_O ?

Calculer la vitesse des ions $^{68}Zn^{2+}$ au point O_2.

b)) Si v_1 et v_2 désignent respectivement les vitesses en O_2 des deux sortes d'ions, donner la relation entre v_1, v_2, m_1 et m_2.

Le rapport $\frac{V_2}{V_1}$ =1,03 ; en déduire la valeur entier de x du nombre de masse de l'ion $^{x}Zn^{2+}$.

2. <u>Filtre de vitesse :</u>

Arrivée en O_2, les ions pénètrent dans un filtre de vitesse constitué par :

- deux plaques horizontales M et N distantes de d=20cm entre lesquelles on établit une différence de potentiel U=U_{MN}>0.
- un dispositif du type bobine de Helmholtz (non représenté sur la figure) qui crée dans l'espace inter plaques un champ magnétique uniforme $\vec{B}$=B.$\vec{u_z}$de direction $\overrightarrow{O_2Z}$ perpendiculaire à $\vec{v_1}$ ou $\vec{v_2}$ et au champ électrique $\vec{E}$ existant entre M et N.
- une plaque verticale P_3 percée au point O aligné avec O_1 et O_2.

a)) Quel doit être le sens du champ magnétique $\vec{B}$ pour que les ions $^{68}Zn^{2+}$arrive en O_2 avec la vitesse v_1 traversent le dispositif en ligne droite ?

b)) Exprimer B en fonction de v_1, U et d.

A.N : de B en mT pour U=1,68kV.

c)) Les ions $^{x}Zn^{2+}$, arrivent en O_2 avec la vitesse v_2 sont-ils déviés vers la plaque N ?

d)) Calculer la valeur du champ magnétique B' pour que les ions $^{x}Zn^{2+}$ traversent le dispositif sans subir de déviation?

3. <u>Spectrographe de masse :</u>

En faisant varier valeur du champ magnétique dans le filtre de vitesse, on peut faire sortir par le point O l'un ou l'autre des isotopes. Les ions pénètrent alors dans un champ magnétique $\vec{B_O}$=$B_O\vec{u_z}$ avec B_O=500mT.

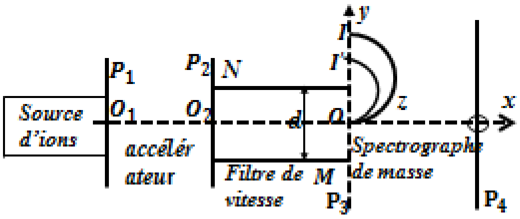
a)) Quel doit être le sens de $\vec{B_O}$ pour que les ions soient déviés vers les y positifs ?

b)) Donner l'expression de rayon R de la trajectoire d'un ion de masse m, de charge q et de vitesse v.

c)) En posant $R_1 = OI$ et $R_2 = OI'$, exprimer la différence de $R_1 - R_2$ des trajectoires que décrivent les deux sortes d'ions en fonction de R_1 et x.

d)) La distance entre les points d'impact I et I' sur la plaque P_3 est II'= a=7,20mm.

Exprimer le nombre de masse x de l'ion $^{x}Zn^{2+}$en fonction de a et de R_1 puis calculer sa valeur numérique. Conclure.



EXERCICE 17

Des ions $^{204}Pb^{2+}$ et $^{206}Pb^{2+}$ sont émis sans vitesse initiale par une source, puis accéléré par une tension U appliquée aux plaques P_1 et P_2. Ils passent ensuite dans un filtre de vitesse où règnent un champ magnétique $\vec{B_1}$ et un champ électrique $\vec{E_1}$ créé par une tension U_1 entre deux plaques P_3 et P_4 distantes de d=58mm.
Les ions sectionnées rentrent alors en O dans un spectrographe de masse où le champ magnétique est $\vec{B_2}$. Ils décrivent une demi-circonférence avant de frapper la plaque photographique.
On néglige l'effet de la pesanteur sur les ions.

1. Reproduire le schéma du dispositif et y indiquer la direction et le sens du champ électrique $\vec{E}$. Dans l'accélérateur, du champ magnétique $\vec{B_1}$ dans le filtre de vitesse et du champ magnétique $\vec{B_2}$ dans le spectrographe de masse.
2. Les champs magnétiques sont réglés à B_1=0,225T etB_2=0,249T. On désire que la trajectoire des ions $^{204}Pb^{2+}$ dans le spectrographe de masse ait un diamètre $D_1=2R_1$=64,0cm.

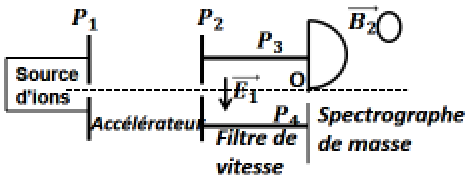
a)) Quelle est la vitesse de ces ions dans le spectrographe?

b)) Calculer les tensions U_1 et U.

3. On règle maintenant la tension d'accélération, soit U' pour que la vitesse v_2 des ions $^{206}Pb^{2+}$ devienne égale à celle qui était obtenue avant pour les ions $^{204}Pb^{2+}$. a)) Calculer U'.

b)) Etablir la relation donnant le rayon de courbure R_2 de la trajectoire des ions $^{206}Pb^{2+}$ dans le spectrographe de mase en fonction de R_1 et respectivement m_1 et m_2 des deux ions. Calculer R_2.

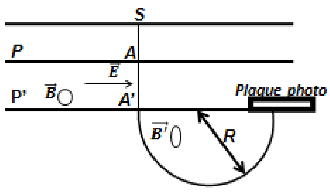
c)) Quelle est la distance des deux points d'impact ?



EXERCICE 18

On néglige l'effet de pesanteur sur les ions.

1. On considère les ions de deux isotopes $^{200}_{80}Hg^{2+}$ et $^{202}_{80}Hg^{2+}$. Ils ont émis sans vitesse par la source S, puis accélérés par la différence des potentiels U_{SP}=U



a)) Déterminer l'expression littérale de la vitesse en A d'un ion de masse m et de charge q.

b)) Montrer que les deux espèces ions émis par la source S arrivent en ce point avec des vitesses différentes.

2. Ils traversent la fente A du plan P, puis passent entre P et P' dans un filtre de vitesse constitué par un champ électrique uniforme $\vec{E}$ (E=$6.10^4 V/m$) et un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ (B=0,1T) perpendiculaire au plan de la feuille.

a)) Préciser sur un schéma clair le sens le sens du vecteur $\vec{B}$.

b)) Montrer que seuls les ions qui ont une vitesse telle que $v_O=\frac{E}{B}$ parviennent en A'. Que peut-on conclure de la trajectoire de ces isotopes dans le filtre de vitesse ?

3. Ces ions pénètrent en A' dans une capsule où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B'}$ (B'=0,2T) perpendiculaire au plan de la figure, qui leur impose une trajectoire circulaire de rayon R, puis ils impressionnent une plaque photographique.

On donne : masse d'un ion : $m = Au$ =A.1,66.10^{-27}kg

a)) Etablir l'expression de R en fonction de m, q, v_O, B' puis en fonction de m, q, E, B et B'.

b)) On réalise les réglages des valeurs de $\frac{E}{B}$ permettant successivement le passage en A' de ces deux espèces d'ions. En déduire la distance entre les deux points d'impact, sur la plaque photo, des ions de deux isotopes de mercure Hg^{2+}.

EXERCICE 19

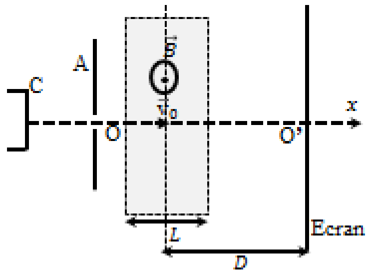
Dans un tube cathodique, des électrons sont émis sans vitesse initiale par une cathode C, puis accélérés par l'anode ; ils pénètrent en O avec une vitesse horizontale $\vec{v_0}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$, orthogonal au plan de la figure.

Le champ $\vec{B}$ n'existe que sur une zone de longueur L.

1. Calculer la tension U_{AC}=U entre l'anode et la cathode.
2. Etudier la nature du mouvement d'un électron dans le champ $\vec{B}$ et calculer la grandeur caractéristique de la trajectoire.
3. Un écran E, placé à une distance D de O, reçoit le faisceau d'électrons. Calculer la déviation d'électrons provoquée par le champ magnétique B sachant que la longueur L est supérieur à D.
4. Dans l'espace de longueur L, on fait agir simultanément le champ magnétique précédent et un champ électrique $\vec{E}$ afin de ne plus observer de déviation sur l'écran.

   Calculer l'intensité du champ électrique, représenter sur le schéma les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, et les forces appliquées à l'électron.

   Données : *D=50cm ; L=1m ; B=$10^{-3}T$; e=1,6.$10^{-19}C$;*
   m_e=9,1.$10^{-31}kg$; $v_O=10^7 m.s^{-1}$.



EXERCICE 20

D = 40 cm ; ℓ = 1 cm ; d = 10 cm ; $m = 9{,}1 \times 10^{-31} kg$;
$E = 5 \times 10^4 V.m^{-1}$.

Dans tout l'exercice, on négligera le poids de l'électron devant les autres forces qui agissent sur lui.

1. Des électrons de masse m et de charge q sont émis sans vitesse initiale par la cathode (C). Ils subissent sur la longueur d, l'action du champ électrique uniforme $\vec{E}$.

   a)) Quelle est la nature du mouvement de l'électron entre la cathode (C) et l'anode (A)?

   b)) Que vaut la vitesse v0 d'un électron au point O_1 ?

2. Arrivés en O1, les électrons subissent sur la distance l l'action d'un champ magnétique uniforme B perpendiculaire au plan de la figure (le domaine où règne ce champ B est hachuré).

   Quel doit être le sens du vecteur B pour que les électrons décrivent l'arc de cercle O_1N? Justifier la réponse.

   Établir l'expression du rayon R = O'O_1 = O'N de cet arc de cercle. A.N: Calculer R pour $B = 2 \times 10^{-3} T$.

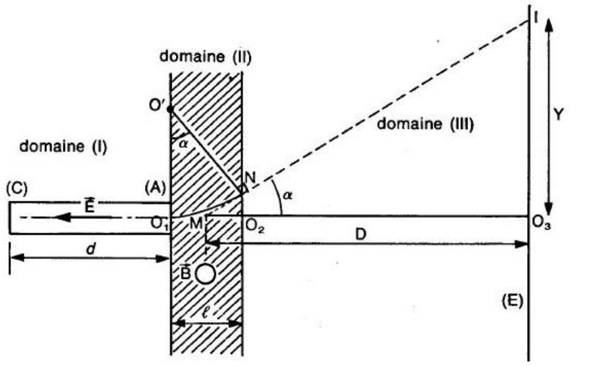
3. Quelle est la nature du mouvement de l'électron dans le domaine III où n'existe aucun champ ?

4. Le domaine III est limité par un écran (E) sur lequel arrivent les électrons. Exprimer en fonction de m, e, B, D, ℓ et v_0 la déflexion magnétique $O_3I = Y$ subie par un électron à la traversée du système II +III. La droite IN coupe l'axe O_1O_2 au point M. L'écran E est à la distance D de ce point M.

On fera les hypothèses simplificatrices suivantes :

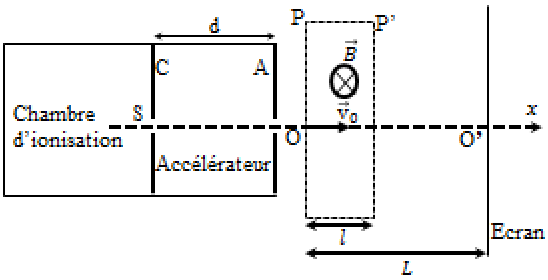
- dans le domaine II de l'espace, on peut confondre la longueur de l'arc avec la longueur O_1O_2= ℓ où règne le champ $\vec{B}$.
- on supposera que la déviation angulaire est faible.

Sachant que Y= 3,35 cm, retrouver la valeur v_0 de la vitesse de l'électron au point O_1.



Exercice 21

1. Des protons H^+ de masse $m = 1{,}67.10^{-27} kg$ sont produits par une chambre d'ionisation. On néglige les forces de pesanteur. Ces protons pénètrent en S sans vitesse initiale dans un accélérateur linéaire où ils sont soumis à un champ électrique uniforme E créé par une tension $U = V_C - V_A$.



a)) Exprimer l'accélération d'un proton en fonction de U, d, m et la charge élémentaire e. b)) Ecrire l'équation horaire du mouvement d'un proton dans l'accélérateur.

2. Les protons pénètrent ensuite en O avec une vitesse $v_0$dans un domaine limité par deux plans P et P' où règne un champ magnétique uniforme B orthogonal à la vitesse v.

a)) Donner les caractéristiques de la force magnétique subie par un proton en O. Représenter graphiquement cette force.

b)) Montrer que le mouvement des protons est uniforme et circulaire entre P et P'.

Exprimer le rayon de leur trajectoire en fonction de m, B, e et U.

3. On admet que la distance l entre les plans P et P' est négligeable devant L (distance entre O et l'écran et que les protons sortent par P' et viennent heurter l'écran en M.

a)) Quelle est la nature du mouvement des protons après leur sortie du champ magnétique ?

b)) Exprimer la déflexion magnétique O'M en fonction de L, B, e, U, d et m.

c)) Pour empêcher les protons d'atterrir sur l'écran, on augmente la largeur du champ magnétique.

Quelle valeur minimale L_1faudrait-il donner à pour que les protons ressortent par le plan P ?

Données : U = 10 kV ; B = 0,5 T

Exercice 22

Dans tout l'exercice, on négligera le poids de la pesanteur.

1. Un faisceau d'électrons pénètrent dans un région où règne un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$, avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_o}$ perpendiculaire au vecteur champ $\vec{E}$ (figure1).

a)) Etablir les lois horaires du mouvement d'un électron dans le champ $\vec{E}$. Donner l'équation de sa trajectoire.

b)) Déterminer les coordonnées du point de sortie S.

c)) Un écran placé à une distance D du milieu des plaques, reçoit le faisceau électronique.

Déterminer la déflexion électrostatique Y_E.

2. On remplace le champ électrostatique précédent par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{v_o}$ (figure2).

a)) Préciser le sens de $\vec{B}$ pour que les électrons soient déviés vers le haut.

b)) Montrer que le mouvement des électrons est uniforme.

c)) Montrer que le mouvement est circulaire. En déduire le rayon de la trajectoire.

d)) Déterminer la déflexion magnétique Y_M.

3. Comparer les deux dispositifs des déviations des particules.

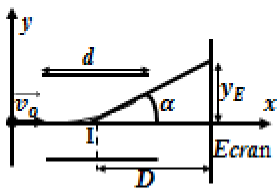


Figure1

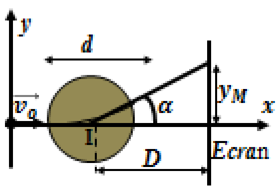


Figure2

EXERCICE 23

Une particule, de masse m et de charge q, pénètre en C, avec une vitesse négligeable, dans un espace où règne un champ électrique $\vec{E}$. Cet espace est limité par deux grilles planes P_1 *et* P_2, assimilables à deux plaques métalliques distantes de d .

On applique entre ces plaques une tension électrique $U_{P_1P_2}$ positive. La particule se déplace de C en K où elle arrive avec une vitesse $\vec{v}_0$.

De part et d'autre des grilles règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant, perpendiculaire au plan de la figure.

La particule pénètre au point K dans la région 1 avec la vitesse $\vec{v}_0$ précédente.

Elle décrit alors une trajectoire circulaire (C_1).

1. a)) Exprimer l'énergie cinétique de la particule K' en fonction de m et v_0. Quel est le rôle du champ magnétique $\vec{B}$?

 b)) Exprimer le rayon R_1 de (C_1) en fonction de m, q, v_0 et B.

2. Lorsque la particule est dans l'espace I, le signe de la tension $U_{P_1P_2}$ change. Exprimer son énergie cinétique en L en fonction de m, q., $v_0, U_{P_1P_2}$.

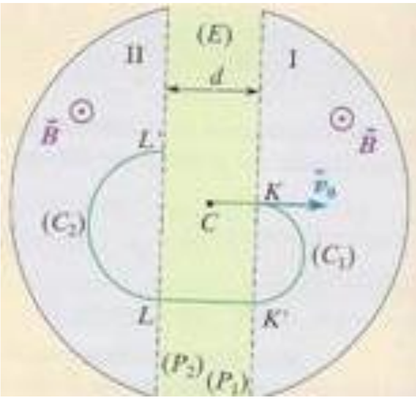
 Quel est l'intérêt du passage particule dans la zone (E)?

3. La particule décrit ensuite la trajectoire (C_2)

 a)) Exprimer le rayon R_2 de la trajectoire (C_2) en fonction de m , q, v_0, B et U . Vérifier que R_2 est supérieur à R_1

 b)) Exprimer la durée du demi-tour LL' et la comparer à la durée du demi-tour KK' .

 c)) En déduire la fréquence de la tension alternative $U_{P_1P_2}$.



EXERCICE 24

Un cyclotron est constitué par deux demi-boites cylindriques D et D' à l'intérieur desquels on établit un champ magnétique $\vec{B}$. Dans l'espace compris entre les deux, on établit une tension $U_{DD'}$ alternative sinusoïdale de valeur maximale U. Des ions positifs de charge q, de masse m sont injectés en O' avec une vitesse négligeable.

I. 1. Quelle est le rôle du champ magnétique $\vec{B}$ uniforme.

2. Donner l'expression de la force subie par une particule chargée dans le champ magnétique.

 Pourquoi l'action du champ magnétique ne peut-elle pas faire varier l'énergie cinétique d'une particule chargée ?

3. Quelle est la cause de l'augmentation de la valeur de la vitesse d'une particule chargée dans un accélérateur comme le cyclotron ? Pourquoi faut-il changer le signe de la tension appliquée entre les électrodes après chaque demi-tour d'une particule chargée ?

II. 1. Sachant que $U_{DD'}$>0, établir l'expression littérale de l'énergie cinétique E_{C1} et de la vitesse v_1 de ses ions à leur premier arrivée en D' en fonction de q, U et m.

 Calculer E_{C1} en joule puis en Méga-volt ainsi que la vitesse v_1.

2. Ces ions pénètrent alors dans D'.

 a)) Montrer que, dans le Dee D' le mouvement d'ion est circulaire uniforme.

 b)) Exprimer le rayon R_1 de leur trajectoire en fonction de B, q, U et m. Calculer la valeur de R_1.

 c)) Exprimer littéralement le temps t mis par un ion pour effectuer un demi-tour. Ce temps dépend-il de sa vitesse? Calculer sa valeur numérique et conclure.

 d)) En déduire la valeur de la fréquence N de la tension.

3. Les ions ressortent de D'.On inverse alors la tension $U_{DD'}$,en le gardant la même valeur U. Etablir les expressions littérales :

 a)) de leur vitesse V_2 à l'entrée de D et leur énergie cinétique ;

 b)) du rayon R_2 de leur trajectoire dans D.

 c)) du rayon de la trajectoire des ions en fonction de n, nombre de tours de passage entre D et D' et de R_1.

4. a)) Après chaque passage dans l'intervalle entre les deux «D», la vitesse de la particule ainsi que le rayon R de sa trajectoire dans un « D » augmentent. Déterminer les suites v_k *et* R_k, l'indice k étant incrémenté d'une unité à chaque demi-tour.

 b)) Lorsque ce rayon finit par atteindre le rayon R_D d'un « D », l'ion est alors éjecté du cyclotron.

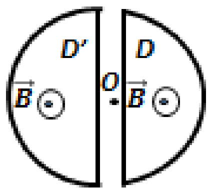
 Exprimer en fonction de m, q, B et R_D l'énergie cinétique E_{Ck} de l'ion lors de son éjection. A.N : $R_D = 40cm$.

5. Les particules chargées extraites lorsqu'elles parviennent à l'extrémité de l'enceinte de rayon R_{max}.

 Montrer que l'énergie maximale est donnée par :

$$E_{Cmax} = {q^2B^2R_{max}}^2/_{2m}$$

.Données : $q=3,2.10^{-19}C$; $m=0,33.10^{-26}kg$; $U=10^5V$; $B=1T$.

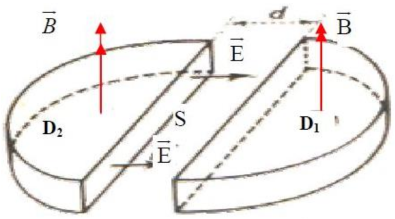


EXERCICE 25

Un cyclotron est un dispositif constitué de deux demi-cylindre D_1 *et* D_2 , appelés Dees, séparés par une distance très faible d devant leur diamètre. Le tout est placé dans le vide. Un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la figure est créé dans D_1 *et* D_2 . Entre les Dees et sur la distance d agit un champ électrique uniforme $\vec{E}$. Ce champ $\vec{E}$ est constamment nul à l'intérieur de deux dees. On suppose que la d.d.p U entre D_1 *et* D_2 est constante.

Données : masse de proton $m) = 1{,}67.10^{-27}kg$; $d = 1cm$

1. Au voisinage immédiat de D_2 une source S émet des protons avec une vitesse initiale négligeable.
 a)) Préciser la nature du mouvement du proton entre D_2 *et* D_1 .
 b)) Etablir l'expression de la vitesse v_1 du proton au moment où il pénètre dans entre D_1 en fonction e, m et U. Calculer v_1.
2. Le proton pénètre dans D_1, sa vitesse $\vec{v}_1$ est perpendiculaire à $\vec{B}$.
 a)) Montrer que le mouvement du proton dans D_1 est circulaire uniforme. Donner l'expression du rayon R_1 du demi-cercle décrit par le proton en fonction de e, m, B et U.
 b)) Exprimer littéralement le temps de transit τ mis par le proton pour décrire ce demi-cercle ; montrer qu'il est indépendant de la vitesse donc non modifiée par la présence du champ électrique accélérateur. A.N : B=1T.
3. Au moment de précis où le proton quitte D_1, on inverse le sens de $\vec{E}$, le proton pénètre ainsi dans D_2 avec une vitesse v_2.
 a)) Etablir l'expression de la vitesse v_2 du proton et donner l'expression du rayon R_2 de la trajectoire décrite dans D_2.
 b)) Exprimer le temps de transit dans D_2. Le comparer à τ.
4. Quand le proton quitte D_2, on inverse à nouveau le sens de $\vec{E}$. La particule, accélérée par la même tension U, pénètre dans D_1 avec une vitesse v_3, y décrit un demi-cercle de rayon R_3, ainsi de suite…
 a)) Exprimer le rayon R_n de la n^{ième} trajectoire en fonction de R_1 de la première trajectoire.
 b)) Donner la valeur de n pour $R_n = 0{,}14m$. Calculer la vitesse correspondante v_n du proton.
 c)) Quelle serait la d.d.p constante qui aurait donné cette vitesse au proton initialement émis sans vitesse initiale ? Commenter.



Induction Électromagnétique

I. Loi de Laplace

1. Énoncé :

Un conducteur rectiligne de longueur l parcouru par un courant d'intensité I placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ est soumis à la force de la place $\vec{F} = I\vec{l}\wedge\vec{B}$

Le sens de $\vec{l}$ est celui du courant du courant.

La longueur l est la partie du conducteur qui est à la fois parcourue par le courant et plongée dans le champ magnétique $\vec{B}$.

2. Caractéristique de la force de Laplace

- direction : $\vec{F} \perp (\vec{l}, \vec{B})$
- sens : $(\vec{l}, \vec{B}, \vec{F})$ forme un trièdre directe (règle des trois doigts)
- norme : $F = IlB|\sin\alpha|$ $avec$ $\alpha = (\vec{l}, \vec{B})$

II. Induction Électromagnétique

1. Étude d'un cadre

Considérons un cadre rectangulaire parcouru par un courant I plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$.

a. Force de Laplace s'exerçant sur le cadre

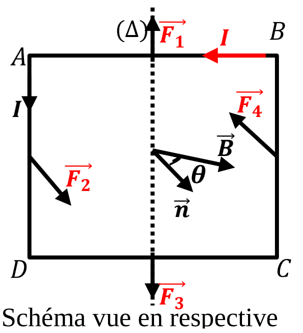


Schéma vue en respective

Soit $AB = DC = a$ et $AD = BC = b$, on a :

$$\vec{F_1} = -\vec{F_3} \;\; et \;\; \vec{F_2} = -\vec{F_4}$$

Ce qui implique que l'ensemble des forces n'imprime pas un mouvement de translation de cadre.

$F_1 = F_3 = IaB$, Ces deux forces sont parallèles à l'axe Δ, elles n'ont donc aucun effet sur la rotation du cadre autour de l'axe Δ.

$F_2 = F_4 = IaB$, Ces deux forces ne sont pas parallèles à l'axe Δ, elles ont donc un effet de rotation du cadre autour de l'axe Δ.

b. Moment des forces de Laplace

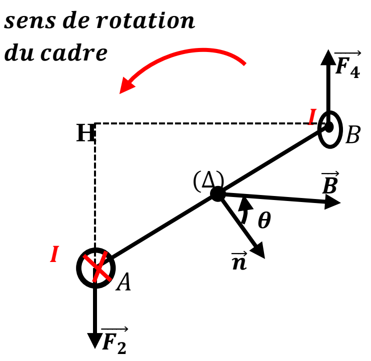


Schéma vue de dessus

$M(\vec{F_1}) = M(\vec{F_3}) = 0$

$$M(\vec{F_2}) = M(\vec{F_4}) = F_2 \times \frac{a}{2}\sin\theta = IbB\frac{a}{2}\sin\theta = \frac{IBab}{2}\sin\theta$$

Donc le circuit est soumis à un couple formé par $\vec{F_2}$ et $\vec{F_4}$ et dont le module est égale à :

$$\Gamma = F_2 BH \;avec\; BH = AB\sin\theta = a\sin\theta \implies \Gamma = IabB\sin\theta$$

Un circuit comportant N spires de surface S, parcouru par un courant I, le moment du couple électromagnétique s'écrit :

$$\Gamma = NIabB\sin\theta = NBIS\sin\theta \quad \text{aveec } S = ab$$

c. Position d'équibre du cadre :

A l'équilibre :$\Gamma = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \pi$ ou $\theta = 0$

- Pour $\theta = 0$, $\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont parallèles et de mem sens : écarté de sa position d'équilibre le cadre tend à y revenir :
  On dit que l'équibre est stable.
- Pour $\theta = \pi$, $\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont parallèles et de sens contraire : écarté de sa position d'équilibre le cadre s'éloigne définitivement : On dit que l'équibre est instable.

2. Flux à travers un circuit :

Soit un circuit comportant N spires (cadre ou bobine) placé dans un champ magnétiqaueuniorme $\vec{B}$ est donné par :

$$\Phi = NBS\cos\theta \quad avec\; \theta = mes\,(\vec{B}, \vec{n}S)$$

3. Force électromotrice d'induction

a. Loi de modération de Lenz

Le phénomène d'induction électromagnétique est tel que par ses effets il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

(Par ses effets, le courant induit s'oppose à la cause qui lui a donné naissance).

b. f.é.m. induite moyenne

Durant le phénomene d'induction, le lux magnétique est une fonction du temps. Si pendant une durée Δt la variation du flux est $\Delta\Phi$, la f.ém. induite moyenne est : $e_{moy} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

c. f.é.m. induite instantanée : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

le signe moins (-) traduit la loi Lenz :

- Si Φ augmente $\frac{d\Phi}{dt} > 0 \Longrightarrow e < 0$, le courant circule dans le sens négatif et s'oppose à l'augmentation du flux.
- Si Φ diminue $\frac{d\Phi}{dt} < 0 \Longrightarrow e > 0$, le courant circule dans le senspositif et s'oppose à la diminution du flux.

d. Intensité du courant induit

Si R est un résistance toatale du circuit, alors l'intensité du courant induit est donnée par la loi de pouillet :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

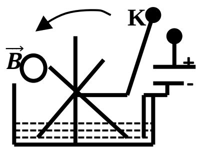
e. Quantité d'électricité induite

Par définition : $|q| = \frac{|\Delta\Phi|}{R}$ $\;avec\; \Delta\Phi = B.\Delta S$

Exercices sur l'Induction Électromagnétique

EXERCICE 01

Une roue mobile autour d'un axe (Δ) horizontal, constitué de rayon ride en cuivre de rayon $R = 9cm$ régulièrement repartie et plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et perpendiculaire au plan de la figure. Lorsqu'on baisse l'interrupteur K, on observe la rotation de la roue dans le sens indiqué sur la figure.



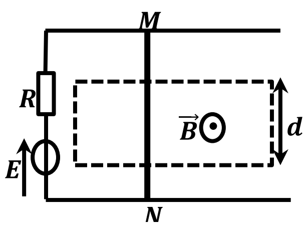
Mercure

1. a)) Expliquer pourquoi il y a ce mouvement de rotation.
   b)) Préciser le sens du vecteur champ magnétique$\vec{B}$.
   c)) La roue tourne à 75tours par minutes et la puissance mécanique est de 5,4mW. Calculer la valeur du champ magnétique uniforme B. On donne I = 8,5A
2. La moitié du rayon inferieur est seulement baigné dans le même champ magnétique $\vec{B}$ et on permute les bornes du générateur.
   a)) Est-ce qu'on a le même sens de rotation ? Justifier.
   b)) Donner l'expression de la puissance de la force de Laplace.
3.On enlève le générateur et on le remplace par un résistor de résistance R'=0,12Ω. Un dispositif impose à la roue un mouvement de rotation uniforme avec vitesse angulaire de 75tours/minute dans le sens trigonométrique.
   a)) Donner l'expression de la surface dS balayée par un rayon pendant un temps dt.
   b)) Quelle est la valeur de la f.é.m. qui apparait à chaque rayon ?
   c)) Calculer l'intensité du courant qui traverse chaque rayon et préciser les caractéristiques de la force de Laplace apparue sur chaque rayon.

EXERCICE 02

Considérons deux conducteurs parallèles formant un "rail de Laplace" sur lequel peut se déplacer une barre mobile conductrice MN selon le schéma ci-dessous (vue de dessus) . Le générateur a une f.é.m. E = 5 V et une résistance interne R = 5Ω, la barre MN de longueur totale L= 0,12 m a une résistance négligeable ; elle crée un court-circuit en refermant le circuit entre les deux rails.
On place MN dans l'entrefer d'un aimant en U de largeur d = 4 cm où règne un champ magnétique uniforme; B = 0.1 T.

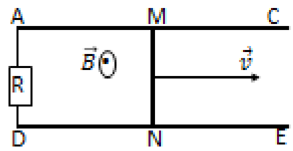
1. Expliquez (et justifiez à l'aide de quelques mots et d'éventuellement un schéma) comment on doit placer l'aimant en U pour obtenir le champ magnétique tel qu'il est représenté sur la figure par le vecteur B ,c'est à dire perpendiculaire aux rails) et dirigé vers le haut.



2. Déterminez le sens et l'intensité du courant dans le circuit.
3. Déterminez en direction, sens et grandeur la force de Laplace agissant sur la barre MN.
   (Aidez- vous d'un schéma représentant les vecteurs significatifs).
4. La barre MN se déplace à vitesse constante) dans le champ magnétique sur une longueur de 6 cm dans le sens impliqué par la force de Laplace.
   a)) Déterminer le flux coupé par la barre.
   b)) En déduire le travail exercé lors de ce déplacement de la barre MN.
5. Quelle est alors la force électromotrice induite dans le circuit si le parcours a lieu en 1 ms? Représenter cette force.
6. En conclusion, commenter le sens de la force électromotrice induite et les conséquences de son action dans le circuit.

EXERCICE 03

Deux rails horizontaux et parallèle AC et DE, distants de l=10cm, sont placés dans un chambre magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ vertical dirigé vers le haut, d'intensité $B = 2.10^{-2}T$.
Les extrémités A et Dsont reliés par l'intermédiaire d'un conducteur ohmique de résistance $R = 1\Omega$. Un conducteur MN est placé dans le plan des rails tout en restant perpendiculaire à ceux-ci, à la vitesse constante v=0,8$m.s^{-1}$. On néglige les frottements. Les rails et le conducteur MN ont une résistance négligeable.



1. Déterminer la f.é.m. induit qui apparait dans le conducteur MN.
2. Déterminer le sens et l'intensité du courant induit dans le circuit.
3. Quelle est la puissance électrique P_e engendrée ?
4. a)) Déterminer les caractéristiques de la force de Laplace qui agit sur le conducteur MN.
   b)) En déduire les caractéristiques de la force F_m exercée par le manipulateur.
   c)) Déterminer la puissance P_m de cette force de cette force, puis compare avec P_e.

EXERCICE 04

1. Une tige conductrice MN de longueur l se déplace sur deux rails conducteurs parallèles AC et DE à vitesse constante v, en restant perpendiculaire aux rails. Le déplacement de MN s'effectue dans un champ magnétique B uniforme perpendiculaire au plan des rails.

a)) Montrer que le voltmètre détecte une force électromotrice induite dont on donnera l'expression en fonction de v, B et l.
b)) Préciser le signe de la différence de potentiel entre M et N.
On donne : $v = 2cm.s^{-1}$, $B = 0{,}5T\ et\ l = 4cm$.

2. On relie maintenant AE et CD par des résistances

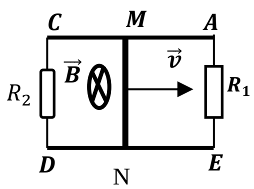
$$R_1 = 2.10^{-2}\Omega \ \ et \ \ R_2 = 4.10^{-2}\Omega$$

La barre MN se déplace toujours à la vitesse constante v dans les mêmes conditions que précédemment.

a)) Montrer que R_1 et R_2 sont parcourues par des courants dont on indiquera le sens.

b)) Exprimer la relation entre les intensités des courants dans R_1, R_2 et MN. (Les intensités sont prises en valeur absolue).

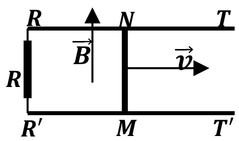
c)) En négligeant la résistance des rails et de la tige, et en supposant que les courants ne modifient pas sensiblement le champ magnétique initial, calculer les intensités des courants dans R_1, R_2 et MN. Considérer le cas où la barre se déplace avec la même vitesse, dans l'autre sens.



EXERCICE 05

Un conducteur MN est placé perpendiculairement aux rails parallèles (RT) et (R' T') contenus dans plan horizontal, pénètre dans un région où règne un champ magnétique $\vec{B}$ d'intensité $B = 0{,}5T$. On ferme le circuit.

On donne la résistance $R = 0{,}12\Omega$; $MN = l = 12cm$.



1. Établir l'expression de la f.é.m. induit en fonction de la vitesse v du conducteur, de l et de B.
   Indiquer le sens du courant induit ?
2. On néglige la résistance des rails et de la barre ainsi que la force de frottement sur les rails. On exerce une force constante $F = 0{,}006N$ au milieu de la barre MN et parallèle aux rails.
   Calculer l'intensité du courant induit i qui circule dans le circuit et la vitesse v de la barre quand cette vitesse est constante.
3. a)) Calculer la f.é.m. induite, l'intensité du courant induit et préciser le sens du courant induit dans les deux cas suivants:

a1)) On déplace le conducteur mobile vers la droite puis vers la gauche à la vitesse constante $v = 0{,}6m.s^{-1}$.

a2)) On déplace le conducteur initialement arrêter, de gauche à droite d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $a = 0{,}4m.s^{-2}$ entre les dates t=0s et t = 6s, puis d'un mouvement uniforme avec la vitesse acquise à $t = 6s$.

Représenter dans ce dernier cas, la courbe donnant les variations de l'intensité du courant induit, en valeur absolue, en fonction du temps t.

b)) Déterminer la quantité d'électricité induit pendant la 1ère phase.

c)) Calculer la puissance électrique apparue dans le circuit et la puissance mécanique à l'instant $t = 6s$. Conclure.

EXERCICE 06

Dans tout l'exercice, on néglige le champ magnétique terrestre.

1. Un circuit électrique est composé d'un générateur, d'un interrupteur K, de deux rails métalliques horizontaux, parallèles, d'une résistance de protection et d'un barreau métallique mobile MN vertical de masse m, pouvant glisse sans frottements en restant perpendiculaire aux rails.

Le courant débité par le générateur a une intensité I supposée constante. La région1 du schéma ci-dessus est soumise à l'action d'un champ magnétique $\vec{B_1}$ perpendiculaire au plan des rails et dirigé comme indiqué sur la figure. Lae barreau MN étant immobile, on ferme l'interrupteur K à l'instant t=0s.

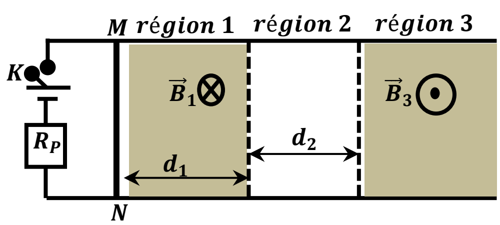
a)) Faire le bilan des forces que subit le barreau MN, en donnant les caractéristiques de chacune d'elles.

b)) Calculer accélération a_1 pris par le barreau lors de son mouvement dans la région 1.

On donne :$I = 5A$; $B_1 = 6.10^{-3}T$; $m = 50g$ et $MN = l = 10cm.$

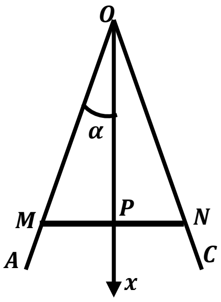
c)) Déterminer la vitesse v_1 du barreau MN quand il sort de la région 1 après avoir parcourue une distance d_1=5cm.

2. Le barreau traverse une région 2 de largeur $d_2 = 10cm$ où le champ magnétique est nul.
   Quelle la nature de son mouvement ?
   Calculer le temps mis pour la traverser.
3. Le barreau entre dans la région3 et subit l'action d'un champ magnétique $B_3 = 6.10^{-3}T$ et orienter comme indique la figure.
   a)) Quelle est le vecteur accélération a_3 du barreau ?
   b)) A quelle date le barreau repasse –t-il par sa position initiale (de la question 1).



EXERCICE 07

Deux rails en cuivre OA et OC de longueurs égales soudées en O, sont placés horizontalement dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, constante et vertyical. Soit Ox la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC} = \alpha$



On donne $OA = OC = l$ et $OP = x$.

On déplace avec une vitesse constante v , une tige métallique MN sur ces rails, de telle façon que MN reste toujours perpendiculaire à Ox.

La tige part de O à l'instant t=0s, son milieu P restant sur Ox.

1. a)) Calculer le flux du champ magnétique à travers le circuit OMN à l'instant t en fonction de B, v , t et α.
   b)) En déduire l'expression de la force électromotrice induite en fonction de B, v, α et t.
2. a)) Calculer le temps mis par la tige pour atteindre la position AC en fonction de v, α et l.
   b)) En déduire la valeur absolue de la force électromotrice maximale induite en fonction de B, v, α et l.
   c)) Calculer la longueur l de chaque rail.
3. Dans la suite de l'exercice, on remarquera que le triangle OMN est équilatéral.
   a)) Sachant que la résistance linéique (résistance par mètre du conducteur) des rails et de la tige (fait de même matériau) est ρ ; calculer en fonction de p, v et t, la résistance totale du circuit OMN.
   b)) En déduire que l'intensité du courant qui traverse le circuit est constante et calculer sa valeur numérique.

On donne : $|e_{max}| = 0,5V$; $\alpha = 30°$; $B = 0,5T$,

$$v = 1m.s^{-1} ; p = \frac{1\Omega}{m} \; et \; tg30° = \sqrt{3}/_{3}.$$

EXERCICE 08

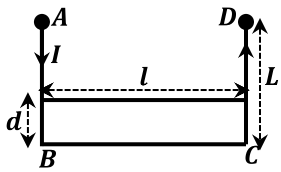
Un fil de cuivre BC, rectiligne de longueur l , de masse volumique μ et de diamètre D, est suspendu par deux fils conducteurs AB et CD, infiniment flexibles de longueur L et de masse négligeable. On fait passer un courant d'intensité I dans le sens ABCD. Un aimant en parallèle créé entre les branches un champ magnétique uniforme B que l'on suppose brusquement limité à une largeur d dans la direction perpendiculaire au plan du fer à cheval.

1. a)) Indiquer par un schéma comment, il faut placer l'aimant pour que BC puisse être soulève par une force électromagnétique verticale.
   b)) Calculer le poids de la barre BC.
   c)) Quelle est l'intensité minimale du courant permettant ce soulèvement ? (voir figure1)
2. Indiquer de la même façon comment il faut placer l'aimant pour que AB s'écarte d'un angle α du plan vertical sous l'action d'une force électromagnétique horizontale. (Voir fig2)
   Calculer le déplacement x de BC.(voir figure2)
3. Indiquer comment, il faut placer l'aimant pour que BC ne subisse aucune action.
4. On donne à l'aimant une position telle que le champ magnétique $\vec{B}$ reste perpendiculaire à BC mais soit incliné d'un angle θ sur la verticale.
   Etablir la formule donnant $\tan\alpha$en fonction de θ.
5. On éloigne l'aimant et on place BC dans le plan du méridien magnétique. Montrer que le fil peut se déplacer puis calculer l'intensité du courant lorsque le déplacement $x = 1mm$.

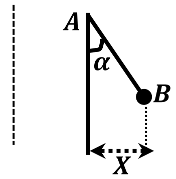
Données : $\mu = 8{,}85.10^{3}kg.m^{-3}$; $B = 5.10^{-2}T$; $l = 10cm$; $D = 1{,}5mm$; $L = 1m$; $d = 4cm$; $I = 0{,}1A$;

B_H=composante horizontale du champ magnétique terrestre $= 2.10^{-5}T$

Inclinaison I = angle du champ magnétique terrestre avec l'horizontales de 64°.



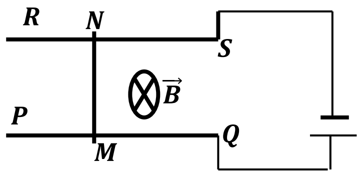
$\underline{Figure 1}$



$\underline{Figure 2}$

EXERCICE 09

Une tige de cuivre MN, de masse m = 20g et de section constante est placée sur deux rails parallèles et horizontaux (PQ) et (RS), perpendiculairement aux rails.



On donne : m=20g ; MN=l=10cm ; B=0,2T et g=10m.s-2.

Les rails sont reliés par un générateur débitant un courant électrique d'intensité I = 3A.

L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme$\vec{B}$, vertical et descendant d'intensité B = 0,2T. On admettra que la tige ne peut que glisser sans frottement sur les rails.

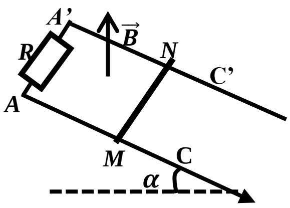
1. Faire le bilan des forces appliquées à la tige et les représenter sur un schéma.
2. Déterminer l'accélération de la tige .
3. Établir les équations horaires v(t) et x(t) du mouvement.
4. Calculer la vitesse de la tige 0,5s après la fermeture du circuit.
5. De quel angle α doit-on incliner les rails (PQ) et (RS) pour que la tige soit en équilibre dans les deux cas suivants :
   a)) $\vec{B}$ reste perpendiculaire aux rails. b)) $\vec{B}$ est vertical.

<u>*EXERCICE 10*</u>

Un barre, de cuivre MN, homogène, de masse m et de longueur l, peut glisser, sans frottement le long de deux rails métalliques AC et AC' contenus dans un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Pendant tout le mouvement, la barre MN reste perpendiculaire aux rails AC et AC' et maintient avec eux le contact électrique en M et N.

On donne : $l = 0{,}1m$; $g = 9{,}80m.s^{-2}$; $m = 20g$; $\alpha = 20°$.

1. La barre MN est lâchée sans vitesse initiale sur le plan incliné. Après un parcours de longueur L, la mesure de sa vitesse donne $v = 2{,}8m.s^{-1}$. Calculer la longueur L.
2. Les points A et A' sont maintenant reliés par un fils de résistance R=0,2Ω , les résistances électriques des rails et de la barre étant négligeables. Lorsque la barre a parcouru la distance L, elle pénètre à l'instant t=0s, avec la vitesse v=2,8$m.s^{-1}$, dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme, verticale ascendant, d'intensité $B = 1T$.
   a)) Quelle est l'intensité I_O du courant qui apparait dans le circuit A'AMN à t=0s ?
   Indiquer sur un schéma très clair le sens de ce courant.
   b)) Quelles sont les caractéristiques de la force de Laplace $\overrightarrow{F_O}$ qui s'exerce sur la barre à t=0s ?
   c)) Faire l'inventaire de toutes les forces qui s'exercent sur le barre à t=0s et montrer que le vecteur accélération $\vec{a}$ est de sens opposé à $\vec{v}$. Expliquer qualitativement comment varie l'intensité du courant lorsque la barre continue à se déplacer dans le champ magnétique et comment évolue le mouvement, les rails étant supposés suffisamment longs.
3. La barre, toujours sur les rails incliné de l'angle α, acquiert maintenant dans le champ magnétique $\vec{B}$ un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\overrightarrow{v_1}$.
   a)) Quelle est alors l'intensité de la force électromagnétique $\overrightarrow{F_1}$ qui agit sur la barre ?
   b)) Calculer l'intensité I_1 du courant induit et la vitesse v_1.
   c)) Calculer la puissance dissipée par l'effet joule dans le conducteur et la puissance fournie par le poids. Conclure.



<u>*EXERCICE 11*</u>

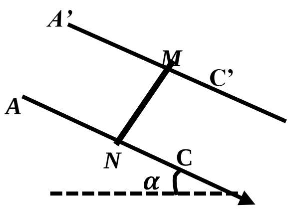
Une barre de cuivre MN homogène, de masse m et de longueur l peut glisser le long de deux rails métalliques AC et AC' contenus dans un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Pendant tout le mouvement, la barre MN reste toujours perpendiculaire aux rails et maintenir avec eux le contact électrique en M et N.

On donne: $g = 9{,}8m.s^{-2}$: $m = 60g$; $\alpha = 30°$; $l = 10cm$.

1. La tige MN est abandonnée sans vitesse initiale sur le plan incliné, a une vitesse $v = 1{,}20m.s^{-1}$ après un parcourt de longueur $L = 0{,}15m$.
   a)) Calculer l'intensité de la force de frottement qui s'exerce sur la tige.
   b)) Calculer l'accélération de la tige dans cette phase et en déduire la nature de son mouvement.
   c)) Établir les lois horaires du mouvement de la tige et en déduire le temps mis par la tige pour parcourir la distance L.

Dans la suite de l'exercice, on négligera la résistance de l'air.

2. On relie A et A' par un générateur G de f.é.m. E et par un conducteur ohmique de résistance $R = 1{,}20\Omega$ à t=0s, la tige MN pénètre avec une vitesse $v = 1{,}20m.s^{-1}$, dans un région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au à la surface AA'NM et dirigé vert le haut dont d'intensité $B = 1T$.
   Déterminer la f.é.m. E du générateur ainsi que le sens du courant dans la tige MN, quand celui-ci à un mouvement rectiligne uniforme dans la région où règne le champ $\vec{B}$.
3. On enlève le générateur et on y insère un ampèremètre en série avec un conducteur ohmique de résistance $R' = 0{,}20\Omega$ entre A et A'. A $t = 0$, la tige pénètre dans le champ magnétique uniforme $\vec{B}$ avec la vitesse $v = 1{,}20m.s^{-1}$, l'ampèremètre indique l'apparition du courant i.
   a)) Établir les expressions de la f.é.m. induit et du courant induit.
   b)) Quelles sont les caractéristiques de la force Laplace $\vec{F}$ qui s'exercice sur la tige.
   En déduire l'expression littérale de son accélération.
   c)) Au bout d'un certain temps, la barre atteinte un mouvement rectiligne uniforme.
   Calculer alors l'intensité maximale du courant induit correspondant et en déduire la vitesse limitée par la tige.



<u>*EXERICE 12*</u>

Deux rails métalliques parallèles et distants de l , sont reliés par une tige conductrice CD rectiligne, de résistance R .

Afin de fermer le circuit, une barre métallique, de masse m, parfaitement conductrice, est posée sur les rails, orthogonalement à ceux-ci.

Soient A et B les points de contact entre la barre et les rails. Cette barre peut effectuer un mouvement de translation sans frottement sur les rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ uniforme et constant avec $B_0 > 0$.

I. **Cadre horizontal dans un champ magnétique uniforme**

Le circuit ABCD est situé dans un plan horizontal et les rails sont maintenus parallèles à l'axe Ox. La barre est animée d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v}$(avec v>0) (figure 1).

La position de la barre est repérée par son abscisse DA = x.

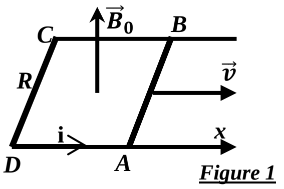


Figure 1

1. a)) Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, le flux Φ du champ magnétique à travers le cadre ABCD.

b)) Montrer que, dans la barre, les porteurs de charge sont soumis à l'action d'un champ électromoteur $\overrightarrow{E_m}$, dont on précisera.

c)) Préciser le signe du courant i induit dans le circuit ABCD et exprimer, en fonction de R, v, B_0et ℓ , l'intensité i de ce courant .

d)) Ce courant induit s'accompagne de forces dites « de Laplace » appliquées à toutes les portions du circuit. Donner les caractéristiques de cette force.

2. A l'instant initial t = 0, la barre est lancée avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$(avec v_0>0).

a)) Établir l'équation différentielle la vitesse v de la barre AB au temps t. Préciser l'expression de la vitesse v(t) au temps t.

b)) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction v(t).

c)) Une modification de la valeur de la résistance R peut-elle avoir une influence sur le mouvement de la barre ? Justifier.

II. Cadre incliné dans un champ magnétique uniforme et constant

Le cadre plan ABCD est maintenant incliné d'un angle α (constant) par rapport au plan Horizontal. La barre peut toujours effectuer un mouvement de translation sans frottement sur les rails (figure 2). A l'instant initial t = 0, la barre est abandonnée sans vitesse initiale. Soit $\vec{v}$' sa vitesse de translation au temps t.

La position de la barre est repérée par son abscisse DA = x'.

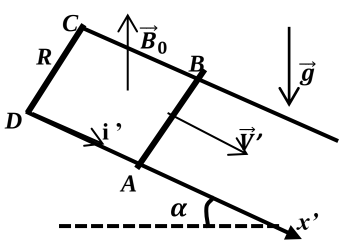


Figure 2

1. a)) Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, le flux Φ′ du champ magnétique à travers le circuit.

b)) Exprimer, en fonction de R, v′ ,B_0, ℓ et α, l'intensité du courant induit i' .

2. a)) Sur un schéma, faire l'inventaire, à t >0 , des forces qui s'exercent sur la barre et donner leurs caractéristiques.

b)) Donner l'expression vectorielle de la résultante $\vec{F'}$ des forces d'induction qui s'exercent sur la barre.

Établir alors l'équation différentielle liant la vitesse algébrique v′ au temps t.

c)) En déduire l'expression de v′(t) et calculer la vitesse limite v_{limite} atteinte par la barre AB en son mouvement.

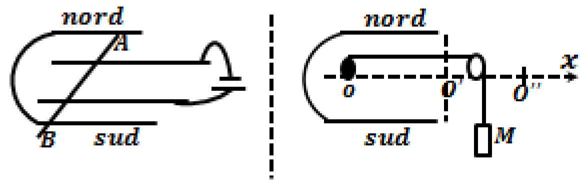
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction v′(t).

EXERCICE 13

On considère un conducteur mobile cylindrique de longueur L = 8 cm et de masse m = 8g, posé sur des rails conducteurs, écartés d'une longueur l = 6 cm. Les rails sont reliés aux bornes d'un générateur de courant continu d'intensité I = 6 A.

Le circuit est soumis au champ magnétique uniforme B = 0,1 T.

On néglige les frottements.



1. Reproduire le schéma en indiquant le sens du champ magnétique.
2. Déterminer le sens et la direction de la force de Laplace qui s'exerce sur le conducteur AB.
3. A l'aide d'un fil inextensible enroulé, de masse négligeable, et d'une poulie, on attache une masse M au conducteur AB. Quelle doit être la valeur de la masse M pour que le conducteur AB soit en équilibre ?
4. On enlève le fil et la masse M, puis on permute les bornes du générateur. On considère que le conducteur mobile est initialement au repos en O et est soumis au champ magnétique sur la longueur OO' = 4 cm.

a)) Déterminer la nature du mouvement du conducteur AB sur la longueur OO' (sans application numérique).

b)) Exprimer littéralement puis numériquement l'équation horaire v(t) de ce mouvement.

c)) Exprimer littéralement puis numériquement l'équation horaire x(t) de ce mouvement.

d)) Calculer la vitesse du conducteur mobile en O'.

e)) Combien de temps met le conducteur AB pour aller de O à O" sachant que O'O" = 10 cm.

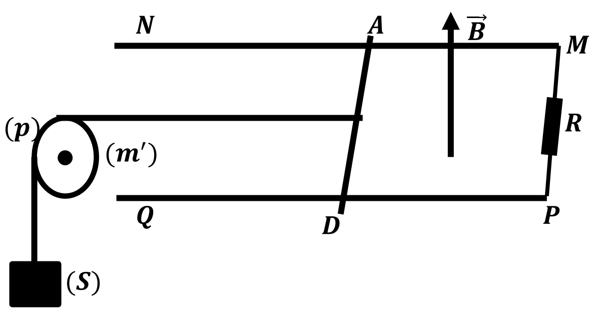
EXERCICE 14

Deux rails parallèles MN et PQ sont reliés par l'intermédiaire d'un conducteur ohmique de résistance R. Une tige conductrice AD, horizontale de masse m, et de longueur l, peut glisser sans frottement sur les rails tout en restant perpendiculaire à ces derniers. Au milieu de la tige AD, est attaché un fil conducteur, inextensible, parallèle aux rails relié à un solide S de masse M. Le fil passe par la gorge d'une poulie de masse m' et de rayon r.

Le circuit est entièrement plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme vertical dirigé vers le haut.

On néglige tous les frottements.

1. A l'instant t=0s, on abandonne le solide S sans vitesse initiale.
   a)) Montrer qu'on observe le phénomène d'induction électromagnétique.
   b)) Établir l'expression de la f.é.m. induit en fonction de B, l et v (vitesse de la tige à la date t).
   En déduire l'expression et le sens du courant induit.
   c)) Donner les caractéristiques de la force de Laplace s'exerçant sur la tige AD.
2. a)) En utilisant la R.F.D, établir l'expression de l'accélération a de la tige en fonction de M, m', g, l, R et v.
   En déduire la nature du mouvement de la tige.
   b)) Montrer que la tige atteinte au bout d'un certain temps une vitesse limité $v = v_{Limiée}$.
   Donner l'expression de $V_{Limiée}$ en fonction de M, B, l, R et g.
3. La tige se déplace maintenant dans le champ magnétique $\vec{B}$ d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $v = v_{Limiée}$.
   a)) Déterminer l'intensité du i du courant induit.
   b)) Calculer la puissance électrique consommée dans le conducteur ohmique.
   c)) Calculer la puissance mécanique développée par le poids du solide. En déduire le rendement du moteur. Justifier.



EXERCICE 15

I. Une tige métallique CD peut se déplacer en translation sur deux rails horizontaux conducteurs.
La vitesse $\vec{v}$ est parallèle aux rails (fig1).

1. Comment orienter le circuit pour avoir un courant induit positif lorsque $v_x = v > 0$. Quel est alors le signe de φ et celui de $\frac{d\varphi}{dt}$ puis en déduire celui de e_m ?
2. Calculer l'intensité du courant induit si R=2Ω ; v= $4m.s^{-1}$; $CD = l = 10cm$; $B = 0{,}5T$.
3. Calculer la puissance de la force de Laplace dans les conditions précédentes.
4. Donner l'expression de la f.é.m. induit e(t). Si la tige a un mouvement sinusoïdal de vitesse v =4cos$(2\pi t)$.
   Calculer sa valeur maximale et sa fréquence.
   En déduire dans ce cas l'expression de l'intensité induit du courant i(t) et donner sa valeur efficace.

II. On enlève la résistance R et on relie les extrémités des rails par un fil électrique de résistance négligeable.
On incline le plan des rails d'un angle $\alpha = 10°$ sur l'horizontal.
La tige CD de masse $m = 20g$ est attachée en son milieu A et est relié à un solide (S) de masse $M = 0{,}1kg$ par l'intermédiaire d'un fil inextensible de masse négligeable passant sur la gorge d'une poulie de rayon $r = 5cm$ et de moment d'inertie $J_O = 10kg.m^2$.
La valeur du champ magnétique $\vec{B}$ et l'intensité du courant calculée en 2., restent inchangeable.

1. Calculer l'accélération de la tige et en déduire son équation horaire sachant que à t=0 ; v_0=0
2. Calculer la distance parcourue par le centre d'inertie de CD, dans le champ $\vec{B}$ à l'instant $t = 0{,}3s$ après le départ.
   Quelle est alors la vitesse acquise ? En déduire le nombre de tours effectués par la poulie à cet instant.
3. A la date $t = 0{,}3s$, le fil casse et on applique tangentiellement une force $\vec{F}$ d'intensité constante $F = 0{,}74N$, à la poulie pour l'arrêter après une durée Δt.

a)) Calculer le moment supposé constante du couple de frottement.
b)) Démontrer que le mouvement de la poulie après la rupture du fil, est uniformément décéléré.
En déduire alors la décélération angulaire correspondant.
c)) Calculer le nombre de tours effectués par la poulie pendant cette phase et en déduire la durée de freinage Δt.

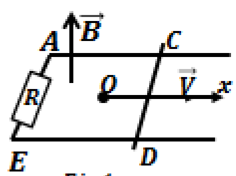


Fig1

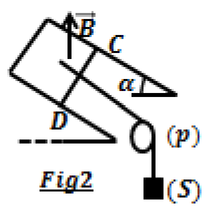


Fig2

EXERCICE 16

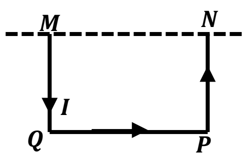
Soit une bobine plate B, circulaire comportant $N_1 = 10 spires$ de diamètre $d_1 = 5cm$.

Elle est parcourue par un courant d'intensité I=6A.

1. a)) Représenter sur un schéma clair, le vecteur moment magnétique de la bobine.
   Calculer numériquement ce moment magnétique.
   b)) Calculer l'inductance L du solénoïde et la valeur du champ magnétique B créé au centre de la bobine sachant que la bobine a une longueur l=45cm.
2. La bobine plate B est placée à l'intérieur d'un long solénoïde S comportant $n = 10^3$ spires par mètre et parcourue par un courant d'intensité I=12A, de façon que le flux qui la traverse soit maximal. On donne : $d_2 = 15cm$.
   Représenter sur un schéma clair le vecteur surface $\vec{S}$ et le vecteur champ $\vec{B}$.
   En déduire alors la valeur de ce flux maximal Φ_{max}.
3. On fait tourner la bobine autour d'un axe (Δ) perpendiculaire à celui du solénoïde avec une vitesse $angulaire\ 20tr.s^{-1}$.
   a)) Donner les expressions, du flux Φ(t), du moment du couple électromagnétique Γ(t), de la force électromotrice inductance dans la bobine e(t) en fonction du temps.
   On prendra à $t = 0, \Phi(t = 0) = \Phi_{max}$.
   b)) En déduire la valeur du flux efficace Φ_{eff}(t) et la valeur efficace de la f.é.m. e_{eff}.
   c)) Déterminer les angles qui caractérisent la position d'équilibre de la bobine puis commenter chaque valeur trouvée, en tenant compte du flux **Φ**.
   d)) Calculer à la date t=0,5s ; le flux **Φ**, la force électromotrice e et le moment du couple électromagnétique Γ.

EXERCICE 17

Un cadre rectangulaire indéformable MNPQ comportant N spires, de dimension $MN = QP = a\ et\ NP = MQ = b$. Il est mobile sans frottements autour d'un axe fixe horizontal (Δ) passant par M et N. Des fils très souples réunissent les points A et C à un générateur qui fait circuler un courant I dans le sens MN.



1. Donner les forces soumises au cadre à sa position d'équilibre. Quelle est alors la position dans l'espace du plan MQPN ?
2. En déduire les forces de Laplace sur les trois côtés du cadre placé dans un champ magnétique $\vec{B}\ uniforme$.
   Indiquer, en justifiant, la réponse, dans lequel de trois cas suivants le cadre quitte sa position d'équilibre initiale.
   a)) $\vec{B}$ est parallèle à $\overline{QP}$ et de même sens que le courant dans QP.
   b)) $\vec{B}$ a une direction perpendiculaire au plan vertical contenant (Δ) et dirigé de l'arrière vers l'avant.
   c)) $\vec{B}$ est vertical, sens de bas vers le haut.
3. Dans le cas où le cadre prend une nouvelle position d'équilibre écarté du plan vertical d'un angle α.
   a)) Déterminer les caractéristiques de la force de Laplace appliquée à chacun de trois côtés.
   b)) Écrire que la somme algébrique des moments de ces forces par rapport à l'axe est nulle et en déduire la valeur de α.

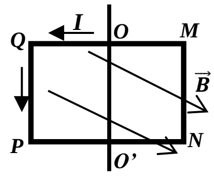
Données : $a = 13\text{cm}; \text{b} = 5\text{cm}; \text{I} = 3\text{A}; \text{B} = 0{,}6\text{T}$;
masse volumique du conducteur $\mu = 5.10^{-2}\text{kg.m}^{-1}$.

EXERCICE 18

Un cadre rectangulaire indéformable comportant N spires identiques, de dimension $MN = QP = a\ et\ NP = MQ = b$.

Il est libre de tourner, dans un champ magnétique $\vec{B}$ horizontal, autour d'un axe vertical passant par les milieux O et O' des cotés MQ et NP. Le cadre est parcouru per un courant $I = 4{,}5mA$.

Initialement, le coté MQ fait un angle $\theta_0 = \pi/6$ rad.



1. a)) Représenter sur le schéma en respective puis sur un schéma vue de dessus, les forces qui s'exercent sur l'un des côtés du cadre et Calculer la norme de ces forces.
   Quels sont les effets de rotation de ces forces ?
   b)) Quelle est la position d'équilibre stable du cadre ?
   c)) Calculer le flux du vecteur $\vec{B}$ à travers le cadre dans la position initiale, puis dans la position d'équilibre.
2. Le cadre est maintenant en circuit ouvert. On le fait tourner dans le sens positif en raison de $100\pi\text{rad.s}^{-1}$.
   a)) Expliquer pourquoi le cadre est le siège d'une f.é.m. e.
   Donner l'expression de cette f.é.m. et calculer sa valeur maximal.
   b)) Déterminer l'expression du couple moteur, qui agit sur le carde .
3. Le cadre est maintenant suspendu à un fil de torsion vertical passant par le milieu O du coté MQ. Cette cadre est toujours placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme ; horizontal et parallèle au plan du cadre, lorsque celui-ci n'est pas parcouru par aucun courant.
   Le cadre est toujours parcourus par le courant.

Les fils d'amenés du courant sont très souples pour ne pas gêner le mouvement du cadre.

Écrire la condition d'équilibre du cadre et en déduire la constante de torsion C du fil.

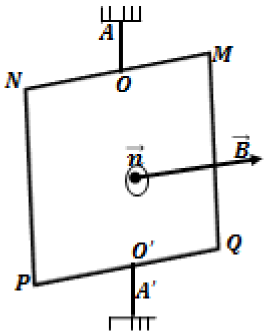
Données: a = 2,5cm ; b =4,0cm ; N=100 ; B = 1,2.10^{-2}T

EXERCICE 19

Un cadre rectangulaire indéformable comportant N spires identiques, de dimension $MN = QP = a \text{ et } NP = MQ = b$.

Ce cadre est maintenu par deux fils OA et O'A' tendus selon la direction vertical OO'. Le fil OA a une constante de torsion C, le fil O'A' est sans torsion C, le fil O'A' est sans torsion.

Dans tout le problème ce cadre restera en circuit ouvert.



1. On écarte le cadre de sa position d'équilibre d'un angle $\frac{\pi}{4} rad$ et on l'abandonne à t=0, sans vitesse initiale. La position du cadre est repérée par $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

a)) Déterminer φ , sachant que C=1,00.10^{-8}$S.I$ et

$$J = J_{AA'} = 8{,}0.10^{-9} kg.m^2$$

b)) Calculer la vitesse angulaire du cadre lors du passage par sa position d'équilibre.

2. Le cadre est en fait placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme de direction horizontale et parallèle à sa position d'équilibre.

a)) Expliquer pourquoi il y a apparition, lors des oscillations d'une force électromotrice induite dans le cadre.

b)) Établir l'expression de cette force électromotrice en fonction de θ et sa dérivée $\dot{\theta}$ par rapport au temps.

c)) Pour quelles positions du cadre cette force électromotrice change- t- elle de signe.

d)) Calculer la valeur absolue de cette force électromotrice lors du passage du cadre par sa position d'équilibre.

Constater qu'il s'agit d'un maximum.

On donne : a=2,5cm ; b=4,0cm ; N=100 ; B=1,0.10^{-2}T.

EXERCICE 20

Un cadre rectangulaire de longueur L =12 cm et de largeur $l = 6\ cm$, comporte N = 250 spires.

Le champ magnétique a pour intensité $B = 0{,}1T$.

Le cadre tourne en effectuant n = 3000 tours par minute.

1. Calculer la force électromotrice induite dans le cadre sur une période.
2. Le cadre est, à présent, fermé, par l'intermédiaire d'un système ''bagues balais'', sur une résistance pure R.

Il en résulte un courant électrique dont la valeur instantanée est i.

Sachant que le cadre a une résistance r et une self L, trouver, à partir de la loi d'Ohm, la relation entre $i , t, R, r \text{ et } L$.

On néglige par la suite $r \text{ et } L$, calculer le courant i sachant que R = 100**Ω**.

3. Trouver l'expression du couple électromagnétique qui s'exerce sur le cadre. Calculer sa valeur moyenne sur une période.
4. Ce couple est opposé au couple moteur, calculer la puissance moyenne qu'il faut fournir pour maintenir le mouvement du cadre.

Auto Induction

Rappels sur l'Auto Induction

1. Loi de modération de Lenz

Le phénomène d'induction électromagnétique est tel que par ses effets il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

(Par ses effets, le courant induit s'oppose à la cause qui lui a donné naissance).

2. Loi de Faraday

a)) Flux magnétique Φ

Soit une surface orientée S (grâce à la règle de la main droite) , soit un champ magnétique $\vec{B}$ qui traverse cette surface.

Alors le flux du champ $\vec{B}$ à travers la surface S s'écrit:

$$\Phi = \vec{B}.\vec{n}S \ \ (Le\ flux\ s'exprime\ en\ Weber\ (Wb)\ )$$

b)) Expression de la loi de Faraday

Cette loi exprime le fait que le courant induit apparaît par l'intermédiaire d'une force électromotrice induite.

Et celle-ci provient de la variation du flux magnétique à travers la surface orientée constituée par le circuit électrique.

$$On\ écrira\ donc: e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\begin{cases} e: force\ électromotrice\ induite\ en\ Volt\ (V) \\ \Phi\text{: flux du champ magnétique à traversla surface} \\ \text{du circuit en Weber (Wb)} \end{cases}$$

Si c'est la variation du flux magnétique qui permet la création d'un courant induit, pour créer celui-ci, on peut faire varier S (en déformant le circuit) ou bien $\vec{B}$ (en approchant ou éloignant la source du champ, ou bien en changeant sa direction, en changeant sa valeur).

Orientation du circuit, f.é.m. et courant induit

L'orientation du circuit, qui permet de définir la surface orientée S, donne son orientation à la f.é.m. et ainsi le sens du courant induit dans le circuit.

Remarque

Le signe $(-)$ qui apparaît dans la loi de Faraday montre qu'il y a opposition entre la f.é.m. induite et la variation de flux, ceci est la traduction de la loi de Lenz : les effets s'opposent aux causes.

3. Auto-induction et inductance d'une bobine

a)) Phénomène d'auto-induction

Un courant qui passe dans une spire créé un champ magnétique.

Si ce courant varie, le champ magnétique varie également.

Ainsi, on est en présence d'un champ magnétique variable à l'intérieur d'un conducteur, la bobine elle-même!

Il y a donc phénomène auto-induction.

b)) Caractéristique de $\vec{B}$ au centre du solénoïde

- direction : parallèle à l'axe du solénoïde
- sens : de la face sud vers la face nord
- intensité :

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l} \quad où \begin{cases} N: nombre\ de\ spire\ dusolénoïde \\ i: le\ courant\ qui\ la\ traverse\ et \\ l:\ sa\ longueur \end{cases}$$

c)) Flux propre et inductance L

Le flux propre à travers toute la bobine est:

$$\Phi_P = NBS\ \ avec\ \ B = \mu_0 \frac{N}{l} i \ \Rightarrow\ \Phi_P = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i$$

- par définition : $\Phi_P = Li$

$$\Phi_P = Li \ \Rightarrow Li = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i \ \Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

$$Or\ S = \pi r^2 \ \Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2 \pi r^2}{l}$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}\ \ or\ \frac{N}{l} = n \Rightarrow N = nl \ \Rightarrow L = \mu_0 \frac{(nl)^2 S}{l} = \mu_0 n^2 l \pi r^2$$

$$D'où:\ \ L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \mu_0 \frac{N^2 \pi r^2}{l} = \mu_0 n^2 l \pi r^2$$

L'inductance s'exprime en Henry (H)

4. Relation entre u et i pour une bobine

a)) La f.é.m. auto-induite

La f.é.m. auto-induite s'écrit donc :

$$e = -\frac{d\Phi_P}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt} \Rightarrow e = -L\frac{di}{dt}$$

b)) Bobine idéale

Une bobine idéale est une bobine dont la résistance est nulle.

La relation entre u et i pour une bobine idéale est :

$$u = -e \Rightarrow u = L\frac{di}{dt}$$

Conséquences :

En régime continu la dérivée de i par rapport au temps est nulle et donc la tension aux bornes de la bobine est nulle aussi :

La bobine idéale se comporte comme un court-circuit.

c)) Loi d'Ohm pour une bobine réelle

Bobine munie d'une résistance interne r.

$$u = u_L + u_r = ri + L\frac{di}{dt}$$

5. Energie emmagasinée par une bobine

La bobine parfaite ne produit pas de chaleur, pas d'effet Joule.

En régime variable elle absorbe de l'énergie qu'elle stocke

Sous forme magnétique et qu'elle peut ensuite restituer.

L'énergie emmagasinée dans une bobine a pour expression:

$$E_B = \frac{1}{2} L I^2$$

Exercice sur l'Auto Induction

Donnée : la perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} H.m^{-1}$

EXERCICE 01

1. Une bobine de longueur ℓ=40cm, de rayon r=2cm et d'inductance L, comportant 250spires et parcourue par un courant d'intensité I= 5A.

   Cette bobine est considère comme un solénoïde.

   a)) Déterminer les caractéristiques du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ créé au centre du solénoïde par le passage du courant I.

   b)) Calculer l'inductance L du solénoïde.

   c)) Calculer le flux propre du champ $\vec{B}$ à travers ce bobine.

2. On fait alors tourner la bobine autour d'un axe perpendiculaire à (Δ) avec une fréquence N=50Hz.

   a)) Donner l'expression du flux Φ(t) sachant que à l'instant t=0, $\Phi(t=0)= \Phi_{max}$.

   b)) Montrer que la bobine est le siège d'une f.é.m. d'auto-induction. Donner son expression e(t).

   c)) En déduire la valeur efficace cette f.é.m. et en déduire la période T de ce mouvement.

EXERCICE 02

On considère une bobine de longueur l=12cm, de rayon r=1cm, comportent n=2500 spires par mètre. Cette bobine est un solénoïde long par rapport au rayon des spires.

1. La bobine est traversée par un courant d'intensité I.

   Le champ magnétique $\vec{B}$ au centre de la bobine est $B=10^{-2}$ T.

   a)) Calculer l'inductance L de la bobine.

   b)) Calculer le courant I et le flux d'induction magnétique à travers la bobine.

2. La bobine est maintenant en circuit Ouvert, dans le champ magnétique uniforme $\vec{B}$, un dispositif permet de faire tourner librement la bobine autour d'un axe vertical passant par son centre, avec une vitesse angulaire ω=4πrad. s^{-1}.

   a)) A l'instant t=0, l'axe de la bobine est parallèle à $\vec{B}$.

   La normale aux spires étant orientée dans le sens de $\vec{B}$.

   Calculer le flux Φ_0 à travers la bobine.

   b)) A l'instant t, la bobine a tourné d'un angle α.

   Exprimer le flux Φ(t) à travers la bobine.

   c)) Calculer le flux Φ(t) à travers la bobine à la date t=0,25s.

3. a)) Montrer que la bobine est siège d'un phénomène d'induction électromagnétique.

   b)) Donner l'expression de la force électromotrice induit e(t) à la date t. Calculer sa valeur efficace.

EXERCICE 03

Une bobine de section circulaire est constituée par un fil de longueur λ bobiné régulièrement. On suppose que les spires sont pratiquement situées dans un plan perpendiculaire à l'axe du solénoïde. La longueur de la bobine vaut l=1000mm, son inductance est L=85mH.

1. Calculer la longueur λ du fil de cuivre.
2. Cette bobine est montée en série avec un conducteur ohmique aux bornes d'un générateur de tension continue.

   Lorsqu'on ferme le circuit par l'intermédiaire d'un interrupteur K, l'intensité du courant passe de 0 à sa valeur maximale $I_{max} = 2A$ une durée t=50ms. Calculer la valeur moyenne de la force électromotrice f.é.m. d'auto-induction.
3. On ouvre maintenant l'interrupteur K.

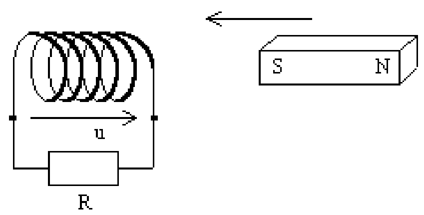
   a)) Que peut-on observer ?

   b)) Comment annuler cet inconvénient en utilisant une diode et un conducteur ohmique. c)) Quel est le rôle du conducteur ohmique dans cette modification ?
4. Calculer l'énergie électromagnétique libérée dans le circuit lors de l'ouverture de l'interrupteur.

EXERCICE 04

Une bobine a une résistance R à ses bornes.

On approche le pôle sud d'un aimant droit comme indiqué sur la figure ci- contre.



1. Quel est le phénomène qui se produit dans la bobine ?
2. Quelle face la bobine présentera-t-elle devant le pôle Sud de l'aimant (refaites un dessin sur votre copie) ?

   En déduire le sens de i dans la bobine, puis le signe de la tension u comme représentée ci-dessus.
3. Nommez et citez les deux lois d'électromagnétisme se rapportant à l'expérience.
4. Lorsque l'aimant se sera immobilisé tout près de la bobine, que vaudra la tension u ?
5. Si on refait l'expérience sans connecter la résistance à la bobine, qu'est-ce qui change ?

EXERCICE 05

Un solénoïde, de longueur l très grande devant son rayon, comporte N spires enroulée sur un cylindre de section.

1. Rappeler la définition de l'inductance propre L de ce solénoïde, puis établir son expression en fonction de N, S et l .

   On donne N=10.000spires ; l=0,5m ;S=40cm^2.

2. Ce solénoïde est parcouru par un courant dont l'intensité varie de 0 à10A en une durée t=5s.
   a)) Etablir, en fonction du temps l'expression du champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde.
   b)) On place à l'intérieur du solénoïde une bobine de 500spires ayant même axe, de résistance r=20**Ω**, constitué par un fil conducteur enroulé sur un cylindre de rayon R=1cm.
   Calculer l'intensité du courant induit dans la bobine intérieur1.

<u>Exercice 06</u>

Le courant i dans une bobine est de forme triangulaire, et varie entre –80 mA et + 80 mA, en 250 µs. A t= 0, i est égal à –80 mA.

1. Représentez l'évolution du courant i en fonction du temps, pour t variant de 0 à 500 µs.
2. La bobine possède une inductance L= 220 mH et une résistance interne r = 0.5Ω . Donnez l'expression de la tension u aux bornes de cette bobine, en fonction de L, r,i et$\frac{di}{dt}$ si on adopte la convention récepteur.
3. Que devient cette expression si on considère la bobine idéale ?

Pour la suite, on considère la bobine idéale.

4. Représentez l'évolution de la tension u en fonction du temps, pour t variant de 0 à 500 µs. Interpréter.

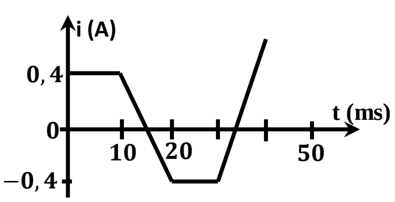
<u>*EXERCICE 07*</u>

Un solénoïde AB de résistance négligeable, de longueur l=2m, comportant 100spires, de rayon r=5cm.
Il est traversé par un courant d'intensité I=2A.

a)) Le solénoïde est –il le siège d'une f.é.m. d'auto-induction ? Justifier votre réponse.
b)) Faire un schéma et donner les caractéristiques du vecteur champ $\vec{B}$ créé par le passage du courant.
c)) Etablir l'expression de l'inductance L du solénoïde puis calculer sa valeur.

2. Le solénoïde est représenté par un courant dont l'intensité i varie avec le temps comme l'indique la figure ci- dessous.
   On prendra L=5mH.
   a)) Pour quels intervalles de temps y a-t-il phénomène d'auto-induction ?
   b)) Donner l'expression i(t) du courant électrique traversant la bobine sur chaque intervalle de temps.
   c)) En déduire e(t) et u(t) sur chaque intervalle de temps.
   d)) Déterminer l'expression de l'énergie emmagasinée dans le solénoïde pour chacun des intervalles de temps

.



<u>*EXERCICE 08*</u>

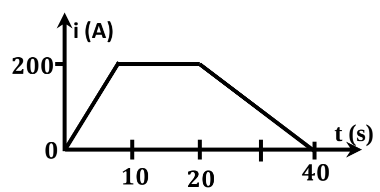
On considère un solénoïde de longueur l comportant N spires de surface S.

1. Le solénoïde est parcourue par un courant continu I=5A.
   Déterminer les caractéristiques du champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde.
   On donne l=0,4m ; N=400 ; S=10cm^2.
2. Le solénoïde est parcouru par un courant d'intensité
   $$i(t) = 2t^2 - 2t.$$
   a)) Calculer l'inductance L du solénoïde.
   b)) Quelle est l'expression de la f.é.m. d'auto- induction et quelle est sa valeur 5s après la fermeture du circuit ?
   c)) Quelle est l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine précédente pendant les 5 premières secondes ?
3. Le solénoïde est maintenant parcouru par un courant dont l'intensité varie en fonction du temps selon la loi
   $$i(t) = 2\sqrt{2}\cos(100\pi t)$$
   a)) Déterminer l'expression de la f.é.m. d'auto- induction en fonction du temps.
   b)) En déduire la valeur efficace de cette tension alternative sinusoïdale.

<u>*EXERCICE 09*</u>

Dans un laboratoire de recherche, une bobine servant à créer des champs magnétiques très intenses est assimilés à un solénoïde de longueur l=1m et comportant N=1000spires et de rayon R=20cm. On appellera A et B les deux bornes de la bobine et on l'orientera de A vers B.

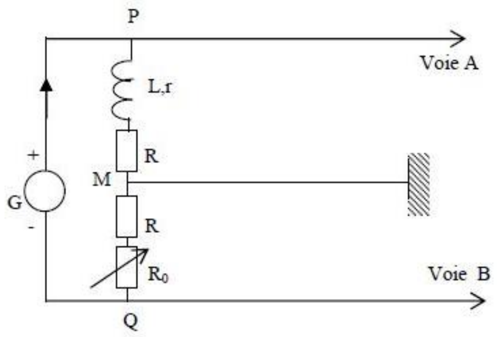
1. Donner les caractéristiques du champ magnétique dans la bobine créé par le passage du courant d'intensité i=200A.
2. a)) Etablir l'expression de l'inductance L en fonction de N, l et R ; et calculer sa valeur numérique.
   b)) Comment augmenter L.
   c)) Calculer le flux propre du circuit.
3. La bobine de résistance r=10Ω est parcourue par un courant dont l'intensité varie avec le temps, comme l'indique le schéma ci-contre.
   a)) Donner le schéma électrique équivalent de la bobine.
   b)) Sur le chaque intervalle de temps, donner : la f.é.m. induite et la tension $U_{AB}(t)$ aux bornes de la bobine.
   c)) Représenter graphiquement $U_{AB}(t)$ en fonction du temps.
4. Calculer l'énergie magnétique maximale emmagasinée.



EXERCICE 10

Le montage représenté sur la figure ci-dessous comporte :

- un générateur approprié faisant circuler un courant d'intensité variable i(t) entre P et Q ;
- une bobine d'inductance L et de résistance r ;
- deux conducteurs ohmiques de résistance R=100 Ω ;
- un conducteur ohmique de résistance variable R_0.



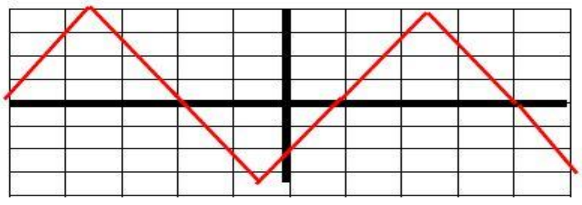
L'oscilloscope bi-courbe utilisé comporte une touche « ADD » permettant lorsqu'elle est actionnée, d'observer sur l'écran la tension u_{ADD} somme des tensions reçues sur les voies A et B :

$$U_{ADD} = u_{PM} + u_{QM}$$

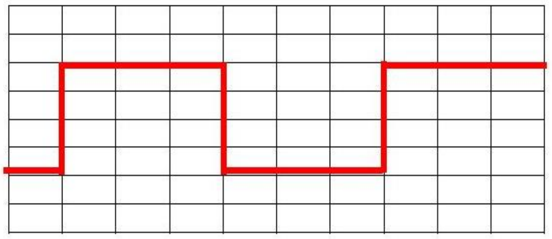
1. Etablir les expressions de $u_{PM}\ \ et\ \ u_{QM}$ en fonction de l'intensité i du courant. En déduire l'expression de u_{ADD}.
2. La touche « ADD » étant actionnée, montrer qu'il existe une valeur R_0 pour laquelle la courbe observée sur l'écran est la représentation de la fonction $L\frac{di}{dt}$.
3. La condition de la question 2. étant réalisée, on mesure R_0 avec un ohmmètre et on trouve $R_0 = 9\Omega$.

Les figures ci-dessous représentant respectivement $u_{QM}(t)$ et $u_{ADD}(t)$ sont observées successivement sur l'écran de l'oscilloscope avec les réglages suivants :

- Sensibilité sur les deux voies : 1V/division.
- Base de temps : 0,2 ms/division.
- En l'absence de tension sur les deux voies les traces horizontales sont au centre de l'écran .



Courbe 1 : $u_{QM}(t)$



Courbe 2 : $u_{ADD}(t)$

a))) Justifier sans calcul la forme de $u_{ADD}(t)$ à partir de $u_{QM}(t)$.

b)) Calculer la période et la fréquence du courant débité par le générateur.

c)) Montrer que l'on a :

$$u_{ADD} = \frac{L}{R+R_0}\frac{du_{QM}}{dt}$$

Calculer la valeur numérique de l'inductance L de la bobine.

Dipôle (R.L)

Rappels sur le dipôle (R.L)

I. Rappels

1. Tension aux bornes de la bobine

Soit une bobine d'inductance L et de résistance interne r :

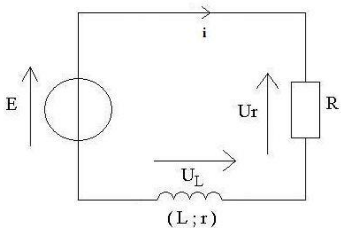
$$U_L = L\frac{di}{dt} + ri$$

2. Constante du temps du dipôle (R.L)

La constante de temps τ, en seconde (s), représente le temps nécessaire pour que l'intensité du circuit atteigne 63 % de sa valeur maximal : $\tau = \frac{L}{R_T}$ où $R_T = Résistance\ totale\ du\ circuit$

II. Réponse du dipôle (R.L) à un échelon de tension

1. Installation du courant



a)) Equation différentielle

A la date t=0, on ferme l'interrupteur K.

D'après la loi de maille :

$$E = U_R + U_L \ \ or\ U_R = Ri\ \ et\ U_L = L\frac{di}{dt} + ri$$

$$Donc : E = Ri + L\frac{di}{dt} + ri \Longrightarrow E = L\frac{di}{dt} + (R + r)i$$

$$Posons\ R_T = R + r \ \Longrightarrow\ E = L\frac{di}{dt} + R_T i \ (1)$$

C'est l'équation différentielle de l'installation du courant i dans le dipôle (R.L).

b)) Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle à l'établissement du courant admet comme solution : $i(t) = Ae^{-\alpha t} + B$

$\frac{di}{dt} = -\alpha Ae^{-\alpha t}$: dans (1) on a : $E = -L\alpha Ae^{-\alpha t} + R_T(Ae^{-\alpha t} + B)$

$$\Rightarrow E - BR_T - A(L\alpha - R_T)e^{-\alpha t} = 0$$

$$E - BR_T = 0\ et\ \ A(L\alpha - R_T)e^{-\alpha t} = 0$$

$$E - BR_T = 0\ et\ L\alpha - R_T = 0\ car\ Ae^{-\alpha t} \neq 0$$

$$soit\ B = \frac{E}{R_T}\ et\ \alpha = \frac{R_T}{L} \quad or\ \tau = \frac{L}{R_T}$$

$$i(t) = Ae^{-\frac{R_T}{L}t} + \frac{E}{R_T} \quad or\ à\ t = 0\ on\ a: i = 0$$

$$A + \frac{E}{R_T} = 0 \Longrightarrow A = -\frac{E}{R_T}$$

$$D'où : \ i(t) = \frac{E}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{R_T}{L}t}\right) = \frac{E}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Expression de $U_L(t)$

$$U_L = L\frac{di}{dt} + ri\ or\ \frac{di}{dt} = \frac{E}{L}e^{-\frac{t}{\tau}} \Longrightarrow U_L = Ee^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{rE}{R_T}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$U_L(t) = \frac{rE}{R_T} + E\left(1 - \frac{r}{R_T}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2. Rupture du courant

Quand l'intensité a atteint son seuil maximal, on ouvre l'interrupteur K et on considère l'ouverture de l'interrupteur comme la date t=0.

1. Equation différentielle de la rupture du courant

La loi d'additivité de tensions

$$U_R + U_L = 0\ \ or\ U_R = Ri\ \ et\ U_L = L\frac{di}{dt} + ri$$

$$soit \quad Ri + L\frac{di}{dt} + ri = 0 \Longrightarrow L\frac{di}{dt} + (R + r)i = 0$$

$$Posons\ R_T = R + r \ \Longrightarrow\ \frac{di}{dt} + \frac{R_T}{L}i = 0\ (1)$$

2. Solution de l'équation différentielle : $i(t) = Ae^{\alpha}t$

$\frac{di}{dt} = \alpha Ae^{\alpha t}$: dans (1) on a : $\alpha Ae^{\alpha t} + \frac{R_T}{L}Ae^{\alpha t} = 0$

$$\Rightarrow A\left(\alpha + \frac{R_T}{L}\right)e^{\alpha t} = 0 \Longrightarrow \alpha + \frac{R_T}{L} = 0 \Longrightarrow \alpha = -\frac{R_T}{L}$$

$$i(t) = Ae^{-\frac{R_T}{L}t} or\ à\ t = 0\ on\ a: i = I_0 = \frac{E}{R_T}$$

$$i(0) = A = \frac{E}{R_T} = 0 \Longrightarrow A = \frac{E}{R_T}$$

$$D'où : \ i(t) = \frac{E}{R_T}e^{-\frac{R_T}{L}t} = \frac{E}{R_T}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Tension aux bornes de la bobine :

$$U_L = L\frac{di}{dt} + ri\ or\ \frac{di}{dt} = -\frac{E}{L}e^{-\frac{t}{\tau}} \Longrightarrow U_L = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{rE}{R_T}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

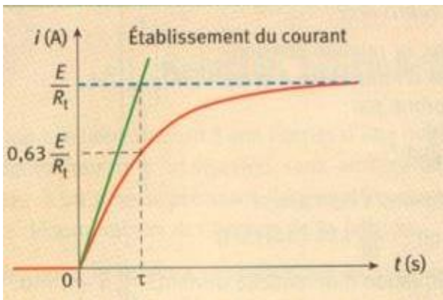
$$U_L(t) = E\left(\frac{r}{R_T} - 1\right)Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

III. Energie emmagasinée dans la bobine

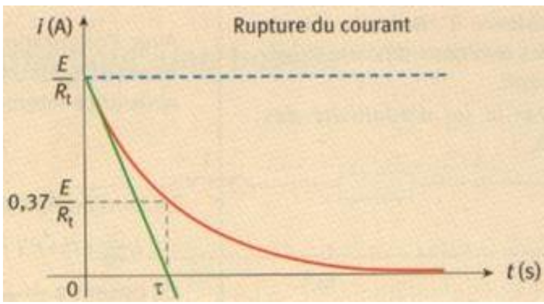
L'énergie emmagasinée par une bobine est donnée par la relation suivante : $E_B = \frac{1}{2}Li^2$

IV. Etude graphique

Courbe de l'établissement du courant



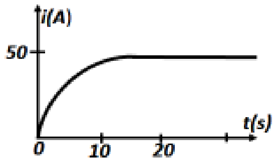
Courbe de rupture du courant



Exercices Sur le Dipôle (R.L)

EXERCICE 01

On branche en série un générateur continu de f.é.m. E et de résistance r’, une bobine de résistance r et d’inductance L, ainsi qu’un interrupteur K.



1. Faire un schéma du montage.

2. a)) Etablir la relation qui relie i et $\frac{di}{dt}$ aux grandeurs caractérisant le circuit. On posera R = r + r’.

b)) En déduire : la relation donnant I_0, l’intensité du courant en régime permanent et la valeur de $\frac{di}{dt}$ à l’instant t=0.

3. Rappeler l’expression de la constante de temps du circuit et donner sa signification physique.

4. On relie $i(t)$ dans le circuit (schéma ci-contre).
Déterminer, à partir du graphique :

a)) La valeur de la résistance totale du circuit, sachant que E=6V ;

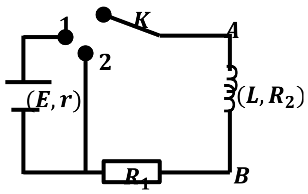
b)) La constante du temps et la valeur de l’inductance L.

EXERCICE 02

Une bobine d’inductance L=40mH est monté en série avec une résistance R_1 selon le schéma ci-dessous :

On admet que la bobine possède une résistance interne R_2.

Un générateur de f.é0m. E=12V et le résistance interne r=1*Ω*.



I. Établissement du courant

A l’instant t=0, K est à la position1.

1. Quel est le rôle de l’interrupteur K sur le circuit.

2. Quel est phénomène physique se produit-il dans le circuit ? Expliquer pourquoi.

3. Le circuit étudié peut être caractérisé par sa constante du temps τ. Pour le circuit (R ;L) on pose $\tau = \frac{L}{R}$ où R est la résistance équivalente du circuit. Donner l’expression de R et calculer sa valeur numérique si l’intensité du courant en régime permanente est 1,5A. En déduire τ.

4. a)) Etablir l’équation différentielle liant E, R et i.

b)) Soit $i(t) = \alpha e^{-kt} + \beta$, solution de cette équation différentielle. En déduire les constantes α, β et k.
Donner alors l’expression de i(t) en fonction de I_{max} et τ.

c)) Déterminer l’expression de la tension $U_{AB}(t)$ au borne de la bobine. Que devient cette expression en régime permanent. Quelle est l’influence de la bobine dans le circuit ?

d)) Tracer l’allure des courbe $U_{AB}(t)$ et $i(t)$. A partir de ces deux courbes décrire le comportement de la bobine.

II. Rupture du courant

On place l’interrupteur K à la position 2.

1. Etablir l’équation différentielle liant R, L et i..

2. On propose comme solution de l’équation différentielle $i(t) = Ae^{-\beta t}$. Etablir les expressions de A et β.

3. En déduire alors l’expression de $U_{AB}(t)$.
Tracer l’allure des courbe $U_{AB}(t)$ et $i(t)$.

4. a)) Quelle est la variation du flux dans le circuit le circuit lorsque K est à la position 2.

b)) En supposant que cette variation se produit en 20ms, calculer la valeur moyenne de la f.é.m. d’auto induction. Comment se manifeste-t-elle ?

EXERCICE 03

On considère une bobine d’inductance L=30mH monté en série avec une résistance $R = 4,oo\Omega$. On établie à ces bornes, à la date t=0,une tension U=20V.

1. A la date t=0 , l’inverseur K est fermé.

a)) Décrire brièvement ce qui va se passer. Quel est le phénomène responsable du retard à l’installation du courant ?

b)) Etablir l’équation différentielle reliant l’intensité i du courant à la date t. Vérifier que $i = \frac{U}{R}(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$ est la solution de cette équation différentielle.? Où $\tau = \frac{L}{R}$ la constante de temps, la calculer.

2. a)) Etablir les expressions, en fonction du temps de u_R et de u_L.

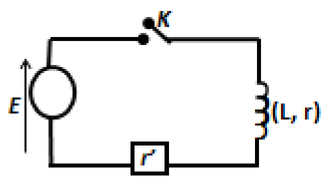
b)) Calculer la valeur de l’intensité du courant i aux dates 0 ; 0,5s ;τ ; 5τ ; pour $t \to \infty$en régime permanent) et le temps au bout duquel $u_R = u_L$.
Tracer les courbes i(t), $u_R(t)$ et $u_L(t)$ en fonction du temps.

c)) Montrer que la constante de temps τ égale à la date pour laquelle la tangente à la courbe, tracée à l'origine des dates, coupe l’asymptote horizontale dans chacune des trois figures tracées précédemment.

3. Calculer l’énergie magnétique "stockée" dans la bobine à la date t = 0 puis en régime permanent.

EXERCICE 04

Dans le montage schématisé ci-dessous, on souhaite étudier le comportement de la bobine lors de l’interruption du courant dans le circuit. Pour cela, on ferme l’interrupteur K, puis on l’ouvre à nouveau. Cet instant est choisi comme instant initial.

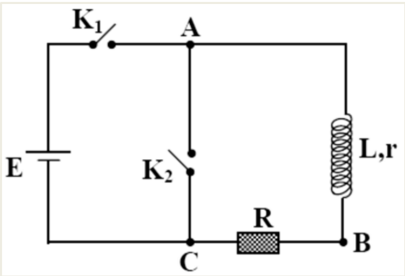


1. Pourquoi doit-t-on attendre un « un certain temps » avant d'ouvrir l'interrupteur K ?
2. Donner l'expression de la tension $U_{L,r}$ aux bornes de la bobine ?
3. En déduire l'équation différentielle du première ordre, vérifier par l'intensité i du courant traversant la bobine lorsqu'on ouvre l'interrupteur K.
4. La solution de cette équation différentielle est de type $i(t) = Ae^{-kt}$. Déterminer les expressions des constantes A et k.
5. a)) Donner l'expression de i(t) en faisant apparaitre les grandeurs I_0(intensité du courant lorsque le régime permanente est établi avec K fermé) et $\tau = L/R$ (constante du temps du circuit).

b)) En déduire l'expression de $U_{L,r}(t)$ en fonction du temps. Représenter graphiquement i(t) *et* $U_{L,r}(t)$.

EXERCICE 5

Le montage représenté par la figure ci-dessous est constitué d'un générateur idéal de tension de f.é.m E=12V , d'une bobine de résistance $r = 10\Omega$ et d'inductance $L = 40mH$, d'un conducteur ohmique de résistance $R = 40\Omega$ et de deux interrupteurs K_1 *et* K_2.



A./ À l'instant $t_0 = 0$, on ferme l'interrupteur K_1 et on laisse K_2 ouvert. À une date t, le circuit est parcouru, en régime transitoire, par un courant d'intensité i_1.

1. Quel est le phénomène physique responsable du retard de l'établissement du courant dans le circuit? Expliquer brièvement.
2. Établir l'équation différentielle qui décrit l'évolution de i_1 en fonction du temps.
3. Soit I_0 l'intensité du courant en régime permanent. Déterminer de I_0 en fonction de $E, r, et\ R$ et calculer sa valeur.
4. La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$i_1 = I_0(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

a)) Déterminer l'expression de τ en fonction de $L, r\ et\ R$ et calculer sa valeur numérique.

b)) Donner la signification physique de τ

5. a)) Déterminer l'expression de la f.é.m. d'auto-induction e_1 en fonction du temps.

b)) Calculer la mesure algébrique de e_1 à l'instant t_0.

B/ Après quelques secondes, le régime permanent étant établi, on ouvre et on ferme au même instant K_2 .

On considère la date de la fermeture de K_2 comme une nouvelle origine des temps $t_0 = 0$. À une date t , le circuit (L, R, r) est alors parcouru par un courant induit d'intensité i_2.

1. Déterminer le sens de i_2.
2. Établir l'équation différentielle qui décrit l'évolution de i_2 en fonction du temps.
3. Vérifier que $i_2 = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ est solution de cette équation.
4. Calculer la mesure algébrique de la f.é.m. d'auto-induction e_2 à la date $t_0 = 0$.

C/ Comparer $e_1\ et\ e_2$, et déduire le rôle de la bobine dans chacun des deux circuits précédente.

Dipôle (R.C)

Rappels sur le dipôle RC

I. Généralité

1. Relation entre la charge et l'intensité du courant

L'intensité électrique correspond à la quantité de charges électriques qui traverse une section de conducteur par unité de temps : $i = \frac{dq}{dt}$

La charge q s'exprime en coulomb (C), l'intensité i en ampère (A) et le temps en seconde (s).

L'intensité est une grandeur algébrique. Selon le sens du courant, elle peut être positive (charge) ou négative (décharge).

2. Relation entre charge, capacité du condensateur et tension à ses bornes : $q = CU_C$

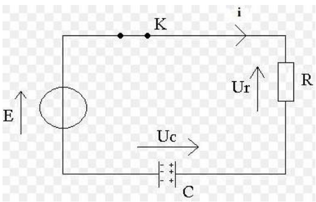
3. Constante du temps

La constante du temps représente le temps nécessaire pour que le condensateur atteint 63% de sa charge totale. Elle dépend de la valeur de la résistance R du conducteur ohmique et de la valeur de la capacité C du condensateur. $\tau = RC$

II. Réponse du dipôle RC à un échelon de tension: établissement des équations différentielles

1. Cas de la charge d'un condensateur :

On réalise le circuit RC suivant (le condensateur est initialement déchargé) :



On cherche à modéliser l'équation différentielle de la charge du condensateur. A t=0, on ferme l'interrupteur K

On a la relation : $U_C + U_R = E$

$$U_R = Ri \;\; or \; i = \frac{da}{dt} \; et \; q = CU_C \Rightarrow i = C\frac{dU_C}{dt} \Rightarrow U_R = RC\frac{dU_C}{dt}$$

$$On \; a : U_C + U_R = E \Longrightarrow U_C + RC\frac{dU_C}{dt} = E$$

$$D'où : \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Solution de l'équation différentielle

La solution de cette équation différentielle est :

$$U_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Vérification : $\frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$

$$\Longrightarrow \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{E}{RC} - \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{RC}$$

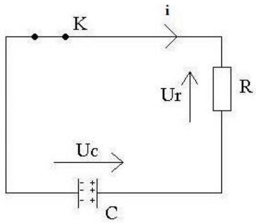
La solution est juste.

Intensité du courant : $i = C\frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

En régime permanente ($t \to \infty$) : $U_C = E \; et \; i = 0$

2. Cas de la décharge d'un condensateur :

On réalise le circuit suivant (le condensateur est initialement chargé) :



On a : $U_C + U_R = 0$

Or $U_R = RC\frac{dU_C}{dt}$

D'où l'équation différentielle de la décharge est:

$$U_C + RC\frac{dU_C}{dt} = 0 \Longrightarrow \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = 0$$

Solution de l'équation différentielle :

La solution de cette équation différentielle est : $U_C(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$

Vérification : $\frac{dU_C}{dt} = -\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = -\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = 0$$

La solution est juste.

Intensité du courant :

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{dU_C}{dt} \Longrightarrow i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = I_0e^{-\frac{t}{RC}} \;\; où \;\; I_0 = \frac{E}{R}$$

En régime permanent ($t \to \infty$) : $U_C = 0$ et $i = 0$

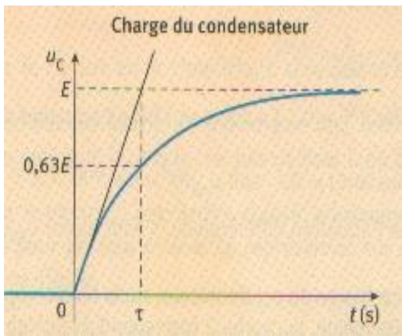
III. Energie emmagasiné dans le condensateur

L'énergie E emmagasiné dans un condensateur de capacité C et de tension U à ses bornes est donné par la relation :

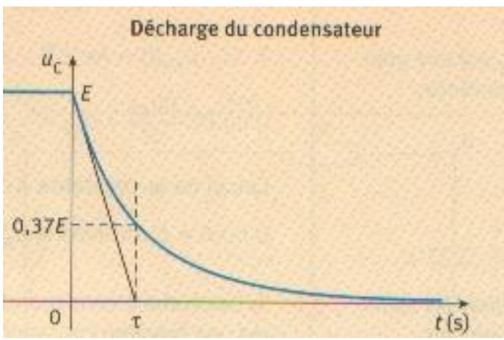
$$E_C = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

IV. Etude graphique

Courbe de la charge



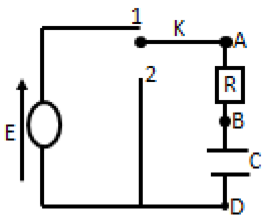
Courbe de la décharge



Exercices sur le dipôle (R .C)

EXERCICE 01

On considère le circuit ci-dessous où E=5V, R=10kΩ et C=100nF.



I. ***Etude de la charge***

On s'intéresse à ce qui se passe quand l'interrupteur est en position 1.

1. a)) Etablir l'équation liant la tension U_{BD}, et sa dérivée par rapport aux temps.

b)) Soit $U_{BD} = A + Be^{-\beta t}$ est solution de l'équation précédente. En déduire les valeurs de A, B et β.

c)) Qu'appelle –t-on constante du temps τ du circuit ? Que représente τ ? Calculer sa valeur numérique.

2. a)) Donner l'expression de i(t) en faisant apparaitre les grandeurs I_0(intensité du courant lorsque le régime est permanent et τ.

b)) Donner les allures des courbes U_{BD}(t) et i(t).

3. Sous quelle forme l'énergie emmagasiné dans le condensateur est- t-elle dissipée. Calculer sa valeur numérique.

II. Etude de la décharge

Lorsque le condensateur est chargé, à une date choisie comme nouvelle origine des dates, on bascule l'interrupteur en position 2.

1.Etablir l'équation différentielle liant U_{BD}(t).

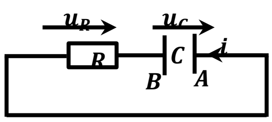
2. Soit $U_{BD}(t)=Ae^{-1/\tau}$solution de cette équation différentielle. Etablir les expressions de A et τ.

3. a)) Déterminer l'expression de i(t) en fonction de I_0 et τ.

b)) Tracer l'allure des courbes U_{BD}(t) et i(t).

EXERCICE 02

Un condensateur chargé depuis un temps très long sous une tension E=6,0V est placé dans le circuit ci-contre. A l'instant t=0, on ferme l'interrupteur (non représenter sur le schéma).



On donne : R=2000*Ω* ; C=200µF.

1. a)) Quelle est la valeur de la charge initialement emmagasinée par l'armature A du condensateur. Placer sur le schéma, les signes des charges déposées sur les armatures.

b)) Calculer l'énergie initialement emmagasinée par le condensateur.

2. a)) Etablir une relation entre u_C et u_R , et i et u_C à partir des relations charge- intensité et charge –tension.

b)) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$.

On propose comme solution de l'équation différentielle

$$u_C\ (t) = Ae^{(-1/\tau)}$$

Etablir les expressions de A et τ en fonction de R, C et E.

c)) Calculer la constante du temps τ du dipôle RC.

Donner l'expression de i(t) en fonction du temps t, R, C et E.

d)) Quelle est en mA, la valeur de i(0) ?

Interpréter le signe de i(0) ?

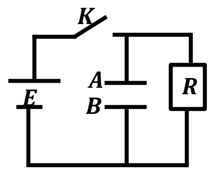
3. a)) Quelles sont les limites de u_C et de i lorsque $t \to \infty$.

b)) Tracer les allures des courbes représentant $u_C(t)$ et i(t) pour t variant entre $-\infty$ et $+\infty$.

c)) Déterminer l'énergie dissipée par le condensateur.

EXERCICE 03

Le circuit (figure) comprend un générateur de f.é.m. E et de résistance négligeable, un interrupteur K , un condensateur C d'armature A et B, et une résistance pure R. On donne E=15V et C=47µF.



1. L'interrupteur étant fermé, déterminer :

a)) La tension U_{AB} aux bornes du condensateur et la charge Q du condensateur.

b)) L'énergie E emmagasinée dans le condensateur.

c)) La résistance R pour que l'intensité du courant en régime permanent dans le conducteur ohmique soit $I_0 = 30{,}0$µA.

2. A l'instant t=0, on ouvre l'interrupteur.

Le condensateur se décharge alors dans la résistance R.

a)) Etablir l'équation différentielle qui régit la charge q_A de l'armature A du condensateur en fonction du temps t.

b)) Montrer que cette équation différentielle admet une solution de la forme $q_A = Ke^{-\beta t}$ et exprimer littéralement les constantes K et β en fonction de Q, R et C.

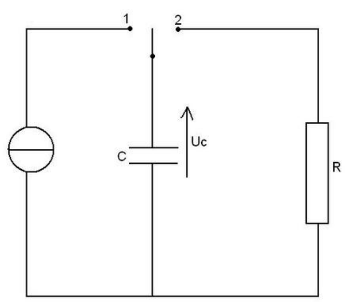
c)) Donner l'expression de la tension U_{AB} aux bornes du condensateur en fonction du temps.

d)) Déterminer la valeur qu'il faut donner à R pour que : U_{AB}=1V à t=1mn.

e)) Donner l'expression de l'intensité du courant i(t) et déduire sa valeur maximale.

EXERCICE 04

Le montage représenté permet de charger et de décharger un condensateur dans une résistance R



1. a)) Pour chacune de ces deux opérations, quelle doit être la position de l'interrupteur ?

b)) Des deux graphes proposés ci-dessous, lequel correspond à la charge du condensateur ? lequel correspond à la décharge ?

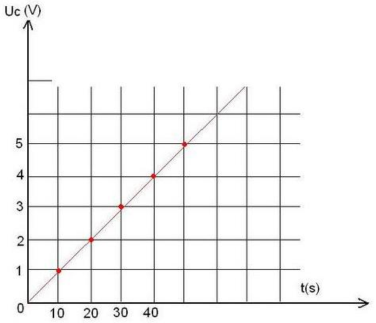


Figure 1

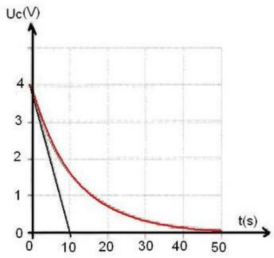


Figure 2

2. Un générateur de courant permet une charge, à intensité constante, d'un condensateur. La charge dure 40s et l'intensité du courant a pour valeur 10μA

a)) A la fin de la charge du condensateur, quelle est la valeur de la charge du condensateur ?

b)) Quelle est la valeur de l'énergie emmagasinée par le condensateur ? Quelle est la capacité du condensateur ?

3. Le condensateur est ensuite déchargé.

a)) Déterminer par deux méthodes, la valeur de la constante de temps τ.

b)) Quelle est la valeur de la résistance R ?

c)) Quelle est la valeur de l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance pendant la décharge ?

EXERCICE 5

Un condensateur de capacité $C = 0{,}50\ \mu F$ est chargé pendant une durée t = 3,5 s. Le générateur délivre un courant électrique d'intensité constante $I = 0{,}60 mA$.

1.a)) Faire le schéma du circuit et calculer la charge accumulée sur l'armature positive.

En déduire la charge accumulée sur l'armature négative.

b)) Combien vaut la tension aux bornes du condensateur ?

c)) En déduire la valeur de la résistance ohmique R.

2. Etablir l'équation différentielle liant la charge q du condensateur en fonction du temps t.

3. Soit $q(t) = CU\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ solution de l'équation différentielle.

a)) Vérifier que $q(t)$ est bien solution de l'équation différentielle.

b)) Préciser la signification et l'unité de chaque terme.

c)) Quelle est la valeur de q(t) à t = 0 s ? Lorsque t → ∞ ? Le condensateur se charge-t-il ou se décharge-t-il ?

d)) Donner les expressions de u(t) et i(t) respectivement la tension aux bornes du condensateur et l'intensité dans le dipôle RC.

e)) Quelle est la valeur de l'intensité en régime permanent ?

EXERCICE 6

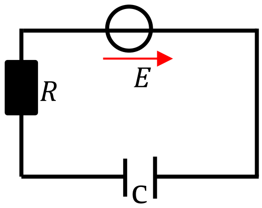
Pour étudier la charge d'un condensateur, on réalise un circuit RC que l'on soumet à un échelon de tension E.

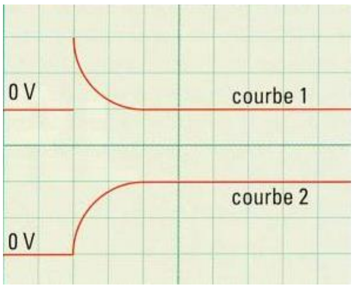
Grâce à l'oscilloscope, on observe simultanément :

La tension u_R aux bornes du conducteur ohmique de résistance $R = 200\ \Omega$) ;La tension u_C aux bornes du condensateur.

1. Quelle tension permet de connaître les variations de l'intensité du courant en fonction du temps ? Justifier.

2. La masse du générateur est isolée de la Terre. Il est ainsi possible de brancher la masse de l'oscilloscope comme indiquée sur la figure. On obtient l'oscillogramme ci-dessous.





Afin de mieux distinguer les deux courbes, l'une est décalée vers le haut et l'autre vers le bas, avec les réglages :

- Base de temps (ou durée de balayage) : 0,5 ms / div ;
- Sensibilité verticale de la voie A et de la voie B : 2 V / div ;
- Entrée B inversée.

a)) Identifier les deux courbes. b)) Compléter le circuit en indiquant les connexions à réaliser avec l'oscilloscope.

c)) Déterminer à l'aide de l'oscillogramme :

3. La constante de temps **τ** est définie comme la durée au bout de laquelle le condensateur initialement déchargé atteint 63 % de sa charge maximale.

a)) Déterminer la valeur de τ.

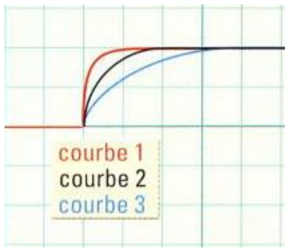
b)) En déduire une valeur approchée de la capacité C.

c)) Placer sur le schéma, les signes des charges déposées sur les armatures.

4. Pour les mêmes réglages du générateur et de l'oscilloscope, on augmente la valeur de la résistance R du conducteur ohmique.

a)) Les grandeurs E, I_{max} et τ sont-elles modifiées ? Si, oui, dans quel sens ?

b)) L'oscillogramme ci-dessous représente l'allure de la tension aux bornes du condensateur pour R pour une augmentation de R et pour une diminution de R.



à quel cas correspond chacune des courbes ?

5. On augmente la valeur de l'échelon de tension E, les grandeurs I_{max} et τ sont-elles modifiées ?

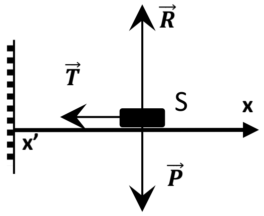
Si oui, dans quel sens ?

Oscillateurs Mécaniques

Rappels sur les Oscillateurs Mécaniques

Etude d'un Pendule Elastique horizontale :

Un ressort à spires non jointives exerce une force proportionnelle à la longueur du déplacement de l'extrémité libre du ressort.



1. Détermination de l'équation différentielle

Le système de masse m est soumis à 3force :

Son poids $\vec{P}$, la tension $\vec{T}$ du ressort et à la réaction $\vec{R}$.

T.C.I : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\vec{a}$, projection sur x'x :

$$-T=ma\Longrightarrow -kx=m\frac{dx^2}{dt^2}\Longrightarrow\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0\ (1)$$

Car la tension du ressort est : $T=k\Delta l=kx$ où x =allongement à l'instant t. On a une équation différentielle sans second membre (ou bien équation différentielle homogène) , elle caractérise un mouvement rectiligne sinusoïdal ou Oscillation harmonique.

2. Equation horaire du Mouvement

La solution de l'équation différentielle (1) est de la forme :

$$x(t)=x_m\cos(\omega_0t+\varphi)$$

x_m : Amplitude maximale (Allongement du ressort par rapport à son état d'équilibre) en mètre (m)

ω_0 : Pulsation propre de l'oscillateur ($\omega_0{}^2=\frac{k}{m}$) en rad/s

φ : phase initial exprimée en radian (rad)

Si à t=0, $v_0=0\Longrightarrow x_0=x_m=x_m\cos\varphi$

$\Rightarrow x_m\cos\varphi=x_m\ soit\ \cos\varphi=1\Longrightarrow\ \varphi=0.$

$x(t)=x_m\cos(\omega_0t)\ avec\ \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ où k = raideur du ressort

Equation de la vitesse et de l'accélération

$v=\frac{dx}{dt}=-x_m\omega_0\sin(\omega_0t)\quad et\ \ a=\frac{dv}{dt}=-x_m\omega_0{}^2\cos(\omega_0t)$

3. Période propre et la fréquence propre

La période propre T_0 : $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

La fréquence propre N_0 est le nombre d'oscillations effectuées en une seconde : $N_0=\frac{1}{T_0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

3. Etude énergétique

$E_m=E_C+E_{Pe}+E_{PP}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$

(car $E_{PP}=0$)

En remplaçant les expressions de $x(t)\ et\ v(t)$ on retrouve :

$$E_m=E_C+E_{Pe}+E_{PP}=\frac{1}{2}kx_m{}^2=constante$$

Remarque et conclusion

- Lorsque le ressort se place verticalement, l' énergie mécanique du système est donnée par : $E_m=\frac{1}{2}kx_m{}^2+\frac{1}{2}k\Delta l^2=cste$

$avec\ \ \Delta l=allongement\ du\ ressort\ à\ l'équilibre$

- Lorsque le ressort se déplace horizontalement, son énergie mécanique est donnée par : $E_m=\frac{1}{2}kx_m{}^2=cste$
- On peut également établir l'équation à partir de l'expression de l'énergie mécanique du système :

Si les frottements sont négligeables, alors le système est harmonique et $E_m=cste$: en effet :

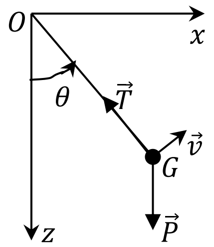
$$E_m=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=cste\Rightarrow\frac{dE_m}{dt}=\frac{1}{2}m\frac{d\dot{x}^2}{dt}+\frac{1}{2}k\frac{dx}{dt}=0$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x})+\frac{1}{2}k(2x\dot{x})=0\ m\ddot{x}+kx=0\Rightarrow\ \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

Étude d'un pendule simple

Une bille assimilable à un point matériel G de masse m est suspendue à un point fixe O par un fil de longueur l.

La bille oscille dans un plan vertical. Soit Oz un axe vertical descendant. L'angle θ est défini sur la figure ci-dessous.



1. Équation différentielle du mouvement

Le système de masse m est soumis à 2force :

Son poids $\vec{P}$, la tension $\vec{T}$ du fil.

R.F.D (en rotation)

$\sum M(\vec{F}_{ext})=J\ddot{\theta}\Longrightarrow M(\vec{T})+M(\vec{P})=J\ddot{\theta}\quad or\ \ M(\vec{T})=0$

$$M(\vec{P})=-mgl\sin\theta=J\ddot{\theta}=ml^2\ddot{\theta}\ =ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-mgl\sin\theta=ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\Longrightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

Pour les oscillateurs de faible amplitude $\sin\theta\approx\theta$

$$\boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0}\quad(\mathbf{1})$$

On a une équation différentielle sans second, elle caractérise un mouvement rotation sinusoïdal.

2. Équation horaire du Mouvement

La solution de l'équation différentielle (1) est de la forme :

$$\theta(t)=\theta_m\cos(\omega_0t+\varphi)$$

θ_m : Amplitude maximale exprimée en radian (rad)

ω_0 : Pulsation propre de l'oscillateur ($\omega_0{}^2=\frac{g}{l}$) en rad/s

φ : phase initial exprimée en radian (rad)

Si à t=0, $\dot{\theta}_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = \theta_m = \theta_m \cos\varphi$

$\Rightarrow \theta_m \cos\varphi = \theta_m$ soit $\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0.$

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t) \ \ avec \ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Équation de la vitesse et de l'accélération

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -\theta_m \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad et \ \ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = -\theta_m {\omega_0}^2 \cos(\omega_0 t)$$

3. Période propre et la fréquence propre

La période propre T_0 : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

La fréquence propre N_0 est le nombre d'oscillations effectuées en une seconde : $N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$

3. Étude énergétique

En première S vous avez défini l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique.

$$E_m = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2} ml\omega^2 - mgl\cos\theta$$

Les frottements sont négligeables, l'énergie mécanique $E_m = cste$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2} ml^2 \frac{d\omega^2}{dt} - mgl\frac{d}{dt}(\cos\theta) = 0$$

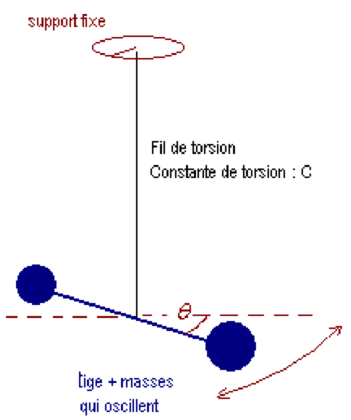
$$ml^2\omega\frac{d\omega}{dt} + mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0 \Leftrightarrow ml^2\frac{d\theta}{dt}.\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$ml\frac{d\theta}{dt}\left(l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta\right) = 0 \ or \ ml\frac{d\theta}{dt} \neq 0 \Rightarrow l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0$$

Pour les oscillations des faibles amplitudes, $\sin\theta \approx \theta$:

$$\boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0} \quad (\mathbf{1})$$

Étude d'un pendule de Torsion



Un pendule de torsion est un dispositif constitué d'une barre horizontale, fixée à un support par l'intermédiaire d'un fil de torsion. Ce fil d'acier exerce un couple de rappel, proportionnel à l'angle de torsion θ qu'on lui impose :

$\Gamma = -C\theta$ où est la constante de torsion du fil.

Équation différentielle

R.F.D (en rotation)

$$-C\theta = J\ddot{\theta} = J\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J}\theta = 0$$

Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$

Équation horaire :

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

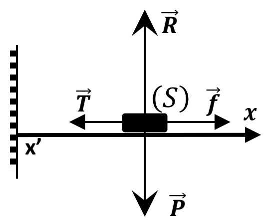
$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

II. Oscillateurs Amortis

Pendule Élastique Horizontal

Un ressort de raideur k est horizontal, une de ses extrémités est fixe. On accroche à son autre extrémité un solide de masse m. Ce solide peut se déplacer le long d'un axe horizontal x'x.

Il existe des frottements. On admettra qu'ils se réduisent à une force de type fluide sur solide $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ désigne la vitesse instantanée du solide. Le coefficient h est positif.



1. Détermination de l'équation différentielle

Le système de masse m est soumis à 4force :

Son poids $\vec{P}$, la tension $\vec{T}$ du ressort, la réaction $\vec{R}$ et la force de frottement $\vec{f}$

T.C.I : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$, projection sur x'x :

$$-T - f = ma \Rightarrow -kx - hv = m\frac{dx^2}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \ (1)$$

$$Posons \ \lambda = \frac{h}{2m} \quad et \ {\omega_0}^2 = \frac{k}{m} \quad pulsation \ propre$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0 \ \ ou \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

2. Nature du mouvement du corps solide.

- Si λ pouvait être nul, le mouvement serait périodique.

Du fait de la présence de la force de frottement, le mouvement ne peut pas être périodique :

- Si λ est faible le mouvement du solide est pseudo-périodique.
- Si λ est fort le mouvement du solide est apériodique.

3. Équation horaire du mouvement

Résolution de l'équation de forme $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0$ (1).

Le mouvement est oscillatoire si le discriminant réduite de l'équation (1) $\Delta' = \lambda^2 - {\omega_0}^2 < 0$.

Ce régime oscillatoire est dite pseudo-périodique

La solution générale de l'équation (1) avec $\Delta< 0$, s'écrit sous la forme : $x(t) = x_m e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi)$.

$$Avec \quad \Omega^2 = {\omega_0}^2 - \lambda^2 \Rightarrow \Omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}$$

Les conditions initiales s'écrit :

$x(t = 0) = x_0 \ et \ \dot{x}(t = 0) = 0$

$x(t = 0) = x_0 = x_m cos\varphi \ et$

$\dot{x}(t = 0) = -\lambda \, x_m cos\varphi - \Omega x_m sin\varphi = 0$

$\Rightarrow \lambda \, x_m cos\varphi = \Omega x_m sin\varphi \ \ et \ \ x_0 = x_m cos\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} {x_0}^2 = {x_m}^2 cos^2\varphi \\ \lambda^2 {x_m}^2 cos^2\varphi = \Omega^2 {x_m}^2 sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} {x_0}^2 = {x_m}^2 cos^2\varphi \\ \lambda^2 {x_m}^2 cos^2\varphi = {x_m}^2 \, ({\omega_0}^2 - \lambda^2) sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} {x_0}^2 = {x_m}^2 cos^2\varphi \\ \lambda^2 {x_m}^2 = {x_m}^2 \, {\omega_0}^2 sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} {x_0}^2 = {x_m}^2 cos^2\varphi \\ \dfrac{\lambda^2 {x_m}^2}{{\omega_0}^2} = {x_m}^2 \, sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda^2 {x_m}^2}{{\omega_0}^2} + {x_0}^2 = {x_m}^2$$

$$\Rightarrow \ {x_m}^2 \, (1 - \frac{\lambda^2}{{\omega_0}^2}) = {x_0}^2 \Rightarrow \ {x_m}^2 \, (\frac{{\omega_0}^2 - \lambda^2}{{\omega_0}^2}) = {x_0}^2$$

$$\Rightarrow \ {x_m}^2 = {x_0}^2 \left(\frac{{\omega_0}^2 - \lambda^2}{{\omega_0}^2}\right) = {x_0}^2 \left(\frac{\Omega^2}{{\omega_0}^2}\right)$$

$$\Rightarrow \ x_m = x_0 \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)$$

$$Or \ -\lambda \, x_m cos\varphi = \Omega x_m sin\varphi \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\lambda}{\Omega} = -\frac{\lambda}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}$$

$$\Rightarrow tan\,\varphi = -\frac{\lambda}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}$$

Pseudo- périodique du mouvement:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\sqrt{\boldsymbol{\omega_0}^2 - \boldsymbol{\lambda}^2}} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\omega_0}\sqrt{1 - \dfrac{\boldsymbol{\lambda}^2}{\boldsymbol{\omega_0}^2}}} = \frac{\boldsymbol{T_0}}{\sqrt{1 - \dfrac{\boldsymbol{\lambda}^2}{\boldsymbol{\omega_0}^2}}}$$

4. Étude énergétique

L'énergie mécanique du système (ressort + solide) est :

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (kx + m\ddot{x})\dot{x}$$

$$or \ m\,\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow -h\dot{x} = m\,\ddot{x} + kx$$

$$\frac{dE_m}{dt} = (-h\dot{x})\dot{x} = f_x . v_x = \vec{f} . \vec{v} = P$$

où P est la puissance développée par la force de frottement.

La puissance développée par la force de frottement

$$P = \frac{dE_m}{dt} = -h\dot{x}^2 \ \text{ est toujours négative}$$

Le système (ressort + solide) perd de l'énergie mécanique.

Cette énergie mécanique perdue est transformée en énergie calorifique

Étude d'un pendule de Torsion

L'existence des frottements imposent deux couples de torsion :

– Celui du pendule (le couple de rappel) de moment $M_1 = -C\theta$

– Celui de l'amortissement de moment $M_2 = -h\omega = -h\ddot{\theta}$

où h est un facteur de proportionnalité dépendant du courant (de Foucault) de freinage.

On appelle J le moment d'inertie du solide, c'est à dire la répartition de masse autour de son centre d'inertie.

1. Équation différentielle

R.F.D (en rotation) : $M_1 + M_2 + M(\vec{P}) + M(\vec{R}) = J\ddot{\theta}$

$$-C\theta - h\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \Rightarrow \ \ddot{\theta} + \frac{h}{J}\dot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0$$

On peut la noter de la façon suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\theta}{dt} + {\omega_0}^2\theta = 0 \quad (1)$$

$$avec \ \left| \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{h}{2J} \ \ le\ coefficient\ d'amortissement \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{C}{J}} \ \ la\ pulsation\ des\ oscillations \end{array} \right.$$

2. Solution de l'équation différentielle

La solution générale de l'équation (1) avec $\Delta< 0$ (régime pseudo-périodique), s'écrit sous la forme :

$$\theta(t) = \theta_m e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi) \ \text{ Avec } \Omega^2 = {\omega_0}^2 - \lambda^2$$

Les conditions initiales s'écrit :

$\theta(t = 0) = \theta_0 \ et \ \dot{\theta}(t = 0) = 0$

$\theta(t = 0) = \theta_0 = \theta_m cos\varphi \ et$

$\dot{\theta}(t = 0) = -\lambda \, \theta_m cos\varphi - \Omega\theta_m sin\varphi = 0$

On en déduit :

$$\boldsymbol{\theta_m = x_0 \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right) \quad et \quad tan\,\varphi = -\frac{\lambda}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}}$$

Remarque :

Pour un mouvement oscillatoire amorti :

- L'amplitude maximale est donnée par la relation :

$$\boldsymbol{\theta_m = \theta_0 \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right) = \theta_0 \left(\frac{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}{\omega_0}\right)}$$

- La phase initiale φ est donnée par la relation :

$$\boldsymbol{tan\,\varphi = -\frac{\lambda}{\Omega} = -\frac{\lambda}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}}$$

- La pseudo-périodique T est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}}$$

Exercices su les Oscillateurs Mécaniques

EXERCICE 1

1. Un solide S de masse m=200g est suspendu à un ressort vertical de masse négligeable, parfaitement élastique ; le ressort s'allonge de 8cm. Évaluer la raideur du ressort.
2. Le solide est tiré verticalement vers le bas de 4cm à partir de sa position d'équilibre, puis il est abandonné sans vitesse initiale.
 a)) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de S.
 b)) Donner l'équation horaire du mouvement de S en prenant comme référence un axe vertical dirigé vers le bas ayant comme origine la position d'équilibre de S.
 c)) Quelle est l'équation horaire de la vitesse de S ? Donner sa valeur maximale.

EXERCICE 2

On considère un oscillateur horizontal de mase m et de raideur k. Les forces de frottements sont considérées négligeables. La masse m peut se déplacer suivant x'x. L'oscillateur possède une énergie mécanique égale à $E_m = 3{,}6.10^{-3}J$.

1. a)) Donner l'expression de l'énergie mécanique de cet oscillateur en fonction de $x\ et\ \ddot{x}$
 b)) En déduire l'équation différentielle du mouvement.
2. L'amplitude du mouvement est 2,75cm. Déterminer la raideur k du ressort.
3. La période des oscillations est de 0,6s.
 a)) Calculer la vitesse de masse m au passage à la position d'abscisse x = 0.
 b)) L'énergie potentielle de l'oscillateur à l'instant t est $E_P = 2.10^{-3}J$. Calculer la vitesse de la masse m à cet instant.

EXERCICE 3

1. Un pendule élastique formé par un solide de masse m, suspendu à un ressort de raideur $k = 45N.m^{-1}$, effectue des oscillations libre de période $T_0 = 0{,}42s$.
 a)) Calculer la masse m.
 b)) Quel est l'allongement du ressort à l'équilibre ?
2. La position d'équilibre est choisie comme origine des abscisses sur Ox, dirigé vers le bas. Le solide est écarté de sa position d'équilibre de 0,06m vers le bas, puis lâché sans vitesse initiale à t=0. a)) Etablir l'équation horaire du mouvement.
 b)) Calculer la valeur de la vitesse du solide lorsque celle-ci passe par sa position d'équilibre.
3. On considère le système { Terre –pendule élastique}. Lorsque le solide est au point d'abscisse x = 0,03m, Calculer :
 a)) L'énergie cinétique du système.
 b)) L'énergie potentielle élastique du système en prenant pour état de référence le ressort à vide
 c)) L'énergie potentielle de pesanteur en prenant le même état de référence. d)) L'énergie mécanique totale du système.

EXERCICE 4

Un oscillateur mécanique horizontal est constitué d'un ressort (R) de raideur k, de masse négligeable et d'un solide (S) de masse m = 0,1 kg, de centre d'inertie G, coulissant sans frottement sur une tige horizontale AC. L'équation de horaire de du mouvement de G dans le repère (0,x) lié à la Terre est :

$x(t) = 5{,}0.10^{-2}\cos\left(25t + \frac{\pi}{4}\right)$, O est la position de G quand l'oscillateur est au repos, les unités sont celles du système international. Donnée : g=9,8m.s^{-2}.

1. Donner les valeurs de l'amplitude, de la pulsation propre, de la période propre et la fréquence propre du mouvement.
2. Calculer à la date t = 0s, les valeurs algébriques de l'élongation, de la vitesse et de l'accélération de centre G. Positionner sur l'axe Ox le point G à la date t = 0s et représenter, cette même date, les vecteurs vitesse et accélération de G.
3. Faire l'inventaire des force appliquées au solide (S) à une date t quelconque. Calculer leurs valeurs à t=0s. En déduire la constante de raideur k du ressort.
4. Cet oscillateur forme un système conservatif pour lequel l'énergie mécanique est constante. Définir l'énergie mécanique de ce système, donner sa valeur numérique.

EXERCICE 5

Un solide de masse m = 50g, pouvant glisser sans frottement sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale est fixé à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de raideur $k = 5N.m^{-1}$, dont l'autre extrémité est fixe. La position du centre d'inertie G est repérée par son abscisse x sur un axe Ox' orienté vers le bas. A l'équilibre l'abscisse de G, x =0.

1. Quel est l'allongement du ressort à l'équilibre ?
2. On tire sur le solide vers le bas, de manière à produire un allongement supplémentaire du ressort de 5cm et on l'abandonne sans vitesse initiale à la date t=0.
 a)) Etablir l'équation différentielle du mouvement de G.
 b)) Etablir l'équation horaire du mouvement de G.
3. Montrer que l'énergie potentielle totale (élastique et de pesanteur) du système du solide ressort, peut se mettre sous la forme : $E_P = \frac{1}{2}kx^2 + C$ où C est une constante que l'on calculera. (On prendra la position d'équilibre comme zéro de l'énergie potentielle de pesanteur et la position de repos du ressort comme zéro de l'énergie élastique).
4. Montrer que l'énergie mécanique du système est constante. La calculer.
5. A la date $t = \frac{\pi}{40}s$, calculer l'abscisse, la vitesse et l'accélération de G.

EXERCICE 6

Un solide de masse m = 200g peut glisser sans frottement sur un banc à coussin d'air incliné d'un angle $\alpha = 30°$ avecl'horizontale. Le solide est relié à un ressort qui s'allonge de 6cm à l'équilibre. L'autre extrémité du ressort est fixé. On prendra : $g = 9{,}8m.s^{-2}$

1. Calculer la raideur k du ressort à l'équilibre.
2. On tire le solide vers le bas de 5cm à partir de sa position d'équilibre, puis on abandonne sans vitesse initiale.
   a)) Etablir l' équation différentielle du mouvement. En déduire la période des oscillations.
   b)) Déterminer les lois horaires x(t) et v(t) , respectivement de l'abscisse et de la vitesse de S.
   c)) Calculer l'énergie mécanique de l'oscillateur. On prendra l'énergie potentielle de pesanteur nulle à la position d'équilibre et l'énergie potentielle élastique nulle lorsque le ressort n'est ni allongé ni comprimé.
3. Le solide se détache du ressort à son premier passage par sa position d'équilibre.
   a)) Décrire le mouvement du solide S en calculant sa nouvelle accélération. b)) Déterminer la nouvelle loi horaire x'(t).
   c)) En déduire à la date t = 2s, la vitesse atteinte par S et son énergie mécanique.

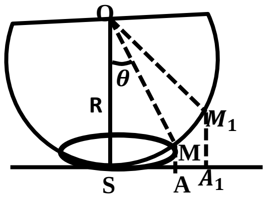
EXERCICE 7

Un ressort, de masse négligeable, spires non jointives, de coefficient de raideur $k = 10N.m^{-1}$, peut se déplacer le long d'un axe horizontal Ox, on fixe l'une de ses extrémités en A et on accroche à l'autre extrémité un objet S de masse m = 0,1kg. L'objet S étant en équilibre, on lui communique une vitesse $\vec{v}_0$ dirigée suivant l'axe du ressort et de valeur $v_0 = 0{,}4m.s^{-1}$ à t=0s.

1. Etablir l équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G du l'objet S.
2. En déduire l'équation horaire du mouvement de G en précisant les valeurs de l'amplitude, de la pulsation et de la phase.
3. a)) En déduire à la date t, l'expression de l'énergie mécanique totale E_m du système {ressort +solide S}, en fonction de $k, m, x\ et\ v$.
   b)) Donner l'expression de E_m en fonction de k et l'élongation maximale x_m.
4. Retrouver l'équation différentielle établie en 1. à partir de l'expression de E_m.

EXERCICE 8

On négligera les frottements et la résistance de l'air.
Un demi-sphère creuse BSC, d'épaisseur négligeable, de centre O, de rayon R = 0,8m repose par son sommet S sur un plan horizontal. Un solide ponctuel de masse m = 50g peut glisser sans frottement sur la face interne de la demi-sphère.



On désigne par M la position du solide et A sa projection orthogonale sur le plan horizontal passant par le sommet S et pour θ l'angle de $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OM})$ à l'instant t.

1. On communique à ce solide, à partir d'une position initiale M, une vitesse $\vec{v}$ tangente horizontalement à la demi-sphère de module v, tel qu'il décrive, d'une mouvement circulaire uniforme sur la face interne de la demi-sphère.
   a)) Etablir l'expression du module v en fonction de $g, R\ et\ \theta$.
   b)) Calculer la vitesse $v_1$pour la position de M_1 telle que $SA_1 = \frac{R}{2}$ et en déduire ω_1.
2. Le solide est abandonné sans vitesse initiale du point M_1 de la demi-sphère telle que $SA_1 = \frac{R}{2}$
   a)) Etablir en fonction de m, g, R, θ, la valeur v de la vitesse du solide au passage par le point M et l'intensité R de la réaction exercée par la demi-sphère sur le solide en M.
   b)) Calculer v et R en S.
3. Le solide est maintenant abandonné sans vitesse initiale à l'instant t=0sd'un point M_2 de la demi-sphère telle que $SA_2 = 8cm$.
   a)) Calculer l'angle θ_2 que font les rayons OS et OM_2 et montrer que l'on peut assimiler le mouvement du solide à un mouvement sinusoïdale de rotation. En déduire la période T du mouvement.
   b)) Ecrire l'énergie mécanique au point M du système {Solide + Terre} en fonction de $m, g, R, \theta\ et\ \dot{\theta}$ vitesse angulaire du point M. En déduire à nouveau l'équation différentielle qui régit le mouvement du solide.
   c)) Ecrire l'équation horaire du mouvement de la projection de A sur l'axe horizontal orienté x'Sx et calculer la vitesse maximale en A.A.

EXERCICE 9

Dans tout le problème, on négligera les frottements.
Un disque (D) plein et homogène de masse négligeable peut tourner autour d'un axe horizontal (Δ) passant par son centre O. On enroule sue le disque (D) un fil inextensible dont l'une de ses extrémité est liée à une solide (S) de masse m = 100g.
L'autre extrémité est liée à un solide(S_1) de masse m_1=700g posé sur un plan incliné [AB] faisant un angle α avec l'horizontal.
Lorsque (S_1) ne touche pas le disque (D), le fil restant tendu.

1. Le solide(S_1) se déplace sur le plan incliné AB avec une accélération a=2,5m.s^{-2}. a)) Calculer, en degré, la valeur de l'angle α. b)) Partant en A sans vitesse initiale, le solide(S_1) arrive en B avec une vitesse $v_B = 4m.s^{-1}$.

Calculer le travail de la tension du fil T_1 de A à B et la durée du parcours AB. Déduire alors le nombre de tours effectué par le disque (D) à l'arrivée de (S_1) en B.

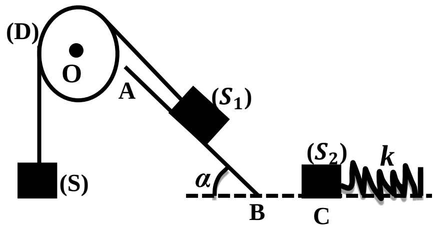
2. En arrivant en B, le solide(S_1) se détache du fil et poursuit sa course sur le trajet horizontal BC avec la vitesse acquise en B. Il vient heurter un autre solide S_2 de masse m_2 immobile accroché à l'extrémité libre d'un ressort de masse négligeable, à spires non jointives et de constante de raideur $k=400N.m^{-1}$. Après le choc, les deux solides s'accrochent et forment un seul système de centre d'inertie G. La vitesse de G juste après le choc est $v_G=2m.s^{-1}$ .Calculer la masse m_2 et le raccourcissement maximal x_m du ressort.

3. Dans toute la suite, on prendra m_2=700g.

a)) Déterminer l'équation différentielle du mouvement ultérieur du système formé par les solides S_1et S_2.

Déduire la valeur de la période T_0 du mouvement.

b)) L'origine des abscisses est la position où le choc a eu lieu. Écrire l'équation horaire du mouvement de G en prenant comme origine des dates l'instant où G se trouve au point de raccourcissement maximal du ressort.



EXERCICE 10

Dans tout l'exercice, on négligera les frottements et on assimilera le solide (S) à un point matériel. On prendra $g = 10m.s^{-2}$.

1. Un solide (S) de masse m = 2kg est abandonné sans vitesse initiale en un point A d'un plan incliné d'un angle α = 30° par rapport à l'horizontale, d'altitude $h_A = 31,25cm$.

a)) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le solide (S) et les représenter sur un schéma.

b)) Déterminer la vitesse v_B du solide en B.

2. Le solide(S) continue son mouvement sur le plan horizontal contenant B et heurte un ressort de constante de raideur $k = 200N.m^{-1}$, fixé par son autre extrémité.

a)) Quelle est la vitesse $v_0$du solide (S) juste avant le choc ?

b)) Quelle est l'énergie mécanique de (S), juste avant le choc, sachant que son énergie potentielle de pesanteur est nulle au sol.

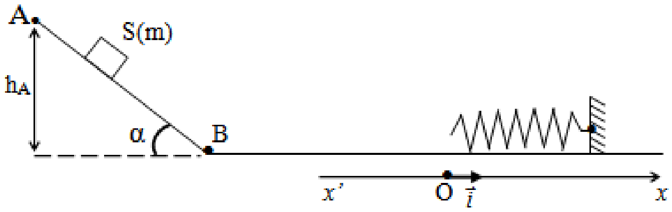
3. Dès que le choc se produit, le solide (S) reste solidaire du ressort. Il effectue des oscillations autour du point O de l'axe ($x'x$), parallèle au sol et horizontal.

a)) Déterminer l'amplitude x_m du mouvement de l'oscillateur.

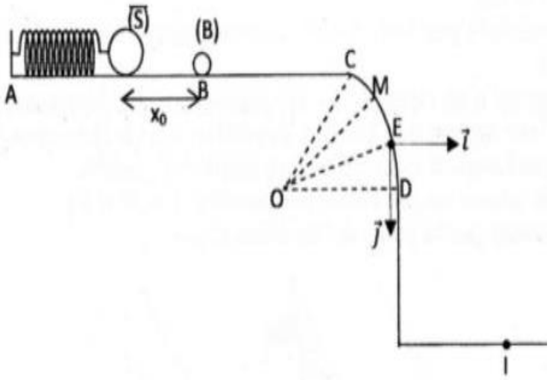
b)) Établir l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur.

En déduire sa pulsation propre et la loi horaire du mouvement.

c)) Déterminer l'instant auquel le solide repasse en O, après l'instant initial.



EXERCICE 11



Les trois parties sont largement indépendantes.

On comprime à vide d'un solide (S) de masse m_S , un ressort de raideur k d'une longueur $x_0 = 5cm$ et à l'instant t=0 , on le libère sans vitesse initiale. Le solide (S) percute une bille(B) de masse m_b placée en B. Les forces des frottements sont supposées négligeables sur toutes les parties sauf sur BC (figure ci-dessus). On donne : $m_b = 10g$; $k = 300N.m^{-1}$.

***Partie A* : Mouvement sur ABC**

1. Sachant que (S) effectue des oscillations libre de fréquence $N_0 = 948trs.min^{-1}$. a)) Calculer la masse m_S.

b)) Calculer l'énergie mécanique initiale E_0 à l'instant t=0.

Dans la suite du problème on prendra $m_S = 30g$

2. En utilisant la loi de conservation d l'énergie mécanique, calculer la vitesse v_S du solide au point B juste avant le choc.

3. Apres le choc, bille (B) aborde le plan horizontal BC=L=50cm , sur lequel s'exercent les forces de frottements d'intensité constante f avec une vitesse $v_b = 7,5m.s^{-1}$. Elle arrive au point C avec une vitesse pratiquement nulle. Déterminer l'intensité f de la force de frottement.

***Partie B* : Mouvement sur CD**

La partie CD est un arc de cercle de centre O et de rayon $r = 6m$. La bille est repérée par l'angle $\theta = \widehat{MOD}$ et on donne $\theta_0 = \widehat{COD} = 60°$.

1. Exprimer la vitesse de (B) au point M en fonction de g, r, θ_0, θ.

2. En appliquant le théorème de centre d'inertie, démontrer que l'intensité de la force $\vec{F}$ de la piste sur la bille peut s'écrire en fonction de m, g , θ_0 et θ.

3. Déterminer l'angle θ_1 au point E où la bille quitte le plan CD et vérifier que $v_E = 5{,}88 m.s^{-1}$.

Partie C : Mouvement dans le champ $\vec{g}$

A l'instant t=0, la bille quitte le point E avec la vitesse $\vec{v_E}$ de norme $v_E = 5{,}9m.s^{-1}$ et faisant un angle $\theta_1 = 35{,}3°$ avec l'horizontale.

1. Dans le repère (E,$\vec{\imath},\vec{\jmath}$), établir les équations horaires puis l'équation cartésienne du mouvement de la bille.
2. Déterminer les coordonnées du pont d'impact I de la bille sur le sol sachant que E est à la hauteur h=5m du sol
3. Calculer la vitesse de la bille lorsqu'elle arrive au point I.

EXERCICE 12

I. Un pendule pesant est constitué par un barreau AB de masse m, de longueur L, oscillant autour d'un axe horizontal (Δ) perpendiculaire à la barre passant par A.

1. Démontrer que le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe (Δ) est :$J_\Delta = \frac{1}{3}mL^2$.
2. a)) Établir l'équation différentielle des oscillations de faible amplitude de ce pendule pesant.

b)) Sachant qu'à l'instant t = 0s, on lâche le barreau sans vitesse initiale d'un angle α_1 par rapport à la verticale, déterminer l'équation horaire des oscillations et calculer sa période.

$A.N: m = 1kg, L = 0{,}30m\, , g = 10m.s^{-2}\, , \pi^2 = 10\ et\ \alpha_1 = 6°$.

c)) Calculer la vitesse de l'extrémité B au passage par la verticale.

3. On écarte le barreau d'un angle α_2 de sa position d'équilibre.

a)) Calculer l'énergie potentielle de pesanteur du barreau dans cette position, l'origine de l'altitude sera l'horizontale passant par A. $A.N: \alpha_2 = \frac{5\pi}{6} rad$

b)) On lâche le barreau sans vitesse initiale. Déterminer la vitesse de l'extrémité B au passage par sa position d'équilibre.

II. Le barreau peut maintenant tourner autour d'un axe ΔG passant par son centre de gravité G sous l'action d'un moteur.

En admettant que le moteur développe une puissance P constante, Calculer en fonction du temps t, la vitesse de rotation ω du barreau. A.N : P = 1,5W et t = 4s.

III. 1. Arrivée à la vitesse $N_0 = 1400 tr.min^{-1}$, le moteur conserve cette vitesse.

A l'instant t=0s, on coupe l'action du moteur et on exerce un couple de freinage de moment constant $M_f = -5.10^{-2}N.m$.

Calculer la durée du freinage et le nombre de tours effectués.

2. Pour arrêter le barreau, on peut aussi appliquer à t=0s, un couple de frottement de moment proportionnelle à la vitesse angulaire : $M_f = -K\omega$. On donne $K = 1{,}5.10^{-4}u.S.I$.

a)) Ecrire l'équation différentielle du ralentissement liant $\frac{d\omega}{dt}\ et\ \omega$.

b)) Déterminer la solution $\omega(t)$ de cette équation différentielle.

c)) Au bout de combien de temps, la vitesse a-t-elle diminuer de moitié ?

d)) Quelle est la vitesse ω à t = 10s.

EXERCICE 13

Une cible A de masse M = 30g es suspendue à l'extrémité d'un tige T de longueur $l = 10cm$ et de masse négligeable. Cette tige peut aussi osciller autour d'un axe horizontal passant par son extrémité supérieure est soumise à une couple de rappel de moment $-C\theta\, , C = 0{,}96U.S.I$ qu'un ressort exercice sur elle quand elle fait un angle θ avec sa position d'équilibre verticale.

Une bille B de mase $m = 10g$ est lancée est lancée à partir de l'origine d'un repère (Ox, Oy) lié à un référentiel galiléen avec $v_0 = 10m.s^{-1}$, faisant un angle$\beta = \frac{\pi}{6}rad$ avec la verticale.

On suppose que les masse A et B ponctuelles.

1. Donner l'équation de la trajectoire de la bille dans le repère (Ox, Oy).
2. La bille doit atteindre la cible avec une vitesse horizontale.

a)) Quelles sont les caractéristiques de sa vitesse juste avant le choc ?

b)) A quelle hauteur doit se trouver la cible ?

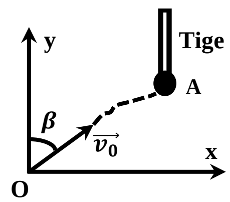
3. Calculer l'angle qu'atteint la tige avant d'osciller, en supposant qu'après le choc la bille et la cible restent solidaire.

On admet que, quand θ est plus petit, $\sin\theta \sim \theta\ \ et\ \ \cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

4. Quelle est la nature du mouvement de l'ensemble (tige + bille) après le choc ?
5. Donner l'équation horaire de ce mouvement.

Le choc a lieu à t = 0s, et l'ensemble se déplace dans le sens positif des élongations angulaires.

6. Comment varie la valeur de la fréquence de ce mouvement si la masse de la tige augmente et devient non négligeable ? Pourquoi ?



EXERCICE 14

Un pendule simple est formé par un fil inextensible de longueur $l = 80cm$ portant une masse ponctuelle $m = 50g$.

1. Le fil est écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha_m = 0{,}2rad$ puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

a)) A partir de la conservation de l'énergie mécanique, montrer que le mouvement est de la masse m est sinusoïdale de rotation.

b)) Donner la loi horaire exacte de ce mouvement.

c)) En d déduire les valeurs maximales de la vitesse et de l'accélération angulaire.

2. Le fil est écarté de sa position initiale d'un angle $\alpha = \frac{\pi}{3} rad$ de sa position d'équilibre. Trouver la vitesse de la masse m au passage à la position d'équilibre ainsi que la tension du fil.

a)) Si la masse m est abandonnée sans vitesse initiale de sa position d'équilibre,

b)) Si la masse m est lancée avec une énergie mécanique E=0,24J.

.3. Le fil est immobile. On communique à la masse m une vitesse horizontale $\vec{v}_0$ de module v_0, la masse m décrit alors un cercle de rayon l dans le plan vertical. Au sommet de la trajectoire, la masse m a une vitesse $v = 2m.s^{-1}$. Calculer la vitesse v_0.

<u>EXERCICE 15</u> ***(Problème)***

1. On fixe à la périphérie d'un disque de centre O, de rayon $R = 10cm$ et de masse $M = 100g$ deux billes B_1 et B_2 identiques à la bille B de masse$m = 10g$.

Elles sont diamétralement opposées.

Le système S= {disque + deux billes} oscille autour d'un axe (Δ) perpendiculaire au vertical du disque à la distance $d = \frac{R}{2}$ du centre de gravité du système S.(figure 1)

a)) Calculer le moment d'inertie du système S par rapport à(Δ).

b)) On écarte le pendule ainsi constitué d'un angle $\alpha_m = 0{,}1rad$ de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse à t=0. Établir l'équation différentielle réagissant le mouvement du système S. En déduire son équation horaire.

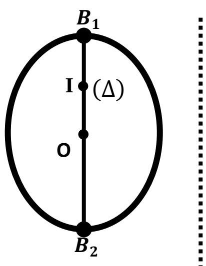
2. On remplace l'axe (Δ) à un fil de torsion métallique de constante de torsion C et de longueur $AB = l$.

On soude le système S en un point O du fil tel que $OA = l/2$. On obtient alors un pendule qui est à la fois pesant et torsion. On suppose que le fil est horizontal (figure 2).

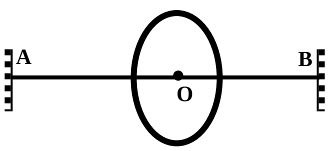
a)) Établir l'expression de l'énergie mécanique du système $S' = \{S + fil\ de\ torsion + Terre\}$ à l'instant t et en déduire l'équation différentielle régissant le mouvement du pendule pour des oscillations de faible amplitude.

b)) Calculer la constante de torsion C sachant que la période des oscillations est $T = 0{,}5s$.

<u>Rappel</u> : l*a constante de torsion C est inversement proportionnelle à sa longueur l.*



<u>figure1</u>



<u>figure 2</u>

<u>EXERCICE 16</u> ***(Problème)***

Dans tout le problème, on prendra $g = 10m.s^{-2}$ et on négligera tous les frottements passifs.

Toute application numérique doit être procédée du calcul littéral.

<u>Partie A</u>

Un disque homogène de centre O et de rayon R =10cm, a une masse $M = 1{,}3kg$. Dans une première expérience, le disque est abandonné sans vitesse initiale, roule sans glisser sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale.

1. Exprimer l'énergie cinétique totale du disque en fonction de la vitesse du centre de gravité.
2. Déterminer l'accélération du centre de gravité du disque.
3. Établir l'expression de la vitesse v après un parcours de longueur l sur le plan incliné.

<u>Partie B</u>

Par l'intermédiaire d'une tige de masse négligeable, on relie dans son plan, le centre O du disque à un corps A assimilable à un point matériel de masse $m = 200g$. (figure 1)

On donne $OA = l = 60cm$. L'ensemble est mobile autour d'un axe horizontal passant par O.

1. Déterminer le centre de gravité G du système S={disque + corps A}.
2. Quelle est la vitesse de G quand le système passe par la position d'équilibre, au cours d'amplitude égale à 90° ?
3. On considère les oscillations d'amplitude $x_m = 0{,}1rad$.
   Déterminer :
   a)) La nature du mouvement et la période du système.
   b)) La vitesse angulaire du système au passage par la position d'équilibre et la vitesse de G et de A dans les mêmes conditions.

<u>Partie C</u>

Le disque est maintenant suspendu en son centre par un fil de torsion vertical dont l'autre extrémité est fixé (la tige est supprimée). On écarte le disque de sa position d'équilibre, par rotation autour de l'axe du fil et on l'abandonne à lui-même (figure 2).

1. Montrer que le mouvement est sinusoïdal de rotation. Calculer la période T_0 sachant que la constante de torsion du fil est $C = 6{,}5.10^{-3}u.S.I.$
2. On remonte le disque le long du fil vertical dont on attache l'extrémité inférieur.
   On pose $OP = X$. La longueur du fil, la même que dans la question C/1 , est L = 1,80m.
   a)) Sachant que la constante de torsion du fil est inversement proportionnelle sa longueur, exprimer en fonction de T_0 , L et X , la période T du mouvement du disque.

b)) Déterminer la valeur de X pour laquelle la période T est maximale. Calculer cette période maximale.

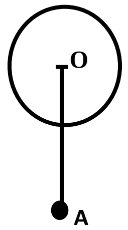


figure1

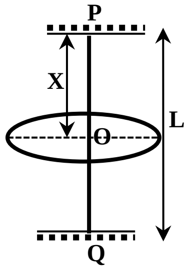


figure2

EXERCICE 17 ***(Problème)***

On considère une pendule de torsion constituée par un disque homogène horizontal de centre O, de masse $M = 200g$ et de rayon $R = 20cm$ suspendu à un fil de torsion de longueur $L = 120cm$ et une constante de torsion $C = 10^{-2}N.m.rad^{-1}$.

L'extrémité supérieure du fil est fixée au point K.

Le disque peut tourner autour d'un axe (Δ) confondu avec le fil de torsion. L'ensemble est en équilibre lorsque le fil n'est pas tordu. (Voir figure1).

I. On fait tourner le disque autour de l'axe d'un angle θ et on l'abandonne à lui-même

1. Déterminer l'équation différentielle de ce mouvement.
2. Calculer sa période T_0.

II. On place deux masses identiques $m_1 = m_2 = \frac{M}{2}$ qui peuvent glisser le long du diamètre (AB) Ces deux masses sont à chaque instant équidistants du point O : $Om_1 = Om_2 = d$

On fait tourner à nouveau le disque d'un angle θ et on l'abandonne à lui-même.

1. Montrer que le moment d'inertie du système {disque + masses} est : $J'_\Delta = \alpha + \beta d^2$.
   Quelles son les valeurs de α et β ?
2. a)) Donner l'expression de la nouvelle période T_1 en fonction de d^2.
   b)) Calculer sa valeur pour d=0, quelle remarque faites –vous ?
3. On place les deux masses m_1 et m_2 à une distance $d = \frac{R}{2}$ du centre O. On fait tourner le disque de 2radians à partir de sa position d'équilibre et on l'abandonne à t=0s, à lui-même.
   a)) Déterminer l'équation du mouvement $\theta_2(t)$ et en déduire l'expression de la vitesse instantanée $\dot{\theta}_2(t)$.
   b)) Calculer la valeur de l'accélération angulaire lorsque l'élongation est maximale.
   c)) Montrer que l'énergie mécanique de ce pendule de torsion est constante et la calculer.

III. On enlève les masses m_1 et m_2 et on remonte le disque le long d'un fil.

On attache l'extrémité inférieure du fil à un point fixe K' (voir figure 2). On écarte le disque de sa position d'équilibre et on l'abandonne à lui-même.

1. Le disque étant soumis à deux couples de torsions des constantes C_1 et C_2.
   Montrer que la période du pendule à pour valeur :
   $$T_2 = \frac{T_0}{L}\sqrt{L_1 \times L_2}$$

Indication : La constante de torsion est inversement proportionnelle à sa longueur.

2. Calculer la valeur de T_2 $pour$ $K'O = L_1 = 80cm$
3. Calculer la période pour $L_1 = L_2$ qu'on notera T'_2.
   Que peut-on conclure ?

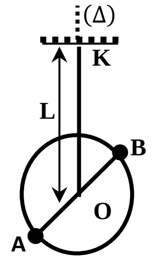


figure1

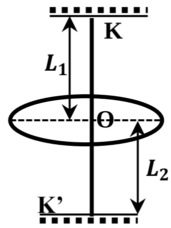


figure 2

EXERCICE 18 ***(Problème)***

On considère le dispositif suivante : B est un raideur k, dont l'allongement est proportionnel à la tension, D est un disque homogène d'axe horizontal fixé, de masse m, de rayon r, mobile sans frottement autour de cet axe et dont le moment d'inertie par rapport à cet axe est J.

I. (S) est un solide de masse M, lié au ressort par un fil inextensible et sans masse, s'enroulant sur le disque.

1. Établir la relation donnant l'allongement Δl du ressort à l'équilibre.
2. On déplace (S) verticalement vers le bas d'un allongement < Δl et on l'abandonne sans vitesse initiale.
   a)) Etablir que le disque prend un mouvement sinusoïdal de rotation d'élongation angulaire.
   b)) Établir et calculer la période T_0 de ce mouvement.
   On donne : $k = 100N.m^{-1}$; m = 1kg ; r = 10cm ; M = 2,5kg

II. On place deux masses identiques $m_A = m_B = 0{,}5kg$ qui peuvent glisser le long du diamètre (AB).

Ces deux masses sont à chaque instant équidistante du point O. (OA = OB = d =4cm).

On abandonne à nouveau le système sans vitesse initiale et d'une longueur de 5cm.

1. Déterminer l'expression de la nouvelle période, noté T_1.
2. Faire son application numérique pour d = 0.

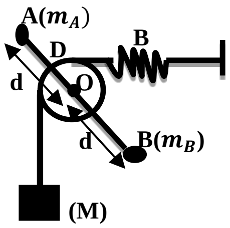
III. En réalité le fil est coupé.

La masse M est lancé verticalement vers le bas avec une vitesse initiale v_0. Elle est soumise en plus de son poids à la résistance de l'air $\vec{f}$. Cette résistance est de la forme $\vec{f} = -k\vec{v}$; où k est une constante positif et $\vec{v}$ la vitesse instantanée de la masse M.

1. Établir l'équation différentielle de la vitesse v et vérifier que la solution de cette équation est de la forme $v = \frac{Mg}{k} + Ce^{-kt/M}$.

2. a)) Donner l'expression de C en fonction de v_0, M, g et k.

b)) Montrer que la vitesse du centre d'inertie de la masse tend vers une valeur limite dont on précisera son expression.

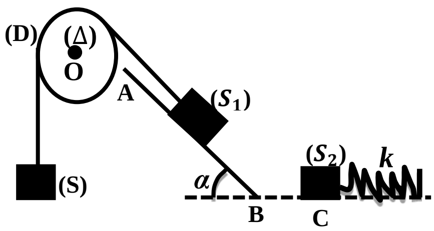


EXERCICE 19

Dans tout le problème, on négligera les frottements.

Un disque (D) plein et homogène de masse M = 200g et de rayon r = 10 cm peut tourner autour d'un axe horizontal (Δ) passant par son centre O. On enroule sue le disque (D) un fil inextensible dont l'une de ses extrémité est liée à une solide (S) de masse m = 100g. L'autre extrémité est liée à un solide(S_1) de masse m_1=700g posé sur un plan incliné [AB] faisant un angle α avec l'horizontal.

Lorsque le solide(S_1) ne touche pas le disque (D), le fil restant tendu.



1. Le solide(S_1) se déplace sur le plan incliné AB avec une accélération a=2,5m.s^{-2}.

a)) Calculer, en degré, la valeur de l'angle α.

b)) Partant en A sans vitesse initiale, le solide(S_1) arrive en B avec une vitesse $v_B = 4m.s^{-1}$. Calculer le travail de la tension du fil T_1 de A à B et la durée du parcours AB.

Déduire alors le nombre de tours effectué par le disque (D) à l'arrivée de (S_1) en B.

2. En arrivant en B, le solide(S_1) se détache du fil et poursuit sa course sur le trajet horizontal BC avec la vitesse acquise en B.

Il vient heurter un autre solide S_2 de masse m_2 immobile accroché à l'extrémité libre d'un ressort de masse négligeable, à spires non jointives et de constante de raideur k=400N.m^{-1}.

Après le choc, les deux solides s'accrochent et forment un seul système de centre d'inertie G. La vitesse de G juste après le choc est v_G =2m.s^{-1} . Calculer la masse m_2 et le raccourcissement maximal X_m du ressort.

3. Dans toute la suite, on prendra m_2=700g.

a)) Déterminer l'équation différentielle du mouvement ultérieur du système formé par les solides S_1et S_2.

Déduire la valeur de la période T_0 du mouvement.

b)) L'origine des abscisses est la position où le choc a eu lieu. Écrire l'équation horaire du mouvement de G en prenant comme origine des dates l'instant où G se trouve au point de raccourcissement maximal du ressort.

EXERCICE 20

1. Un cerceau homogène en bois de masse $M = 1kg$ et de rayon $R = 20cm$ roule sans glisser sur un plan incliné qui fait un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontal.

a)) Calculer l'accélération du centre d'inertie G au cours de la descendance du plan incliné.

b)) Établir l'expression de la vitesse du centre d'inertie G après un parcours de longueur l sur le plan incliné.

2. Le même cerceau est suspendu en O, sur un axe (Δ) horizontal (figure1).

a)) Quel est le moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe (Δ).

b)) On écarte le cerceau d'un petit angle $\theta_0 = 10°$ par rapport à la verticale OG et on le lâche sans vitesse initiale.

Établir l'équation différentielle, en déduire sa pulsation propre, sa période propre T_0 et l'équation horaire.

Quelle est la vitesse angulaire du cerceau lorsqu'il passe à sa position d'équilibre.

c)) Quelle est la longueur d'un pendule simple synchrone du pendule composé.

3. On accroche une petite bille en acier ponctuelle de masse $m = \frac{M}{2}$ au point A, diamétralement opposé en O. (figure2).

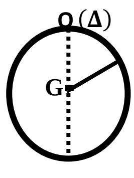
a)) Quel est le nouveau moment d'inertie J'_Δ.

b)) Donner l'équation horaire $\theta(t)$ si on excite l'ensemble dans les mêmes conditions qu'en 2.

c)) Donner la nouvelle période T'_0 .

4. Un électro-aimant exerce sur la bille une force $\vec{F}$ verticale dirigée vers le haut. On écarte le système de sa position d'équilibre, d'un petit angle θ et on le lâche sans vitesse initiale.

Déterminer l'intensité de la force $\vec{F}$ pour que la période du système oscillant $T''_0 = 2T_0$ avec T_0 la période propre du cerceau.



Figure

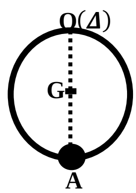


Figure 2

EXERCICE 21

On réalise un pendule en accrochant un solide ponctuel de masse m = 200g à l'un des extrémités d'un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur L =1m, l'autre extrémité étant fixée au point O. Le pendule est écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_0 = 0{,}2rad$ puis abandonné à la date t=0s, sans vitesse initiale. On prendra $g = 9{,}8m.s^{-2}$.

1. a)) En utilisant la relation fondamentale de la dynamique du solide en rotation, établir l'équation différentielle caractéristique du mouvement du solide.

b)) Montrer que pour des oscillations de faibles amplitude, le pendule peut être considéré comme harmonique . En déduire la période T_0 des oscillations.

c)) Donner l'expression de la loi horaire $\theta(t)$.

d)) Déterminer l'énergie mécanique E du système {pendule + Terre}.

2. Il existe en fait des forces des frottements dont le moment est proportionnel à la vitesse angulaire : $M = -h\dot{\theta}\ \ ,h = 0{,}36u.S.I.$

Les condition initiales : $\theta_0 = 0{,}2rad\ \ et\ \dot{\theta} = 0$.

a)) Établir la nouvelle équation différentielle.

On posera : $\lambda = \frac{h}{2mL^2}$.

b)) Montrer qu'on a un mouvement oscillatoire amorti.

Calculer la pseudo-période T.

c)) La loi horaire est de la forme

$$\theta(t) = \theta_m e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi)\ avec\ \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

Déterminer $\theta_m\ \ et\ \varphi$.

EXERCICE 22 **(Problème)**

La barre AB, considérée dans ce problème est rigide et homogène. Elle est conductrice et mesure AB = 2l = 20 cm, sa masse est M=100g. On prendra $g = 10m.s^{-2}\ \ et\ \pi^2 = 10$.

Partie A

Les extrémités A et B de la barre sont soudées aux extrémités inférieures de deux ressorts élastiques, linéaires, à spires non jointives, identiques, de même longueur à vide, de même raideur $k = 25N.m^{-1}$. Les extrémités supérieures des ressorts sont fixées en deux points M et N distants de $2l$; O étant la position du centre d'inertie de la barre à l'équilibre. Ce point O est également le niveau de référence, à énergie potentielle de pesanteur nulle ; c'est aussi l'origine des altitudes (voir figure 1).

1. Calculer l'allongement Δl_E de chaque ressort et l'énergie potentielle du système {barre, ressorts, Terre} à l'équilibre de la barre.

2. On abaisse la barre, parallèlement à elle-même, d'une longueur $a\ =\ 4\ cm$ de sa position d'équilibre puis on l'abandonne.

a)) Établir l'expression de l'énergie mécanique du précédent système à un instant t quelconque où la barre s'écarte de x de sa position d'équilibre animée d'une vitesse $\dot{x}$ en fonction de x, $\dot{x}$, M, k et Δl_E.

b)) Montrer que la barre forme un système conservatif (ou que le système {barre, ressorts, Terre} est isolé).

En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de translation de la barre et former l'équation horaire du mouvement de la barre.

c)) Donner l'expression de la tension instantanée T = f(t) de chaque ressort. A quels instants est-elle nulle ?

3. En réalité, la barra est soumis à une force de frottement, $\vec{f} = -h\vec{v}$, k= 0,44uS.I. A t = 0, $x_0 = $4cm et $\dot{x}_0$=0.

a)) En posant $\lambda = \frac{h}{M}$, établir la nouvelle équation différentielle

Calculer la pseudo-période T.

b)) Déterminer la loi horaire de ce mouvement.

Partie B

Dans cette partie, on négligera la masse de la barre.

1. La barre AB, (portant en A et en B un corps ponctuel de masse $:m_A = m_B = 80g$) de milieu O, est fixée sur un diamètre d'un cylindre homogène, de centre O, de rayon r = 20 cm et de masseM_1=500g .

Un solide (S) de masse m est suspendu par un fil inextensible et de masse négligeable est enroulée sur la surface d'un cylindre. (S) est initialement au repos.

a)) Déterminer la valeur de m pour que le cylindre effectue la troisième tour en 1,52 seconde.(voir figure 2).

b) Montrer qu'en faisant varier r , la grandeur $k = \frac{1}{m}$ est un polynôme du second degré de la forme : $k = -ax^2 + bx + c$ avec $x\ =\ r$. En déduire les valeurs numériques des constantes a, b et c. Calculer la masse m si r = $2{,}5cm$.

2. On considère le système (cylindre – barre AB – masse m) de la partie précédente. On fixe sur l'extrémité A de la barre une masse ponctuelle m' = 100 g. On suppose que seule la barre AB est conductrice du courant électrique.

Un dispositif approprié (non mentionné sur la figure) permet de faire passer un courant constant d'intensité I de A vers B.

Une partie de la tige est plongée dans un champ magnétique uniforme d'intensité B = 0,5 T, délimité dans le plan par le carré TPRQ. On fait passer le courant dans la barre AB.

Lorsque le système S = (cylindre, barre AB, masse m, masse m') est en équilibre, la barre AB fait un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{6}\ rad$avec la verticale (voir figure 3). On donne : m = 200g ; r = 2,5cm.

a)) Déterminer les forces dont les effets permettent au système (S) d'être en équilibre ainsi que leurs caractéristiques.

b)) Donner le sens de $\vec{B}$ et Calculer la valeur de l'intensité I du courant qui traverse la barre AB lorsque (S) est en équilibre.

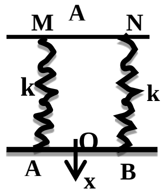


figure 1

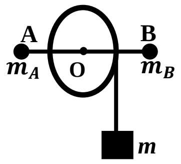


figure 2

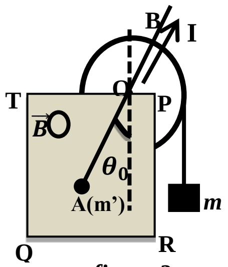


figure 3

EXERCICE 23 (**Problème**)

Un cadre rectangulaire indéformable comportant N spires identiques, de dimension MN=QP=a et NP=MQ=b.

Il est libre de tourner, dans un champ magnétique $\vec{B}$ horizontal, autour d'un axe vertical passant par les milieux O et O' des cotés MQ et NP.

Le cadre est parcouru per un courant I = 4,5mA .Initialement, le coté MQ fait un angle $\theta_0 = \pi/6$ rad.

1. a)) Représenter sur le schéma en respective puis sur un schéma vue de dessus, les forces qui s'exercent sur l'un des côtés du cadre et Calculer la norme de ces forces.

   Quels sont les effets de rotation de ces forces ?

   b)) Quelle est la position d'équilibre stable du cadre ?

   c)) Calculer le flux du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ à travers le cadre dans la position initiale, puis dans la position d'équilibre déterminer en b)).

2. Le cadre est maintenant en circuit ouvert. On le fait tourner dans le sens positif en raison de $100\pi \text{rad.s}^{-1}$.

a)) Expliquer pourquoi le cadre est le siège d'une f.é.m.

Donner l'expression de cette f.é.m. et calculer sa valeur maximale.

b)) Déterminer l'expression du couple moteur, qui agit sur le carde et déduire sa valeur maximale.

3. Le cadre est maintenant suspendu à un fil de torsion vertical passant par le milieu O du coté MQ.

Cette cadre est toujours placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme; horizontal et parallèle au plan du cadre, lorsque celui-ci n'est pas parcouru par aucun courant.

a)) Le cadre est toujours parcourus par le courant.

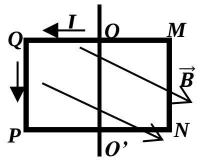
Les fils d'amenés du courant sont très souples pour ne pas gêner le mouvement du cadre. Écrire la condition d'équilibre du cadre et en déduire la constante de torsion C du fil.

b)) A t = 0, on supprime brusquement le courant dans le cadre ainsi que le champ magnétique $\vec{B}$.

Établir l'équation différentielle du mouvement du cadre ainsi que sa nature. Calculer la période T des oscillations du cadre.

<u>Données</u>: a=2,5cm ; b=4,0cm ; N=100 ; B = $1,2.10^{-2}$T.

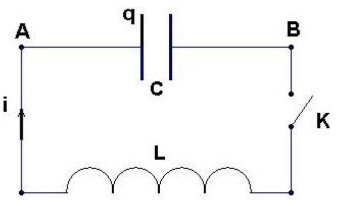
$J = 10^{-4} kg.m^2$(le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe OO').



Oscillateurs Électriques
Circuit (L.C)

Rappels sur les oscillations électriques

Libres non amorti circuit L.C



Soit un condensateur préalablement chargé par un générateur sous une tension E. Le condensateur étant chargé, on a à t=0,

$$q(0) = Q_{max} = CE = CU_0$$

On branche le condensateur à présent en série avec une bobine d'inductance pure (c'est-à-dire de résistance négligeable :$r = 0$)

1. Etude de l'évolution de la charge q dans le circuit LC

Loi d'additivité des tensions :

$$u_C = u_L \quad \Rightarrow \frac{q}{C} = L\frac{di}{dt} \text{ or ici } i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2} \Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad soit \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \text{ ou } \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \text{ (Oscillation harmonique)}$$

Equation différentielle régissant les variations de la charge q dans le circuit LC

Cette équation admet une solution de la forme :

$$q(t) = Q_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad Ou \quad q(t) = Q_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Q_{max} : amplitude ; $\omega_0 t + \varphi$: phase de la charge q(t) à la date t

φ : phase initiale de la charge q(t) à la date t=0

2. Pulsation propre et période propre

$$On\ a: \ \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Donc la pulsation propre du circuit LC a pour expression :

$$\omega_0^{\ 2} = \frac{1}{LC} \ soit\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La période propre est : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$

Remarque :

L et C sont les seuls facteurs influençant la période :

· Si L augmente, T_0 augmente

· Si C augmente, T_0 augmente

Equation différentielle liant la tension u du condensateur

$$On\ a: \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \ or\ q = Cu \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC}u = 0$$

3. Charge maximale Q_{max} et la phase à l'origine :

Exemple : à t=0, on enregistre les variations de q dès qu'on branche le condensateur préalablement en série aux bornes de la bobine : $q(0) = q_{max}$

$$q(0) = q_{max}\cos(\varphi) \Rightarrow q_{max}\cos(\varphi) = q_{max}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \quad donc: \ q(t) = Q_{max}\cos(\omega_0 t)$$

4. Expression de l'intensité du courant dans le circuit

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}[Q_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)] = \omega_0 Q_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$i(t) = I_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi) \quad avec \quad I_{max} = \omega_0 Q_{max} = CU_{max}\omega_0$$

5. Etude énergétique des oscillation non-amorties :

Dans le condensateur $E_{el} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ et dans la bobine $E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2$

Donc l'énergie totale du circuit, appelée énergie électromagnétique : $E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 = cte$ s'il n y a aucune perte

$$E = E_e + E_m = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$

$q(t) = Q_{max}\cos(\omega_0 t)$ et $i(t) = I_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$E = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q_{max}^{\ 2}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}LI_{max}^{\ 2}\sin^2(\omega_0 t)$$

$or\ Q_{max} = CU_{max}\ \ et\ I_{max} = C\omega_0 U_{max} \quad \omega_0\ LC\omega_0^{\ 2} = 1$

$$\Rightarrow \ E = \frac{1}{2}CU_{max}^{\ 2}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}LC^2\omega_0^{\ 2}U_{max}^{\ 2}\sin^2(\omega_0 t)$$

$$Or \quad LC\omega_0^{\ 2} = 1$$

$$\Rightarrow \ E = \frac{1}{2}CU_{max}^{\ 2}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}CU_{max}^{\ 2}\sin^2(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}CU_{max}^{\ 2}\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right) = \frac{1}{2}CU_{max}^{\ 2} = cste$$

$$or: \ U_{max} = \frac{I_{max}}{C\omega_0} \Rightarrow E = \frac{1}{2}C \times \frac{I_{max}^{\ 2}}{C^2\omega_0^{\ 2}} = \frac{1}{2}\frac{I_{max}^{\ 2}}{C\omega_0^{\ 2}} = \frac{1}{2}LI_{max}^{\ 2}$$

$$D'où: E = \frac{1}{2}CU_{max}^{\ 2} = \frac{1}{2}LI_{max}^{\ 2} = cte \ \ et \ \ CU_{max}^{\ 2} = LI_{max}^{\ 2}$$

Détermination de l'équation différentielle à partir de l' Energie électromagnétique totale

$$E = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2 = cste$$

Les oscillations sont harmonique, alors l'énergie totale se conserve : $E = cste \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}C\frac{du^2}{dt} + \frac{1}{2}L\frac{di^2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}C \times 2u\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}L \times 2i\frac{di}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow Cu\frac{du}{dt} + Li\frac{di}{dt} = 0 \quad or\ i = -C\frac{du}{dt} \quad et \quad \frac{di}{dt} = -C\frac{d^2u}{dt^2}$$

$$\Rightarrow Cu\frac{du}{dt} + L\left(-C\frac{du}{dt}\right) \times \left(-C\frac{d^2u}{dt^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow Cu\frac{du}{dt} + LC^2\frac{du}{dt} \times \frac{du^2}{dt^2} = 0 \Rightarrow C\frac{du}{dt}\left(u + LC\frac{du^2}{dt^2}\right) = 0$$

$$or\ C\frac{du}{dt} \neq 0 \Rightarrow \ u + LC\frac{du^2}{dt^2} = 0 \quad d'où\ : \ \frac{du^2}{dt^2} + \frac{1}{LC}u = 0$$

Exercices sur Les Oscillateurs Électriques

EXERCICE 01

1. Une bobine assimilable à un solénoïde de longueur l=1,5m, de rayon R=10cm et d'inductance $L = 0,1H$ et de résistance r =5Ω traversée par un courant d'intensité $i = 300mA$.
   a)) Calculer le flux d'auto-induction à travers la bobine.
   b)) Donner les caractéristiques du champ magnétique $\vec{B}$ créé à l'intérieur du solénoïde.
   c)) Le courant est continu, d'intensité constant I.
   Calculer la tension aux bornes de cette bobine.
   d)) L'intensité du courant varie maintenant au cours du temps.
   A l'instant $t_1 : i = 300mA$ et $\frac{di}{dt} = 2A.s^{-1}$,
   calculer la tension aux bornes de la bobine à l'instant t_1.
   e)) Calculer l'énergie emmagasinée par la bobine à l'instant t_1.
2. On relie les borne de la bobine précédente, de résistance négligeable et d'inductance L=0,1H à un condensateur de capacité C= 10µF. A l'instant t=0, l'intensité est nulle et la tension aux bornes est U=10V.
   a)) Quel phénomène physique se produit-il dans le circuit ?
   Calculer la charge initiale Q_0 du condensateur.
   b)) Etablir la relation différentielle liant d^2u/dt^2, u, L et C.
   En déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations électriques.
   Exprimer en fonction du temps t, les variations de la tension u (t) et de l'intensité i (t) du courant.
   c)) Ecrire l'énergie électromagnétique totale du courant puis retrouver l'équation différentielle précédente.

EXERCICE 02

1. Soit un solénoïde de longueur l=40cm, comportant 2500spires, de rayon r=2cm et parcouru par un courant d'intensité I=5A.
   a)) Déterminer les caractéristiques du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ créé au centre du solénoïde par le passage du courant.
   b)) Calculer l'inductance L de ce solénoïde.
   c)) Calculer le flux propre du champ magnétique $\vec{B}$ créé au centre du solénoïde.
2. Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension constante U. Calculer sa charge Q_0 ainsi que l'énergie emmagasinée E_0. On donne : $C = 2,5.10^{-6}F$; $U = 20V$.
3. Les armatures de ce condensateur chargé sous la tension U, sont reliées à une bobine d'inductance L dont on néglige la résistance. A l'instant pris comme origine des temps, on ferme l'interrupteur K.
   a)) Etablir l'équation différentielle du circuit à laquelle obéit u(t).
   b)) Une solution de cette équation différentielle est de la forme
   $$u(t) = U_{max}\,cos(\omega_0 t + \varphi)$$
   avec U_{max} , ω_0 et φ des constantes tel que $U_{max} > 0$.
   Déterminer les valeurs des grandeurs ω_0 , U_{max} et φ .
   On donne : L=25mH.
   c)) Montrer que l'énergie totale dans le circuit est constante et calculer sa valeur numérique.

EXERCICE 03

Soit un condensateur de capacité C=6µF, chargé sous une tension U=1V. On branche ce condensateur aux bornes d'une bobine d'inductance L. L'intensité maximale du courant qui circule dans le circuit est $I_{max} = 2,4mA$.

1. a)) Schématiser le schéma du circuit et l'orienter.
   Quel phénomène physique observe-t-on dans le circuit ?
   b)) Calculer la charge maximale Q_{max} du condensateur.
2. Etablir l'équation différentielle liant la charge q du condensateur et sa dérivée par rapport au temps t.
3. Calculer :
   a)) la pulsation propre, la période et l'inductance L de la bobine.
   b)) les relations donnant l'intensité du courant dans le circuit, la charge et la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps t.
   c)) Calculer l'énergie emmagasinée par le condensateur d'une part et par la bobine d'autre part en fonction du temps.
   Montrer que l'énergie totale est constante et calculer sa valeur numérique.

EXERCICE 04

Un condensateur de capacité C=12µF préalablement chargé sous une tension U_0=12V, est branché à l'instant t=0, aux bornes d'une bobine d'inductance L=9,0mH.

1.a)) Schématiser le circuit (L,C).
   b)) L'orienter et designer l'armature qui porte la charge positive.
2. a)) Exprimer en fonction de la charge q, les tensions aux bornes du condensateur et de la bobine.
   b)) Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de q aux cours du temps.
3. a)) Donner l'expression générale des solutions de l'équation différentielle décrivant l'évolution de la charge q en fonction du temps.
   Expliquer les différents termes de cette solution.
   b)) Donner l'expression de la période T_0 du circuit oscillant.
   c)) Déterminer q(t) en tenant compte de condition initiale.
   d)) Donner avec des valeurs numériques les équations décrivant l'évolution en fonction du temps de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant.

EXERCICE 05

1. On établit une tension constante U aux bornes (A et B) des armatures d'un condensateur de capacité C. Calculer la charge maximale Q_{max} du condensateur.
2. Le condensateur étant chargé, on isole ses armatures et on le décharge dans une bobine d'inductance L et de résistance r.
   a)) Etablir l'équation différentielle des oscillations électriques dans le circuit.
   b)) Donner l'expression de l'énergie totale électrique (condensateur) et magnétique (bobine) du circuit.
   c)) Montrer que de l'énergie totale varie au cours du temps et préciser la forme sous laquelle se manifeste cette variation.
   d)) Quelle est la nature des oscillations électriques ainsi obtenues ? Que se passera-t-il dans le circuit pendant un temps suffisamment long ?
   e)) Si la résistance de la bobine r est négligeable, qu'elle serait la nature des oscillations ?
   Calculer la valeur de leur fréquence propre.

On donne : $C = 6{,}28\mu F$; $U = 50V$ et $L = 0{,}318H$.

EXERCICE 06

Un circuit comportant un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L=10mH et de résistance négligeable. Il est le siège d'oscillations électriques de période propre $T_0 = 0{,}2ms$.
Ce condensateur est initialement chargé sous une tension de 5V.
On fera un schéma.

1. a)) Calculer la capacité du condensateur.
   b)) En déduire la charge maximale portée par l'armature du condensateur.
2. a)) Etablir équation différentielle liant la charge q du condensateur à sa dérivée seconde par rapport au temps.
   b)) En déduire l'équation horaire. L'origine des dates est choisie à l'instant où le condensateur est relié à la bobine.
3. a)) Calculer l'énergie emmagasinée dans le circuit oscillant.
   b)) En déduire l'amplitude maximale I_{max} de l'intensité du courant dans le circuit.

EXERCICE 7

On charge un condensateur de capacité $C = 30\mu F$ à l'aide d'une source de courant qui débite, pendant le temps $t = 10{,}5s$, un courant d'intensité constante $= 22\mu A$.
Ce condensateur est relié en série avec une résistance $R = 2k\Omega$.

1. a)) Faire le schéma, calculer la tension U_0 entre ses armateur et établir l'équation liant la tension U du condensateur et sa dérivée par rapport aux temps et les caractéristiques des composants du circuit.
   b)) Soit $U = A + Be^{-\beta t}$ est solution de l'équation précédente. En déduire les valeurs de A, B et β.
   c)) Qu'appelle –t-on constante du temps τ du circuit ? Que représente τ ? Calculer sa valeur numérique.
   d)) Donner l'expression de la charge $q(t)$ du condensateur. En déduire celle de l'intensité $i(t)$ dans le dipôle RC. Quelle est la valeur de l'intensité en régime permanent ?
   e)) Sous quelle forme l'énergie emmagasiné dans le condensateur est- t-elle dissipée. Calculer sa valeur numérique.
2. Les armatures de ce condensateur chargé sous la tension U_0, sont reliées à une bobine idéale d'inductance L. A l'instant pris comme origine des temps, on ferme l'interrupteur K..
   Il est le siège d'oscillations électriques de période propre T_0=6ms.
   a)) Calculer la valeur de l'inductance L de la bobine et la charge maximale portée par l'armature du condensateur.
   b)) Etablir l'équation différentielle du circuit à laquelle obéit u(t).
   c)) En déduire l'équation horaire. L'origine des dates est choisie à l'instant où le condensateur est relié à la bobine.
   d)) Calculer l'énergie emmagasinée dans le circuit et en déduire l'intensité maximal I_{max} du courant dans le circuit.

Circuit (R.L.C) En Régime Sinusoïdal Forcé

Rappels sur le circuit (R.L.C) en série

Un circuit RLC en série initialement chargé est le siège d'oscillations électriques libre mais amorties car le circuit dissipe de l'énergie par l'effet joule. Pour compenser ces pertes d'énergie on peut appliquer une tension sinusoïdale au circuit RLC : on a ainsi des oscillations électriques forcées.

I. Grandeur alternatives

1. Courant alternatif

Un courant alternatif sinusoïdal est un courant dont l'intensité est une fonction sinusoïdale du temps : $i = I_{max}\sin(\omega t+\varphi)$ avec I_{max} : intensité maximale ; ω : pulsation imposé par le générateur ; $\omega t+\varphi$: phase à l'instant ; φ : phase à l'origine.

2. Intensité et tension efficaces

- Intensité efficace : $I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$
- Tension efficace : $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$

3. Impédance d'un dipôle

On définit l'impédance Z d'un dipôle par le rapport :

$$Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_{max}}{I_{max}}$$

II. Etude de quelques dipôles en courant alternatif

$On\ pose\ \ i = I_{max}\sin(\omega t)$

1.a)) Résistor (Conducteur ohmique pur R) :

$$u = Ri = RI_{max}\sin(\omega t) = U_{max}\sin(\omega t) \Longrightarrow U_{max} = RI_{max}$$

$$Z = \frac{U_{max}}{I_{max}} = R \quad et\ i\ et\ u\ sont\ en\ phase : \varphi = 0$$

b)) Bobine pure (R=0)

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\omega I_{max}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) = U_{max}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$D'où: U_{max} = L\omega I_{max}\ soit\ Z = L\omega \quad et\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

c)) Capacité (C)

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i dt = -\frac{I_{max}}{C\omega}\cos(\omega t)$$

$$u_L = \frac{I_{max}}{C\omega}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) = U_{max}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_{max} = \frac{I_{max}}{C\omega} \quad d'où: Z = \frac{1}{C\omega} \quad et\ \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

2. Circuit (R,L)

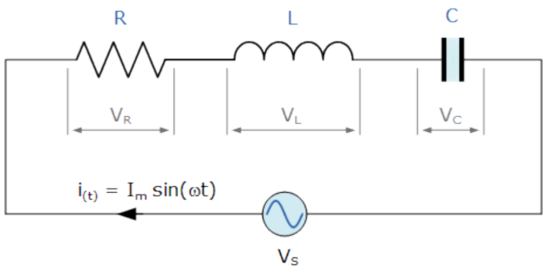
- Impédance : $Z = \frac{U_{max}}{I_{max}} = \sqrt{R^2+(L\omega)^2}$
- Déphasage : $\tan\varphi = \frac{L\omega}{R}$
- u est en avant de φ sur i

3. Circuit (R.C)

- Impédance : $Z = \frac{U_{max}}{I_{max}} = \sqrt{R^2+\frac{1}{(C\omega)^2}}$
- Déphasage : $\tan\varphi = \frac{1}{RC\omega}$
- u est en rétard de φ sur i

II. Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé :

Considérons le montage suivant (circuit RLC relié en série) :



1. Equation différentielle

La loi d'additivité des tensions : $V_S = V_R + V_L + V_C$

$$V_R = Ri\ ;\ V_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{dq^2}{dt^2}\quad et\quad V_C = \frac{q}{C}$$

$$D'où:\ V_S = Ri + L\frac{dq^2}{dt^2} + \frac{q}{C}\ \ :\ équation\ différentielle\ circuit\ RLC$$

2. a)) Impédance d'un circuit RLC

Notations : U : tension efficace et I : intensité efficace

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

b)) Déphasage φ de l'intensité i par rapport à la tension u

$$\tan\varphi = \frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R+r} = \frac{L(\omega^2-{\omega_0}^2)}{R\omega}$$

$avec\ \ {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$: pulsation propre du circuit

c)) Facteur de puissance : $\cos\varphi$

$$\cos\varphi = \frac{RI_m}{U_m} = \frac{RI_m}{ZI_m} = \frac{R}{Z}$$

d)) Tension efficace aux bornes de chaque composant

- Tension efficace aux bornes de R : $U_R = RI$
- Tension efficace aux bornes de L : $U_L = Z_L I = L\omega I$
- Tension efficace aux bornes de C : $U_C = Z_C I = \frac{1}{C\omega}I$

e)) Puissance Moyenne consommée dans le circuit

$$P = UI\cos\varphi\quad or\quad \cos\varphi = \frac{R_T}{Z} \Longrightarrow P = R_T I^2$$

3. Résonance d'intensité

a)) Propriétés de la résonance

- La résonance est obtenue pour $= N_0$ $(\omega_0 = 2\pi N_0)$, d'où :

$$LC{\omega_0}^2 = 1 \Longrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ et\ N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

ω_0 et N_0 sont respectivement la pulsation et la fréquence à la résonance.

- A la résonance la tension U=cste et I est maximal, donc Z est minimale. $Z = Z_0 = R\ \ et\ I = I_0 = \frac{U}{Z_0} = \frac{U}{R}$
- A la résonance, u et i sont en phase $\varphi = 0$

b)) Largeur de la bande passante

La bande passante d'un circuit (RLC) désigne l'ensemble des fréquence pour lesquelles la réponse en intensité est supérieur à 71% de la réponse à la résonance.

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R_T}{L} \quad et \quad \Delta N = N_2 - N_1 = \frac{R_T}{2\pi L}$$

c)) Facteur de qualité Q

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{L}{R_T} = \frac{1}{R_T}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{RC\omega_0} \quad (sans\ unité)$$

d)) Phénomène de surtension

- La tension maximale du condensateur à la résonance est :

$$U_C = \frac{I_0}{C\omega_0}\ or\ I_0 = \frac{U}{R} \Rightarrow U_C = \frac{U}{RC\omega_0} = QU$$

- La tension maximum aux bornes de la bobine à la résonance est : $U_L = L\omega_0 I_0 = L\frac{U}{R}\omega_0\frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{L{\omega_0}^2 U}{R\omega_0} = \frac{U}{CR\omega_0} = QU$

D'où : $U_C = U_L = QU$: Q est appelé coefficient de surtension

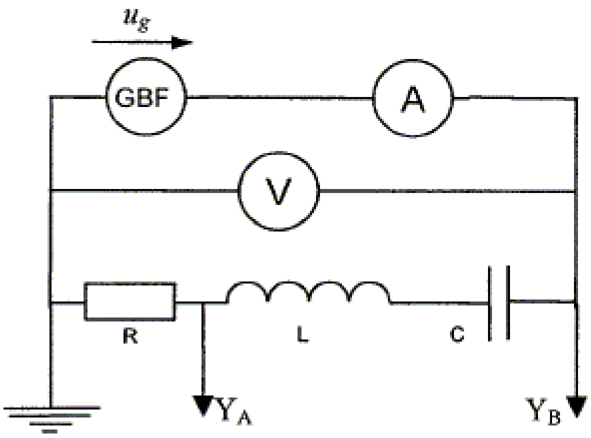
d)) Puissance moyenne à la résonance

$$P = UI\cos\varphi \quad or\ à\ la\ résonance\ \ \varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1$$

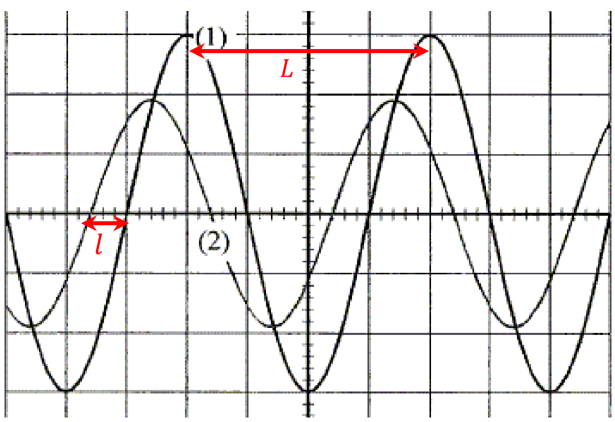
$$P = UI_0$$

III. Etude de tensions Sinusoïdales a l'oscilloscope

On désire étudier le comportement d'un circuit RLC série. On dispose d'un générateur basse tension (GBF), d'un oscilloscope, d'un ampèremètre (A) et d'un voltmètre (V).



On fait maintenant varier la fréquence du GBF. On obtient l'oscillogramme suivant :



1. Fréquence de la tension appliquée au circuit

$f = \frac{1}{T} \quad avec\ T = période$

2. Identification des courbes (1) et (2)

- Voie A : on visualise la tension aux bornes de la résistance R u_R
- Voie B : on visualise la tension aux bornes du dipôle RLC u_R.
- Si Z > R donc l'amplitude de la tension u_g est supérieure à celle de la tension u_R ; Y_B : courbe 1 et Y_A : courbe 2.
- Si Z < R donc l'amplitude de la tension u_g est inférieur à celle de la tension u_R ; Y_A : courbe 1 et Y_B : courbe 2.

3. Déphasage de la tension u_g par rapport à l'intensité du courant i.

On détermine graphique le déphasage la relation :

$$\begin{cases} 2\pi \rightarrow L \\ |\varphi| \rightarrow l \end{cases} \Rightarrow |\varphi| = \frac{2\pi l}{L}$$

Le déphasage de u par rapport à i est donc :

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

Exercices sur le circuit (RLC)

EXERCICE 01

1. Un solénoïde de longueur l = 5cm comportant N = 1000 spires est parcouru par un courant continu d'intensité I= 2A.
   Donner les caractéristiques du champ magnétique créé au centre de cette bobine.
2. En réalité, cette bobine possède une résistance R et une inductance L. On maintient entre ses bornes A et B une tension sinusoïdale u de fréquence N = 50Hz. : $u(t) = 110\sqrt{2}sin(\omega t)$.
   Lorsque la bobine est traversée par un courant d'intensité efficace I = 1,5 A, la puissance moyenne absorbée est P = 81W.
   a)) Faire le schéma de la bobine et Calculer le facteur de puissance de cette bobine.
   b)) Calculer l'impédance du circuit (R,L) et déduire les valeurs numériques de R et L.
   c)) Ecrire l'expression du courant instantané i en fonction de t.

EXERCICE 02

1. On branche un voltmètre aux bornes d'une source de courant alternatif. Il indique 220V. La fréquence du courant est 50Hz.
   Quelle est la valeur maximale de la tension de la source ?
2. On dispose en série aux bornes de la source précédente un conducteur ohmique de résistance R, une bobine B de résistance r et d'inductance L et un ampèremètre.
   L'ampèremètre indique $I = 3{,}5A$. Un voltmètre branché aux bornes du conducteur R indique $U_R = 40V$ et aux bornes de la bobine B, $U_B = 120{,}8V$.
   a)) Déterminer les impédances Z_R du conducteur ohmique, Z_B de la bobine et Z de l'ensemble {bobine – conducteur}.
   b)) Calculer les valeurs de R, r, et L.
   c)) Déterminer le déphasage entre la tension aux bornes de la source et l'intensité du courant.
   d)) Ecrire l'expression de l'intensité du courant en prenant comme origine des temps l'instant où la tension est maximale.

EXERCICE 03

Une portion de circuit électrique alimentée par une source de tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 100V$, de pulsation ω, comprend en série une bobine de résistance $R = 10\Omega$ et d'inductance $L = 0{,}30H$, et un condensateur de capacité $C = 20.10^{-6}$F. L'intensité instantanée du courant qui parcourt le circuit et la tension d'alimentation à ses bornes peuvent s'écrire respectivement : $\mathrm{i(t)} = \mathrm{I}\sqrt{2}\,\mathrm{sin}(\omega \mathrm{t})$ et $\mathrm{u(t)} = \mathrm{U}\sqrt{2}\,\mathrm{sin}(\omega \mathrm{t} + \varphi)$.

1. Donner sans démontrer les expressions littérales :
   a)) de l'impédance Z du circuit ;
   b)) de la valeur efficace I de l'intensité qui parcourt le circuit ;
   c)) du déphasage de la tension par rapport à l'intensité.
   Construire le diagramme de Fresnel relatif au circuit.
2. A.N. : Calculer Z, I, φ dans le cas où $\omega = 314 rad.s^{-1}$.
3. Soient u_1 et u_2, les valeurs instantanées des tensions qui apparaissent respectivement aux bornes de condensateur et de la bobine.
   a)) Calculer numériquement, dans les condition précédentes, les valeurs efficaces U_1 et U_2 correspondant respectivement à u_1 et u_2.
   b)) Ecrire les expressions de u_1 et u_2 en fonction du temps t.

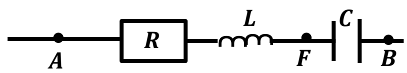
EXERCICE 04

Entre deux points A et B, on relie en série, un conducteur ohmique de résistance $R = 12\Omega$, une bobine de résistance interne négligeable et d'inductance L et un condensateur de capacité C.
On applique entre A et B une tension sinusoïdale en volt :
$u(t) = U\sqrt{2}sin(2\pi Nt + \varphi_1)$ où U = 120 V ; L'expression du courant instantané est : $i(t) = I_{max}\,sin(2\pi Nt)$.

1. On fixe L = 0,20 H ; C = 25 µF et N = 60 Hz.
   a)) Vérifier que l'impédance est Z= 33Ω.
   b)) Calculer l'intensité efficace I du courant.
   c)) Déterminer φ_1.
2. On garde toujours les valeurs précédentes de N, C et L.
   a)) Calculer la tension efficace U_{AF} entre A et F.
   b)) La tension instantanée entre A et F s'écrit :

$$U_{AF}(t) = U_{AF}\sqrt{2}\,sin(2\pi Nt + \varphi_2)$$

Calculer φ_2 et déduire l'expression $U_{AF}(t)$ en fonction du temps t.



EXRCICE 05

Un dipôle MN est constitué par l'association en série : d'un conducteur ohmique de résistance R, d'une bobine de résistance négligeable et d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.
On applique aux bornes de ce dipôle une tension sinusoïdale u(t), de pulsation w réglable. L'intensité instantanée du courant traversant le dipôle est alors :$i(t) = I\sqrt{2}\,cos(\omega t)$, I étant l'intensité du courant. On donne une valeur fixe à la tension efficace U appliquée aux bornes du dipôle.

1. Pour une valeur ω_2 de la pulsation ω, la tension appliquée aux bornes du dipôle est : $u(t) = U\sqrt{2}\,cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{4}\right)$.
   a)) Quel est le déphasage φ entre la tension u(t) et l'intensité du courant i(t) ?
   b)) En déduire l'impédance Z du dipôle MN.
   On donne : R = 20 **Ω**.
   c)) Calculer l'intensité efficace I et la tension efficace U, si la valeur efficace de la tension appliquée entre les points P et N est égale à $U_{PN} = 6\sqrt{2}\,V$.

d)) Montrer que : $\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4{\omega_0}^2}\right)$, ω_0 étant la pulsation à la résonance d'intensité de circuit.

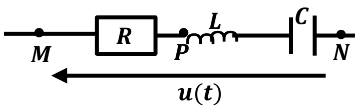
2. Soit ω_1 la pulsation telle que : $\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$.

a)) Montrer que $\sqrt{\omega_1 . \omega_2} = \omega_0$.

b)) Calculer ω_1 et ω_2 si $\omega_0 = 10^4 \text{rad.s}^{-1}$ et $\omega_2 - \omega_1 = 2.10^3 rad.s^{-1}$.

c)) En déduire les valeurs de L et C.

3. On donne à la pulsation ω la valeur ω_1. Construire le diagramme de Fresnel relatif à ce circuit RLC en série.



EXERCICE 06

Une portion de circuit AB est constitué d'un conducteur ohmique de résistance R, une bobine d'inductance L et de résistance r, un condensateur de capacité C. On applique entre A et B une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace $U_e = 4V$ et de fréquence N variable. On utilisera les expressions

$U_{AB} = U_{AB_{max}} cos(\omega t + \varphi)$ et $i_{AB} = I_{max} cos(\omega t)$.

On donne : $\boldsymbol{R = 345\Omega}$; $\boldsymbol{r = 55\Omega}$; $\boldsymbol{L = 0,8H}$; $\boldsymbol{C = 4,4\mu F, N = 100Hz}$.

1. a)) Donner l'expression de l'impédance Z du circuit et calculer sa valeur numérique.

b)) Faire la constriction de Fresnel relative au circuit considéré.

c)) Donner les expressions numériques de U_{AB} et i_{AB}, valeurs instantanées.

2. Pour quelle valeur de N_O le circuit est à la résonance ?

3. Définir la largeur de la bande passante et déterminer les valeurs des pulsations ω_1 *et* ω_2 qui la délimite.

4. Montrer que la largeur de la bande passante peut s'écrire en fonction de R, r et L.

5. Exprimer le facteur de qualité du circuit en fonction de ω_0 , ω_1, ω_2 et calculer sa valeur.

6. Donner l'expression de la puissance consommée dans le circuit en fonction de R, Z, r et U_e.

7. Calculer la puissance moyenne reçue par le circuit à la résonance.

EXERCICE 07

Entre deux points A et C d'un circuit, on place en série : entre A et B une bobine d'inductance L et de résistance r, entre B et C un conducteur ohmique de résistance R et un générateur de tension sinusoïdale délivre un courant $i(t) = I_{max} sin(\omega t)$ entre A et C.

On désigne par φ: la phase de la tension u_{AC}(t) par rapport à i(t), Z_1 l'impédance de la portion (A, B) ; φ_1 la phase de u_{AB}(t) par rapport à $i(t)$. Les mesures des tensions efficaces entre les différents points ont donné : $U_{AB} = U_{BC} = 70V$ et $U_{AC} = 70\sqrt{3}$V.

1. Exprimer : a)) $u_{AB}(t)$ en fonction de Z_1, I_{max}, ω et φ_1 .

b)) $u_{BC}(t)$ en fonction de R, I_{max} et ω.

2. a)) Construire le diagramme de Fresnel en tensions efficaces relatif à cette expérience.

b)) Calculer φ et φ_1 .

3. On donne $R = 100\ \Omega$.

a)) Calculer Z_1 r, L si ω= 100P rad s^{-1}.

b)) Donner l'expression de $u_{AC}(t)$.

EXERCICE 08

1. On considère un dipôle comprenant en série un conducteur ohmique de résistance R=50Ω, une bobine d'inductance L =0,4H et un condensateur de capacité C = 40 μF Aux bornes de ce circuit est appliquée une tension sinusoïdale $u(t) = 20\sqrt{2}\, sin\,(250t)$.

a)) Calculer l'impédance Z du circuit. Conclure.

b)) On règle la fréquence de la tension sinusoïdale à N = 50 Hz. Déterminer le déphasage entre la tension u (t) et le courant i (t).

c)) Donner l'expression du courant instantané i (t).

d)) Calculer la puissance moyenne consommée dans le circuit.

2. a)) Déterminer la capacité C du condensateur pour qu'il y ait résonance.

b)) Avec cette condition, calculer la puissance moyenne consommée par le dipôle RLC et la tension efficace aux bornes de la bobine.

EXERCICE 09

Un circuit (R,L,C) en série a une bande passante de $20\pi\, rad/s$ et un coefficient de qualité $Q = 100$. Alimenté sous une tension sinusoïdale de pulsation ω_o, le circuit est parcourue par un courant d'intensité efficace égale à $100mA$ lorsque la tension efficace est $10V$ (ω_o: pulsation à la résonance d'intensité).

1. Calculer R, L, C et ω_o.

2. a)) Quelle est, à la résonance d'intensité, la tension efficace aux bornes du condensateur ?

b)) Calculer la puissance moyenne consommée dans le circuit.

EXERCICE 10

On place en série une bobine d'inductance L et de résistance $r = 15\Omega$, un conducteur ohmique de résistance $R = 47\Omega$ et un condensateur de capacité $C = 3{,}3\mu F$.

On branche aux bornes de l'ensemble un générateur G de tension sinusoïdale, de fréquence réglable et de valeur efficace $U_0 = 2{,}2$V.

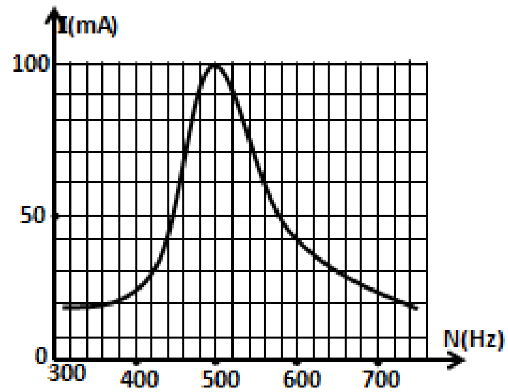
1. Faire le schéma du montage permettant de visualiser simultanément sur l'écran d'un oscilloscope bicourbe, les variations de la tension u_G aux borbnes du génerateur et les variations de la tension u_R aux bornes du conducteur ohmique.

2. On fait varier la fréquence N de la tension délivrée par le générateur et on constate que les deux sinusoïdales de l'oscillogramme sont en phases quand la fréquence N est égale à 148Hz. On mesure la tension efficace aux bornes du condensateur et on trouve $u_C = 15V$. Calculer :
   a)) L'inductance L de la bobine.
   b)) L'intensité I' du courant dans le circuit.
   c)) La largeur ΔN de la bande passante.
3. On fixe la fréquence du générateur à $N = 200Hz$ et on maintient aux bornes de l'ensemble la tension $U_0 = 2{,}2V$; la bobine a pour inductance $L = 0{,}35H$. Calculer :
   a)) L'impédance Z du circuit.
   b)) L'intensité efficace I du courant.
   c))La tension u_R aux bornes de la résistance R.
   d)) La différence de phase entre la tension et l'intensité.

EXERCICE 11

On branche un dipôle constitué par une bobine (L, r) montée en série avec une boite de résistance variable à $R = 10\Omega$ et un condensateur de capacité $C = 1\mu F$. L représente l'inductance de la bobine et $r = 10\Omega$ sa résistance interne. Ce dipôle est alimenté par un générateur à base fréquence (GBF). On souhaite visualiser à un oscilloscope relié à ce dipôle u(t) et i(t) simultanément :
u(t) représente la tension aux bornes du générateur et i(t) le courant qui traverse le dipôle. Sur la voie Y_1 on observe u(t) et sur la voie Y_2 on observe une tension proportionnelle à i(t).On notera R_T la résistance totale du circuit.

1. a)) Schématiser le montage en faisant apparaitre les branchements à l'oscilloscope.
   b)) Etablir l'équation différentielle liant u(t) et i(t) du circuit.
   c)) Faire la construction de Fresnel relative au circuit étudier.
2. On règle la fréquence du GBF de façon à obtenir à l'oscilloscope deux courbes en phase.
   La valeur N_O de la fréquence à cet instant est voisine de 500Hz.
   a)) Quel est le nom qu'on attribue à cet état ?
   Déduire la construction de Fresnel du circuit correspondant.
   b)) Montrer que l'équation différentielle s'écrit sous la forme : $L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = 0$
   c)) En exprimant u(t) sous la forme $U_{max}\, sin(2\pi N_0 t)$, trouver à partir de l'équation différentielle de la question précédente la relation reliant N_0 et les caractéristique du circuit.
   En déduire la valeur approchée de l'inductance L.
3. On représente la courbe de I_{eff} en fonction de N, en gardant la tension efficace constante et égale à 2V.
   On obtient la courbe ci-après :
   a)) En déduire de la courbe, la valeur réelle de N_O.
   b)) Définir la bande passante. Quelle est sa largeur ΔN.
   c)) Qu'appelle-t-on facteur de qualité Q d'un circuit ? L'évaluer.
   d)) En utilisant les données expérimentales, calculer les valeurs de R_T , L et C.
4. On note ω_0 la pulsation à la résonance et Q le facteur de qualité.
   a)) Pour une valeur ω de la pulsation, montrer que le déphasage φ entre u(t) et i(t) vérifie la relation : $tan\,\varphi = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ et montrer que l'impédance Z est donnée par :
   $$Z = (R + r)\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$
   b)) Montrer que le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R_T}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
   Calculer sa valeur approchée.
   c)) A la résonance l'intensité de la tension efficace U aux bornes de condensateur s'exprime simplement en fonction de U. Quel autre nom peut- t-on donner à Q.



EXERCICE 12

1. Un condensateur de capacité $C = 10\mu F$, préalablement chargé par une tension continue de valeur $U_C = 10V$, est relié à une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 0{,}1\,H$.
   A l'instant initial, la chargé du condensateur est $Q_O(Q_O>0)$ et l'intensité du courant est nulle.
   a)) Calculer la valeur de Q_O et établir l'équation différentielle à laquelle obéit la charge q du condensateur.
   b)) Exprimer la charge q en fonction du temps t.
   En déduire l'intensité maximale du courant.
   c)) Calculer l'énergie totale et retrouver l'équation différentielle en calculant la fréquence propre du circuit.
2. On applique une tension de $120\,V, 50\,Hz$ entre les bornes d'un dipôle comportant en série une bobine inductive et résistive et un condensateur. La valeur efficace de la tension entre les bornes du condensateur est 60 V. On donne : $L = 0{,}1H$ et $C = 10\,\mu F$.
   a)) Calculer l'intensité du courant dans le dipôle.
   b)) Calculer l'impédance du dipôle puis La résistance R du conducteur ohmique (le résistive).
   c)) Déterminer les valeurs efficaces des tensions aux bornes des composants.
   d)) Calculer le déphasage entre u(t) et i(t).

EXERCICE 13

Des élèves d'une classe de terminale scientifique désirent déterminer l'inductance L et la résistance r d'une bobine.

Pour ce faire, ils appliquent aux bornes de la bobine une tension alternative $u(t) = 12\sqrt{2}\cos(100\pi t + 0{,}92)$ sinusoïdale délivrée par un générateur de basse fréquence (GBF).

Un ampèremètre branché dans le circuit électrique indique la valeur efficace $I = 1{,}2A$ de l'intensité du courant électrique.

1. Donner les valeurs de la tension efficace U du GBF, de pulsation ω du GBF et de la phase de la tension u par rapport à l'intensité i du courant électrique.
2. Calculer l'impédance Z du dipôle.
3. a)) Rappeler les expressions $\cos\varphi$ (facteur de puissance) et de $\tan\varphi$

   b)) Déterminer les caractéristiques de la bobine (la résistance r et l'inductance L de la bobine). On prendra : $\varphi = 52{,}7°$.
4. Ils veulent obtenir le phénomène de la résonance d'intensité du courant électrique en insérant dans le circuit électrique un condensateur de capacité C afin de déterminer la valeur du facteur de qualité Q du circuit RLC ainsi constitué. Déterminer la valeur de la capacité C du condensateur.
5. Pour la suite de l'exercice, on prendra C = 400μF ; r = 6,0Ω.

   a)) Déterminer la valeur maximale de l'intensité efficace.

   b)) En déduire la valeur efficace Uc de la tension aux bornes du condensateur. c)) Calculer le facteur de qualité Q.
6. Le groupe d'élèves désire vérifier par calcul la valeur de l'inductance L de la bobine. Sur la bobine de longueur l = 40 cm et de section $S = 3{,}18.10^{-2}m^2$, ils lisent $N = 500$ spires.

   a)) Donner l'expression de l'inductance L_{th} de la bobine en fonction de $N, \mu_0,\ l\ et\ s$.

   b)) Calculer la valeur de l'inductance L_{th} de la bobine.

   c)) Comparer les deux valeurs de L et L_{th}.

EXERCICE 14

Un générateur de tension alternative sinusoïdale maintient entre ses bornes une tension $(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t$. On place en série aux bornes de ce générateur un résistor MN de résistance $R = 15\,\Omega$ et une bobine d'inductance L et de résistance r.

On observe sur l'écran d'un oscilloscope les courbes représentant les tensions $u_{NM}\ et\ u_{QM}$ en fonction du temps.

La sensibilité choisie pour visualiser u_{QM} est $3V.cm^{-1}$, celle pour visualiser u_{NM} est $1V.cm^{-1}$.

La base de temps est sur la graduation $2ms.cm^{-1}$.

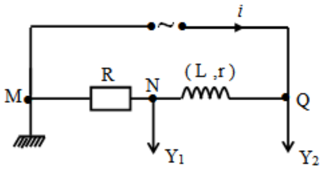


Figure1

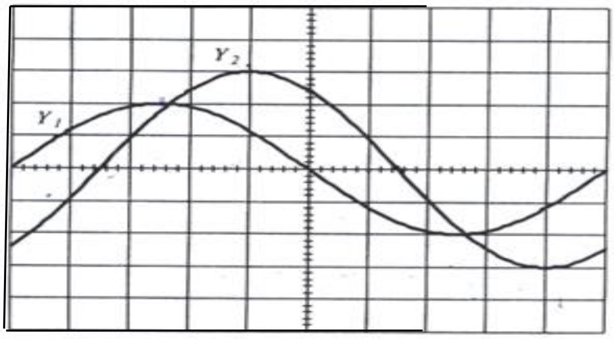


Figure2

1. a)) Déterminer la période des tensions, la fréquence et la pulsation délivré par le générateur.

   b)) Quelle est l'amplitude de chaque tension ?

   Quelle est la valeur efficace de chaque tension ?

   c)) Calculer l'intensité efficace aux bornes du générateur.
2. a)) Déterminer la valeur de la phase de la tension par rapport à l'intensité du courant.

   b)) Donner l'expression de i(t) si $u = U_m\cos\omega t$
3. Déterminer :

   a)) l'impédance totale Z du circuit

   b)) la résistance interne r et l'inductance L de la bobine.

EXERCICE 15

Lors d'une séance de travaux pratiques, on dispose du matériel suivant pour réaliser un circuit RLC série :

- un générateur basse fréquence ;
- un conducteur ohmique de résistance $R = 220\Omega$;
- un condensateur de capacité C inconnue;
- une bobine d'inductance $L = 0{,}450\ H$ et de résistance interne considérée comme nulle et un oscilloscope.

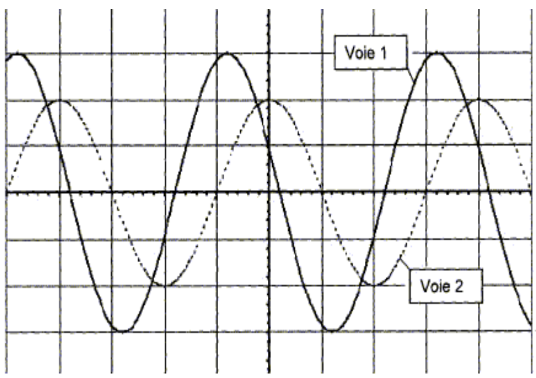
Pour une certaine fréquence de la tension délivrée par le générateur, on obtient l'oscillogramme suivant :

voie 1 : tension u(t) aux bornes du dipôle, courbe en trait plein

voie 2 : tension $u_R(t)$ aux bornes du conducteur ohmique R, courbe en pointillés.

Base de temps : 1,0 ms / div ;

voie 1 : 2 V / div ; voie 2 : 1 V / div.



1. Faire un schéma du circuit étudié et indiquer les branchements de l'oscilloscope pour observer les courbes u(t) et $u_R(t)$.
Ajouter les appareils qui permettraient de mesurer la tension aux bornes de la bobine et l'intensité du courant dans le circuit.

2.a)) Déterminer les valeurs de la période, de la fréquence et de la pulsation du signal délivré par le générateur..

b)) Déterminer les valeurs efficaces U et U_R des tensions visualisées. En déduire la valeur de l'intensité efficace I du courant dans le circuit.

c)) Déterminer le déphasage φde la tension u(t) par rapport à l'intensité i(t). Préciser et justifier son signe.

3. Déduire des résultats précédents :

a)) l'expression de la tension u(t) et de l'intensité i(t) en prenant la tension u(t) comme origine des phases.

b)) le caractère capacitif ou inductif du circuit.

c)) la valeur de l'impédance du dipôle RLC.

d)) La valeur de la capacité du condensateur.

4. On modifie la fréquence de la tension délivrée par le générateur tout en maintenant constante sa valeur efficace.
Pour une fréquence de 86,5 Hz, les deux tensions visualisées sont en phase.

a)) Donner le nom du phénomène observé.

b)) Retrouver la valeur de la capacité C du condensateur.

c)) Indiquer à cette fréquence la valeur de l'impédance du circuit. En déduire la valeur de l'intensité efficace du courant.

EXERCICE 16

1. On considère une bobine de longueur l =75cm, comportant N=1500spires. Cette bobine est considérée comme un solénoïde et parcourue par un courant d'intensité I. Le champ magnétique $\vec{B}$ au centre de la bobine a une intensité B=4.10^{-2} T.
On donne: μ_0=4$\pi$$10^{-7}$USI

a)) Déterminer les caractéristiques du vecteur champ $\vec{B}$ crée au centre du solénoïde par le passage de I.

b)) Calculer l'inductance L de la bobine et le flux propre du champ $\vec{B}$ à travers ce solénoïde. A.N: S=5,4dm^2 .

2. Une bobine d'inductance $L = 0{,}2H$ montée en série avec une résistance R=8Ω. A la date t=0 , on ferme l'interrupteur K.
On donne E=10V.

a)) Etablir l'équation différentielle reliant i à la date t.
Vérifier que $i = \frac{E}{R}(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$ est la solution de cette équation différentielle? Où $\tau = \frac{L}{R}$ la constante de temps du circuit.

b)) Calculer l'énergie magnétique maximale E_{max1} emmagasinée dans la bobine.

3. Soit un condensateur de capacité C chargé sous une tension $U_0 = 10V$, on branche ce condensateur aux bornes d'une d'inductance L=0,2H ; l'intensité maximal du courant dans circuit I_m =36mA.

a)) Etablir l'équation différentielle du circuit à laquelle obéit q(t) et en déduire l'équation horaire de ce mouvement.

b)) Calculer la capacité C et la période propre T_0.

c)) Montrer que l'énergie totale dans circuit est constante et calculer sa valeur notée E_{max2}.

4. On applique une tension $u = 20\sqrt{2}\sin(100t)$ au borne d'un circuit RLC montée en série.

a)) Calculer l'impédance Z du circuit, l'intensité efficace I du courant circulant dans le circuit et son déphasage par rapport à la tension d'alimentation.
On donne : $R = 4\Omega;\ L = 0{,}2H\ ;\ C = 2{,}6\mu F$.

b)) Calculer la puissance moyenne consommée dans le circuit.

c)) Pour quelle valeur de N_O le circuit est à la résonance ?
Déterminer la largeur de la bande passade et le facteur de qualité du circuit. En déduire la puissance moyenne à la résonance.

Radioactivité Et Particules à grande énergie

Radioactivité

I. Équivalence masse –Énergie

1. Relation d'Einstein

En 1905, en élaborant la théorie de la relativité restreinte, Einstein postule que la masse est une des formes que peut prendre l'énergie.

Postulat d'Einstein: Un système de masse m possède lorsqu'il est au repos, une énergie:

$$E = mc^2 \text{ où } \begin{cases} E : \text{énergie du système en joule } (J) \\ m : \text{masse du système en kilogramme } (kg) \\ c : \text{vitesse de la lumière dans le vide} \\ \quad (c = 3{,}0.10^8 m.s^{-1}) \end{cases}$$

Conséquence: Si le système (au repos) échange de l'énergie avec le milieu extérieur, (par rayonnement ou par transfert thermique par exemple), sa variation d'énergie ΔE et sa variation de masse Δm sont liées par la relation : $\Delta E = \Delta mc^2$.

Remarque:

- Si $\Delta m < 0$, alors $\Delta E < 0$: le système fournit de l'énergie au milieu extérieur.
- Si $\Delta m > 0$, alors $\Delta E > 0$: le système reçoit de l'énergie du milieu extérieur.

2. Unités de masse et d'énergie

Le joule est une unité d'énergie inadaptée à l' échelle microscopique. On utilise plutôt à cette échelle l'électron volt (noté eV): $eV = 1{,}60 \times 10^{-19} J$

Remarque : On utilise aussi le MeV :

$$1MeV = 10^6 eV = 1{,}60 \times 10^{-13} J$$

À cette échelle, il est possible d'utiliser comme unité de masse l'unité de masse atomique (notée u). L'unité de masse atomique est définie comme étant égale au douzième de la masse d'un ${}^{12}_{6}C$ atome de carbone.

$$1u = \frac{M({}^{12}_{6}C)}{12N_A} soit \ 1u = 1{,}67 \times 10^{-27} kg$$

II. Stabilité des noyaux atomique

1. Défaut de masse

Expérimentalement, on a constaté que la masse du noyau atomique est inférieure à la somme des masses des nucléons qui le constituent.

Dans le cas d'un noyau ${}^{A}_{Z}X$, en notant m_P la masse du proton et m_n la masse du neutron, on peut écrire:

$$m(noyau) < (Zm_P + Nm_N)$$

On pose: Le défaut de masse est la différence entre la masse des nucléons pris isolement et la masse du noyau.

$$\delta m = (Zm_P + Nm_N) + m(noyau)$$

On remarquera que $\delta m > 0$

Rappel : pour un atome ${}^{A}_{Z}X$ le nombre de neutrons est lié par la relation : $N = A - Z$.

2. Énergie de liaison

On appelle énergie de liaison d'un noyau (notée E_l) l'énergie que doit fournir le milieu extérieur pour séparer ce noyau au repos en ses nucléons libres au repos.

Lorsqu'on brise le noyau, sa masse augmente de δm et son énergie. On en déduit que l'énergie de liaison d'un noyau à pour expression:

$$E_l = \delta mc^2 \text{ où } \begin{cases} E_l : \text{énergie de liaison du noyau } (MeV) \\ \delta m : \text{defaut de masse du noyau (kg)} \\ c : \text{célérité de la lumière dans le vide} \\ \quad (m.s^{-1}) \end{cases}$$

Remarque :

Inversement, lorsque le noyau se forme à partir de ses nucléons libres, le milieu extérieur reçoit l'énergie $E = |\delta m|c^2$ (la masse du système diminue et $\delta m < 0$).

3. Énergie de liaison par nucléon

L'énergie de liaison par nucléon d'un noyau est le quotient de son énergie de liaison par le nombre de ses nucléons. On la note E_A.

$$E_A = \frac{E_l}{A} \quad avec \begin{cases} E_A : \text{énergie de liaison par nucléon en} \\ \quad (MeV/nucléon) \\ E_l : \text{énergie de liaison du noyau en } (MeV) \\ A : \text{nombre de nucléondu noyau} \end{cases}$$

Remarque:

E_A permet de comparer la stabilité des noyaux entre eux.

Les noyaux dont l'énergie de liaison par nucléon est la plus grande sont les plus stables. $E_A < 8{,}8 MeV/nucléon$

Les noyaux instables sont dits radioactifs.

III. Radioactivité

1. Définition

La radioactivité est un phénomène physique de stabilisation de noyaux atomiques instables (dits radionucléides ou radio-isotopes), au cours duquel, à tout instant, une fraction fixe et caractéristique des noyaux présents se transforme spontanément en d'autres atomes (désintégration), en émettant simultanément des particules matérielles (électron, noyau d'hélium, neutron...) et de l'énergie (photons et énergie cinétique).

Un noyau est radioactif s'il émet des particules.

On distingue 4sortes des particules qui peuvent être émises.

Hélium (${}^{4}_{2}He$), particules α ; électron (${}^{0}_{-1}e$), particules β^-; positon (${}^{0}_{+1}e$), particules β^+ ; photon, particules γ.

2. Lois de conservations

Au cours d'une réaction nucléaire il y a conservation :

de charge (Z), de masse (A), de l'énergie et de quantité de mouvement.

3. Désintégrations radioactives

Le retour à la stabilité s'effectue par des désintégrations alpha, bêta, capture électronique, ou encore par émission gamma.

a)) Désintégration alpha (α)

Le noyau expulse une particule α (α est un noyau d'hélium).

La transformation s'écrit : ${}_{Z}^{A}X \longrightarrow {}_{2}^{4}He + {}_{Z-2}^{A-4}Y$

X : noyau père et Y : noyau fils.

b)) Désintégration β^+

Nucléides trop riche en protons :

émetteurs β^+ (β^+ est un positon e^+)

$${}_{Z}^{A}X \longrightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + {}_{1}^{0}e + {}_{0}^{0}\nu \quad : \nu \text{ est un neutrino}$$

c)) Désintégration β^-

Nucléides trop riche en neutrons :

émetteurs β^- (β^- est un électron)

$${}_{Z}^{A}X \longrightarrow {}_{Z+1}^{A}Y + {}_{-1}^{0}e + {}_{0}^{0}\overline{\nu} \quad : \overline{\nu} \text{ est un antineutrino}$$

Au cours d'une réaction nucléaire, la masse des réactifs est supérieure à la masse des produits. La perte de masse Δm est égale à la différence entre la masse des réactifs et celle des produits.

$$\Delta m = m(réactifs) - m(produits)$$

4. Étude énergétique

a)) Énergie libérée

D'après le principe d'Albert Einstein , d'équivalence masse –énergie ($E = mc^2$), Δm correspond à l'énergie libérée par la réaction nucléaire : $E_{lib} = \Delta mc^2$

b)) Vitesse des particules émises

L'énergie libérée se transforme en énergie cinétique pour les particules émises :

Soit la réaction : ${}_{Z}^{A}X \longrightarrow {}_{2}^{4}He + {}_{Z-2}^{A-4}Y$

$$E_{lib} = E_C(\alpha) + E_C(Y) = \frac{1}{2}m_\alpha {v_\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_Y {v_Y}^2 \ (1)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$m_\alpha v_\alpha = m_Y v_Y \Rightarrow v_\alpha = \frac{m_Y}{m_\alpha} v_Y$$

Dans (1) :

$$E_{lib} = \frac{1}{2}m_\alpha {v_\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_Y {v_Y}^2 = \frac{1}{2}m_\alpha\left(\frac{m_Y}{m_\alpha}v_Y\right)^2 + \frac{1}{2}m_Y {v_Y}^2$$

$$\Rightarrow E_{lib} = \frac{1}{2}\frac{{m_Y}^2}{m_\alpha}{v_Y}^2 + \frac{1}{2}m_Y {v_Y}^2 \Rightarrow \frac{2E_{lib}}{{v_Y}^2} = \left(\frac{{m_Y}^2}{m_\alpha} + m_Y\right)$$

$$d'où: \quad v_Y = \sqrt{\frac{2E_{lib}}{\left(\frac{{m_Y}^2}{m_\alpha} + m_Y\right)}}$$

$$et \ \ v_\alpha = \frac{m_Y}{m_\alpha}v_Y = \frac{m_Y}{m_\alpha}\sqrt{\frac{2E_{lib}}{\left(\frac{{m_Y}^2}{m_\alpha} + m_Y\right)}} = \sqrt{\frac{{m_Y}^2}{{m_\alpha}^2}\frac{2E_{lib}}{\left(\frac{{m_Y}^2}{m_\alpha} + m_Y\right)}}$$

$$d'où: \quad v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_{lib} \times m_Y}{(m_\alpha m_Y + {m_\alpha}^2)}}$$

5. Loi de décroissance radioactive

La vitesse de disparition des particules radioactives est proportionnelle au nombre de particules radioactives N.

$$v = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

Le nombre moyen N de noyaux radioactifs dans un échantillon à l'instant t est : $N = N_0 e^{-\lambda t}$

- λ **est la constante de désintégration**, caractéristique du nucléide.
- La **période ou demi-vie** est le temps au bout duquel la moitié des noyaux s'est désintégré : $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.
- **L'activité** d'un échantillon est le nombre moyen de désintégrations par seconde : $A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = A_0 e^{-\lambda t}$

et se mesure en **becquerel** (Bq) (ancienne unité : le curie : $1Ci = 3{,}7.10^{10}Bq$: c'est l'activité d' 1 g de radium).

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A} \Rightarrow A = \lambda\frac{m}{M}N_A \quad et \quad A_0 = \lambda N_0$$

La mesure de A(t) , λ ou T d'un échantillon permet de connaître son âge.

6. Radioactivité Artificielle

Réactions nucléaires provoquées :

Ces réactions sont provoquées en bombardant des noyaux avec des projectiles (noyaux d'hélium, neutrons (insensibles à l'interaction électrique)).

Radionucléides artificiels.

Les nucléides obtenus artificiellement sont tous radioactifs .

C'est ainsi qu'on a obtenu les deux nucléides manquant au tableau des éléments : le technétium (Z=43) et le prométhium (Z=61).

a)) Fission : est une réaction nucléaire au bout de laquelle un noyau lourd se transforme en deux noyaux plus légers.

b)) Fusion : C'est l'association des deux noyaux légers pour donner un noyau plus lourds.

Particules de grande énergie

L'essentiel

La relativité restreinte postule l'invariance, lors d'un changement de référentiel galiléen : **de la célérité c de la lumière dans le vide, de la forme des lois physique et de la masse.**

Définitions de mécanique relativiste, avec :

$$\beta = \frac{v}{c} \leq 1 \ \ et \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1$$

- quantité de mouvement relativiste : $P = \gamma m v$
- énergie cinétique relativiste : $E_C = (\gamma - 1)mc^2$
- énergie totale : $E = \gamma mc^2$
- énergie de masse ou énergie au repos : $E_0 = mc^2$

D'où les relations utiles :

$E = E_C + E_0 \ \ et \ \ E^2 = (Pc)^2 + {E_0}^2$

Particule non relativiste : $1 < \gamma < 1{,}1$; relativiste : $1{,}1 < \gamma < 10$; ultrarelativiste : $\gamma > 10$ (alors $v \approx c \ \ et \ \ E = Pc$).

Étude des chocs relativistes

Au cours d'un choc relativiste on a :

- conservation de la charge,
- conservation de la quantité de mouvement,
- conservation de l'énergie totale.

Le choc est élastique si la nature des particules est conservée, alors

$\Delta E = 0 \Longrightarrow \Delta(E_C + E_0) = 0 \Longrightarrow \Delta E_C = 0 (car \ \Delta E_0 = 0)$

Le choc est inélastique sinon, alors :

$$\Delta E = 0 \Longrightarrow \Delta(E_C + E_0) = 0 \Longrightarrow \Delta E_C = -\Delta E_0$$

- une perte de masse correspond à une création d'énergie cinétique,
- une création de masse correspond à une perte d'énergie cinétique

Dans une chambre à bulle, si $v_0 \perp (B = cste)$ la trajectoire d'une particule est un cercle de rayon :

$$R = \frac{P}{|q|B} \ \ \text{(conservé en relativité)}$$

$$or \ \ |q|B = cste \Longrightarrow |q|B = \frac{P}{R} = cste$$

$$\Longrightarrow \frac{P_1}{R_1} = \frac{P_2}{R_2} = \frac{P_3}{R_3} = \cdots = \frac{P_n}{R_n}$$

$$P = |q|BR \Longrightarrow Pc = |q|cBR$$

$Pour \ \ |q| = e \ ; B \ en \ Tesla \ (T) \ ; R \ en \ mètre \ (m) \ et \ P \ en \ MeV$

D'où: $\boldsymbol{Pc = 300BR}$

Énergie Nucléaire et Atomique

Données : 1u = 1,67.10^{-27}kg ; 1Mev =1,6.10^{-13}J; c = 3.10^{8}m.s^{-1} ; N_A = 6,02.$10^{23}$$mol^{-1}$; e = 1,6.10^{-19}C ; 1u = 931,5MeV.c^{-2} ; m(neutron) = 1,00867u ; m(proton) = 1,00728u ; m(électron) = 0,00055u..

EXERCICE 1

1. Le nucléide cobalt $^{60}_{27}Co$, utilisé en radiothérapie, est radioactif β^-. Sa demi-vie est T=5,3années.
   a)) Écrire l'équation traduisant cette désintégration.
   b)) Calculer, en année^{-1}, la constante radioactive β^- de la réaction nucléaire.
2. Un échantillon contient une masse m_0 =1g de $^{60}_{27}Co$ radioactif à la date t_0 = 0s.
   a)) Calculer le nombre N_0 de noyaux $^{60}_{27}Co$ radioactifs contenus dans l'échantillon à t_0=0.
   b)) Calculer le nombre N_1 de noyaux $^{60}_{27}Co$ radioactifs contenus dans l'échantillont_1 =1année.
3. a)) Définir l'activité radioactive A(t) d'un échantillon à la date t.
   b)) Calculer, en pourcentage, le rapport $\frac{A(t_1)}{A(t_0)}$.

   Extrait du tableau de la classification périodique :
   $_{25}$Mn ; $_{26}$Fe ; $_{27}$Co ; $_{28}$Ni ; $_{29}$Cu.

EXERCICE 2

1. Calculer en MeV/nucléon l'énergie de liaison par nucléon de la particule α.
2. Donner la composition du noyau de $^{227}_{90}Th$ du Thorium.
3. Le Thorium $^{227}_{90}Th$ est radioactif α.
   Ecrire l'équation traduisant cette réaction de désintégration. On précisera le symbole du noyau fils.
   On donne : : $_{85}$At ; $_{86}$Rn ; $_{87}$Fr ; $_{88}$Ra ; $_{89}$Ac
4. A une date prise comme origine t = 0, on dispose d'un échantillon contenant N_0 noyaux de Thorium radioactif.
   Soit N le nombre de noyaux non désintégrés à une date t, on obtient le tableau suivant :

t (en jours j)	0	4	6	10	15	20
N/N_0	1	0,86	0,79	0,68	0,56	0,46

   a)) Définir la période radioactive T d'un radioélément.
   b)) A partir du tableau ci-dessus, donner entre quelles dates se trouve la période du Thorium.
5. a)) Établir la relation $N = N_0 e^{-\lambda t}$, λ étant la constante radioactive du radioélément.
   b)) Sachant qu'à la date t = 4 j, N = 0,86 N0 ; calculer la constante radioactive λ du Th en j^{-1}.

En déduire la valeur de la période T du thorium en j (jour).

Donnée : m(α)=4,0015u

EXERCICE 3

On étudie la désintégration radioactive du nucléide $^{238}_{92}U$.

1. L'uranium 238 subit plusieurs désintégrations successives :
   x désintégrations de types α et y désintégrations de type β^- et se transforme en $^{226}_{88}Ra$. Le radon 226, lui-même radioactif conduit par plusieurs désintégration successives à un isotopes stables $^{206}_{82}Pb$, après avoir subi x' désintégrations de type α et y' désintégrations de type β^-.
   Déterminer les valeurs de x, y ,x' et y'.
2. La première désintégration de l'uranium est de type α et conduit au noyau de thorium Th.

a)) Écrire l'équation de désintégration en précisant les lois utiliser.

b)) Calculer l'énergie libérée lors de cette réaction en joule puis en MeV. Conclure.

c)) En admettant que toute l'énergie libérée au cours de la réaction nucléaire est transformée à la particule α sous forme cinétique, calculer la vitesse d'émission v de la particule α.

On donne : m(238U) = 238,086u ; m(Th) = 234,0781u ; m(α) = 4,0026u.

EXERCICE 4

Dans la famille radioactive de l'uranium, on rencontre l'élément $^{214}_{84}Po$ (isotope de polonium) qui, par deux désintégrations successives, la première est de type α, la seconde est de type β^- , devient un isotope de bismuth (Bi).

L'élément intermédiaire est un isotope de plomb (Pb).

1. Écrire les équations traduisant ces deux désintégrations et en déduire Bi et Pb.
2. On observe que la deuxième désintégration s'accompagne d'une autre émission dangereuse pour l'organisme. Préciser de quelle émission il s'agit et indiquer brièvement sa cause.
3. La famille de l'uranium débute de l'élément radioactive$^{238}_{92}U$ et se termine à l'élément $^{206}_{82}Pb$. Quels sont les nombres des désintégrations α et β^- au cours de cette filiation ?
4. Certains isotopes de l'iode sont utilisés en médecine 131_I de période $T_1 = 8{,}12 jours$ et 132_I de période $T_2 = 13j$.
   On considère pour chaque isotope le même nombre de noyau.
   Comparer leurs activités à t = 0.

EXERCICE 5

La masse de atomique du rubidium est M = 85,47g.mol^{-1} elle tient compte des proportions naturelles des isotopes $^{85}_{37}Rb$ et $^{87}_{37}Ra$ des masses M_1= 84,91g.mol^{-1} et M_2 = 86,91g.mol^{-1}.

1. Calculer la proportion massique de chaque isotope dans le rubidium naturel.
2. Le rubidium 87 est radioactif et se transforme en strontium $^{87}_{38}Sr$ de période T = 47milliards d'années.
   a)) Écrire l'équation de désintégration.

b)) Calculer l'activité initiale de l'échantillon ${}^{87}_{37}Ra$.

EXERCICE 6

Le noyau d'uranium ${}^{238}_{92}U$ est radioactif de période $T = 4{,}5 \times 10^9 années$. L'ensemble de ses désintégrations successives de types α et β^- conduit au plomb ${}^{206}_{82}Pb$:

1. Déterminer le nombre des désintégrations α et β^- conduisant au plomb 206.
2. Un minerai ne contient que N_0 noyaux d'uranium 238 à t=0.

a)) Exprimer le rapport k, à la date t quelconque, du nombre de noyaux de plomb formés sur le nombre de noyaux d'uranium présents, en fonction de λ et t.

b)) Actuellement, ce minerai contient 1g d'uranium et 10mg de plomb. Calculer l'âge t_1 du minerai en années.

EXERCICE 7

1. Dans la haute atmosphère, sous l'effet du bombardement neutronique des noyaux d'azote ${}^{14}_{7}N$, on obtient des noyaux de carbone ${}^{12}_{6}C$ et une autre particule X.
   Ecrire l'équation de la réaction nucléaire et identifier la particule X.
2. Le carbone ${}^{14}_{6}C$ est radioactif de période T = 5600 ans.

a)) On considère un échantillon contenant initialement une masse $m_0 = 7g$ de carbone ${}^{14}_{6}C$. Montrer qu'au bout d'un temps $t = kT$, l'activité restant des noyaux radioactifs est égale à $\frac{A_0}{2^k}$ où A_0 est l'activité initiale de ce noyau. En déduire l'activité de l'échantillon à la date t = 11200 ans.

b)) Les plantes assimilent le dioxyde de carbone provenant de ${}^{14}_{6}C$ ou ${}^{12}_{6}C$. Quand une plante meurt, le processus d'assimilation s'arrête et la teneur en ${}^{14}_{6}C$ diminue.

On mesure l'activité d'un échantillon de bois trouvé dans une grotte préhistorique et d'un échantillon de bois fraichement coupé de même nature et de même masse. On constate que l'activité de l'échantillon de bois préhistorique est 7 fois plus faible que celle de l'échantillon de bois fraichement coupé.

Quel est l'âge approximatif du bois préhistorique ?

EXERCICE 8

1. Le carbone ${}^{14}_{6}C$ émetteur β^- de période (ou demi-vie) T = 5570 ans, apparait dans la haute atmosphère à la suite du choc de neutrons sur les atomes d'azote. Écrire le bilan de la réaction de formation de ${}^{14}C$ en précisant la particule émise.
2. Établir la relation qui donne la loi de décroissance radioactive d'une source radioactive et utiliser ce résultat pour démontrer la loi en activité $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$, à partir de la définition de l'activité $A(t) = -\frac{dN}{dt}$, A_0 l'activité à l'instant initial t = 0s.
3. Les plantes assimilent le dioxyde de carbone provenant de ${}^{14}_{6}C$ ou de ${}^{12}_{6}C$. La proportion de deux isotopes est la même dans l'atmosphère et dans les végétaux.
   Quand une plante meurt, le processus d'assimilation s'arrête et la teneur en ${}^{14}_{6}C$ diminue.

Pour connaitre l'époque à laquelle vécurent les hommes préhistoriques dans une caverne, on mesure l'activité d'un échantillon de charbon de bois enfoui dans le sol de la grotte.

Le nombre de désintégration n'est plus que de 1,60 par minute, alors qu'il serait de 11,6 par minute pour un échantillon de charbon de bois « actuel » de même masse. Combien de temps s'est-il écoulé, depuis le dernier feu, dans la grotte.

EXERCICE 9

Le carbone ${}^{14}_{6}C$ est un radioélément artificiel produit de matière continue dans l'atmosphère par le bombardement des atomes de ${}^{14}_{7}N$ par des neutrons. Le carbone ${}^{14}_{6}C$ est radioactif β^-, avec une période de 5730ans. Il s'échange avec le carbone 12 dans les molécules dioxyde de carbone atmosphérique, selon une portion constante de 10^{-6}. Dans l'organisme vivant, on retrouve les deux isotopes dans la même proportion (1 ${}^{14}_{6}C$ pour 10^6 ${}^{12}_{6}C$). Après la mort, le carbone 12 ne peut se renouveler dans le corps, et comme il est radioactif sa teneur diminue au fil du temps, ce qui permet de dater l'instant de la mort.

On donne : M (${}^{14}_{6}C$) = 14,003241u ; M (${}^{14}_{7}N$) = 14,003074u.

1. Écrire l'équation bilan de la réaction de formation du carbone 14 à partir de ${}^{14}_{7}N$.
2. Ecrire l'équation bilan de la désintégration du carbone 14.
   Calculer en MeV, l'énergie libérée lors de cette réaction.
3. Établir la loi de décroissance radioactive et donner la relation entre la constante radioactive λ et la période T d'un nucléide.
   En déduire la valeur numérique de λ pour le carbone 14.
4. Les mesures effectuées sur une momie montre que sa teneur en carbone 14 correspond à 78% de celle d'un être vivant actuel.
   Déterminer la date de décès de l'individu.

EXERCICE 10

Il existe plusieurs méthodes de datation d'objets adaptées à l'âge que l'on souhaite déterminer. On peut en citer entre autres : la méthode potassium- argon et la datation par le carbone 14.

Cependant cette dernière n'est pas utilisable si la teneur résiduelle de carbone 14 est trop faible, c'est-à-dire inférieur à 1%.

La demi-vie du ${}^{14}_{6}C$ est de 5600ans et celle du potassium ${}^{40}_{19}K$ de période $1{,}5.10^9$ans.

Les roches volcaniques contiennent du potassium K dont l'isotope ${}^{40}_{19}K$ est radioactif et se décompose pour donner ${}^{40}_{18}Ar$ constituant essentiel d'un gaz monoatomique.

Lors d'une éruption volcanique, la lave, au contact de l'air perd l'argon ${}^{40}_{18}Ar$, c'est le dégazage de la roche.

A la date de la fin de l'éruption, la lave ne contient plus d'argon.

Mais celui-ci réapparait dans le temps (presque aussitôt après) selon la radioactivité précédente.

1. Écrire l'équation de la désintégration nucléaire du potassium $^{40}_{19}K$ en argon $^{40}_{18}Ar$, en précisant les lois de conservation utilisées. Nommer la particule émise en même temps que le noyau fils.
2. L'analyse d'un échantillon d'une roche basaltique, a donné $1{,}66 \times 10^{-6}g$ de ^{40}K et $82 \times 10^{-4}cm^3$ d'argon ($^{40}_{18}Ar$) dans les conditions normales de température et de pression.
 On désigne par N₀ (^{40}K) le nombre de noyaux de potassium 40 à la date t=0 (fin de l'éruption), par N (^{40}K) et N (^{40}Ar) le nombres de noyaux présents dans l'échantillon à un instant t.
 a)) Calculer la constante radioactive du potassium 40 en U.S.I.
 b)) Établir la loi de décroissance radioactive.
 En déduire la relation entre $\frac{N(Ar)}{N(K)}$.
 c)) Calculer l'âge approximatif de la roche compté à partir de la fin de l'éruption volcanique.
3. Sur un autre site archéologique des ossements ont été trouvés. Pour dater ces derniers, on a procédé par dosage isotopique de l'argon 40 et du potassium 40 contenu dans un échantillon de ces ossements. On constate alors qu'il contenait quatre fois plus d'atome de potassium 40 que d'atomes d'argon 40.
 a)) Déterminer l'âge de ces ossements.
 b)) Pourrait-on alors utiliser la méthode de la datation par le carbone 14 pour déterminer l'âge de ces ossements ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 11

1. L'une des réactions de fusion d'hydrogène est représentée par l'équation suivante : $^{1}_{1}H + ^{7}_{3}Li \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{A}_{Z}X$
 a)) Calculer A et Z, en déduire le noyau X.
 b)) Cette réaction dégage une énergie égale à 3,7MeV.
 Calculer en u, la variation de la variation de masse correspondante.
2. L'isotope du Césium $^{137}_{55}Cs$ est radioactif β^- de période T = 30ans.
 a)) Ecrire l'équation traduisant la désintégration du césium.
 b)) Calculer l'énergie libérée en MeV au cours de cette désintégration.
3. On dispose à l'instant t = 0, un échantillon radioactif contenant 1g de césium-137.
 a)) Calculer l'activité radioactivité initiale A_0 de cet échantillon.
 b)) Au bout de combien de temps la masse de césium dans l'échantillon dévient égale aux $3/4$ de la masse initiale ?

Données : m(137Cs)=126,8773u ;
m(Barym-137) = 136,8750u et $_{55}$Cs ; $_{56}$Ba ; $_{57}$La ; $_{58}$Ce.

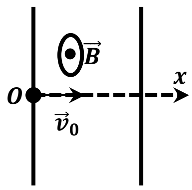
EXERCICE 12

On considère la famille radioactive dont le nucléaire père est l'uranium $^{238}_{92}U$ et le nucléaire final stable, le plomb $^{206}_{82}Pb$.
Le radium $^{226}_{88}Ra$ est un nucléide de cette famille qui , à la suite de désintégration de type α et de type β^-, conduit au plomb $^{206}_{82}Pb$.

1. Quels sont les nombres de désintégrations de type α et β^- permettant de passer du noyau $^{226}_{88}Ra$ au noyau $^{206}_{82}Pb$?
2. On considère un échantillon contenant une masse m_0 de radon, à une date choisie comme origine des temps.
 La période du radon est T= 3,825j.
 a)) Déterminer la masse de radon restant au bout de n périodes.
 En déduire la masse de radon désintégrée au bout de n périodes.
 b)) Calculer la durée nécessaire pour la désintégration des 4/9 de la masse m_0 de radon.
3. Dans la première désintégration, le radium 226 se transforme en radon $^{222}_{86}Rn$.
 a)) Ecrire l'équation de la réaction nucléaire.
 De quelle particule radioactive s'agit-il ?
 b)) Calculer, en J, l'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau de radium 226.
 c)) En admettant que cette énergie est entièrement acquise par la particule α sous forme d'énergie cinétique, calculer, en appliquant les lois de la mécanique classique, la vitesse d'émission de cette particule. La valeur trouvée justifie-t-elle l'application de la mécanique classique ?
 d)) En réalité, l'énergie libérée par cette désintégration est répartie entièrement entre la particule α et un photon γ de longueur d'onde $\lambda = 10^{-12}$m. Calculer la valeur réelle v_0 de la vitesse d'émission de la particule α.

On donne : m ($^{226}_{88}Ra$)=226,0960u ; m ($^{222}_{86}Rn$) = 222,0869u ;
m (α)=4,0026u ; h=6,6.$10^{-34}J.s$.

4. La particule α pénètre en O, dans un espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, avec la même vitesse $\vec{v_0}$ perpendiculaire à $\vec{B}$. On néglige le poids de la particule devant les autres forces.



 a)) Démontrer la particule α prend, dans le champ magnétique un mouvement circulaire uniforme (de rayon R à préciser) dans un plan que l'on précisera.
 b)) On superpose au champ magnétique uniforme $\vec{B}$, un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ perpendiculaire à la fois à $\vec{v_0}$ et à $\vec{B}$ de telle sorte que le mouvement des électrons soit rectiligne uniforme. Préciser le sens du champ électrostatique $\vec{E}$ et calculer sa norme.

Données : $B = 10^{-3}T,\ on\ mesure\ R = 15cm$.

EXERCICE 13

1. Dans une pile atomique, les noyaux d'uranium ${}^{235}_{92}U$, frappés, par des neutrons, subissent la réaction de fission.
Cette réaction se fait avec perte de masse et s'accompagne de l'éjection de plusieurs neutrons qui vont, à leurs tour, entrainer de nouvelles fissions.
a)) Sachant qu'une masse d'uranium 235 égale à 0,4kg est consommée en un jour et que la perte de masse es égale à 0,1% de la masse d'uranium consommée, calculer la puissance de la pile.
b)) Chaque neutron émis lors de la fission a une énergie de 1MeV. En admettant que la mécanique classique est utilisable, calculer la vitesse v_0 de ces neutrons.
2. Les neutrons émis sont trop rapides pour produire une nouvelle fission. Il faut donc les ralentir en les envoyant sur des noyaux de carbones. (On place dans la pile des blocs de graphite).
On suppose que les chocs sont parfaitement élastiques et que toutes les vitesses des particules participant aux chocs sont parallèle à une droite.
a)) Calculer la vitesse d'un neutron après le premier choc en admettant que les atomique de carbone sont initialement immobiles.
b)) Déterminer la vitesse d'un neutron après le deuxième choc et le troisième choc. En déduire qu'au $n^{ième}$ choc la vitesse d'un neutron est $V_n = k^n v_0$, où k est une constante à déterminer.
c)) Calculer le nombre des chocs nécessaires pour que l'énergie du neutron soit réduite à 0,1Mev.

Données : m(neutron)=1u ; m (carbone 12)=12

EXERCICE 14

Sous l'action d'un neutron lent, un atome d'uranium ${}^{235}_{92}$U subit la réaction de fission nucléaire suivante :

$${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{91}_{b}Zr + {}^{a}_{58}Ce + 3\,{}^{1}_{0}n + 6\,{}^{0}_{-1}e.$$

1. a)) Qu'appelle-t-on réaction de fission nucléaire.
Déterminer a et b. Préciser les lois de conservations utilisées.
b)) Définir l'unité de masse atomique.
c)) Calculer l'énergie de liaison par nucléon de l'uranium 235.
d)) Calculer en MeV puis en joule, l'énergie libérée au cours de cette réaction de fusion.

On donne les énergies de liaison par nucléon des noyaux en MeV/nucléon : ${}^{235}U$: 7,59 ; ${}^{91}Zr$: 8,81 ; ${}^{b}Ce$: 8,37

c)) 90,5% de cette énergie libérée se trouve sous forme d'énergie cinétique des noyaux lourds et des électrons.
Quelle serait la vitesse des neutrons si tout le reste de l'énergie lui était communiqué ?
En déduire la vitesse moyenne v_1 d'un neutron.
2. Il existe un autre isotope de l'uranium 235 qui est radioactif β^-. Par deux désintégrations spontanées successives, il donne ${}^{A_1}_{Z_1}$Pu.
a)) Déterminer A_1 et Z_1, et établir la loi de désintégration radioactive.
b)) Le Thorium 232(période radioactive : T= 14milliards d'année) est l'élément père de d'une famille radioactive dont le dernier élément est plombe 208.
Les éléments intermédiaires sont des périodes négligeables.
Dans un roche les plus ancienne de la terre où le thorium et le plomb sont associés on trouve un rapport moyen de 7g de de thorium par 1g de plomb. Calculer l'âge de ces roches.

EXERCICE 15

Dans un réacteur nucléaire, l'une des réactions possible est :

$${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{139}_{a}I + {}^{b}_{39}Y + 3\,{}^{1}_{0}n$$

1. Quelle est la nature de cette réaction ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer les valeurs de a et b en précisant les lois utilisées.
3. Calculer l'énergie libérée E_1 par la réaction en J et en MeV.
4. Dans un réacteur nucléaire, $n = 2.10^3 mol$ d'uranium 235 sont consommés en un an de fonctionnement. Calculer l'énergie produite en joule E_{Totale} en supposant que toutes réactions produisant la même énergie (E_1) calculé en 3.
5. Calculer la puissance électrique moyenne fournie par un tel réacteur si le rendement est 40%
6. Il existe un autre nucléide de l'uranium 235 qui est radioactif β^-.
a)) Par deux désintégrations spontanées successives, il donne ${}^{Z}_{A}$Pu. Déterminer A et Z.
b)) Etablir la loi de décroissance radioactive.
c)) La première désintégration a pour période T = 5mn. Soit N_0 le nombre initial de noyaux radioactifs, calculer le nombre de noyaux restant au bout de 25mn en fonction de N_0.
d)) Un échantillon de cette première désintégration est contient une masse m_0 (mg) de ${}^{235}_{92}U$ contenant 2.10^3 particules par seconde. Calculer la masse m_0.

Données : m(235_U)=234,99332u ; m(139_I)=138,897u ; m(Y)= 93,890u ; 1an=3,2.10^7s.

EXERCICE 16

Une source radioactivité émet $4{,}5 \times 10^{25}$ particules pendant un jour.

1. Calculer l'activité A_0 de la substance en becquerel et en curie sachant que $1Ci = 3{,}7 \times 10^{10} Bq$.
2. Calculer le nombre de particules radioactives initiales sachant que la période radioactivité est T=500jours.
3. Calculer la mase initiale sachant que la masse molaire de ce composé est $M = 235 g.mol^{-1}$.
4. En utilisant la loi de décroissance radioactive, déterminer la mase restant au bout de 1500jours.

5. Déterminer l'activité de la substance après 2500jours .
6. Déterminer le temps au bout duquel l'activité restant n'est que de 30% de sa valeur initiale.
7. Déterminer le temps au bout duquel la masse disparue est égale à 70% de la masse initiale.

LES PARTICULES A GRANDE ENERGIE

EXERCICE 17

Un synchrotron fournit des protons d'énergie cinétique

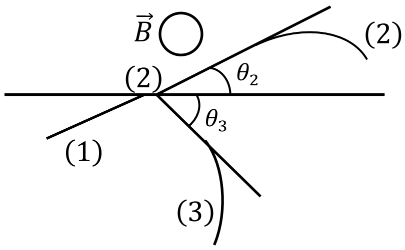
$$E_C = 1285\ MeV$$

1. Calculer le rapport $\alpha = \frac{E_C}{E_0}$. La particule est-elle relativiste ? Justifier votre réponse.
2. Exprimer en fonction de E_c, α et c puis en fonction de m, E_c, α et c, la quantité de mouvement P du proton.. Calculer numériquement P et en déduire la vitesse v de ces protons.
3. Les protons pénètrent dans un chambre à bulles où règne un champ magnétique uniforme $B = 0{,}75T$ et dont la direction est perpendiculaire au vecteur vitesse.
   a)) Démontrer que le mouvement de ces particules est circulaire uniforme.
   b)) Démontrer que le rayon de courbe trajectoire est $R = \frac{Pc}{300B}$. Calculer numériquement R.

EXERCICE 18

La figure ci-après représente la partie intéressante d'un cliché de chambre à bulles. On y observe le choc d'un proton incident P_1 sur un proton cible. Les valeurs mesurés sont :

P_1=2017MeV/c ,R_1=384cm , R_2=180cm , R_3 =90cm, $\theta_2 = 38°$;θ_3 =70° .



1. a)) Montre que la particule incident est relativiste.
   b)) Calculer les quantités de mouvements P_2 et P_3.
   c)) Donner les caractéristiques du vecteur champ $\vec{B}$.
2. Représenter les vecteurs $\vec{P_1}$,$\vec{P_2}$ et $\vec{P_3}$ sur la figure si la réaction est du type :1+ a →2+ 3+ 4
3. Écrire l'équation vectorielle de la conservation de la quantité de mouvement et en déduire P_4 .
4. Écrire la relation de la conservation de l'énergie totale et faire les applications numériques pour les trois hypothèses suivantes :
   (1) $p + p \rightarrow p + \pi^+ + n$; (2) $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$;
   (3) $p + p \rightarrow \pi^+ + p + n$
   Conclure.

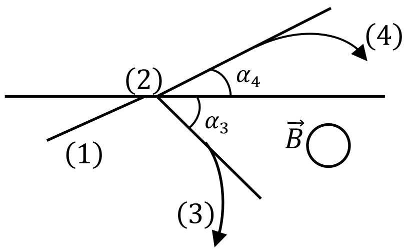
Données : $m(p) = 938MeV.c^{-2}$; $m(n) = 939MeV.c^{-2}$
$m(\pi^0) = 135MeV.c^{-2}$; $m(\pi^+) = 139MeV.c^{-2}$

EXERCICE 19

Grâce à l'enregistrement obtenu dans une chambre à bulles où règne un champ magnétique uniforme B , on étudie le choc inélastique d'un proton (1) sur un proton immobile (2).

La figure (non à l'échelle) représente la trajectoire de la particule incidente et des particules chargées résultant du choc (3) et (4), ainsi que leurs tangentes au point d'impact. Les valeurs des rayons de courbure et des angles entre les tangentes sont respectivement :

$R_1 = 430\ cm$; $P_1 = 2033\ MeV.c^{-1}$; $\alpha_1 = 0$ (*référence*);
$R_3 = 113\ cm$; $\alpha_3 = 55°$; $R_4 = 185\ cm$; $\alpha_4 = 27°$.



1. a)) $\vec{B}$ étant orthogonal au plan de figure, indiquer son sens sur le schéma.
   b)) Déterminer le signe des charges des particules enregistrées après le choc.
   c)) Calculer les quantités de mouvement P_3 *et* P_4 des particules (3) et (4) dans l'hypothèse où $|q_1| = |q_2| = |q_3| = |q_4|$.
   d)) Une particule (5) est apparue lors du choc. Calculer sa quantité de mouvement P_5 (résolution graphique avec, pour échelle, 1cm pour 200 Mev/c).
2. Considérer les différentes hypothèses possibles sur la nature des particules émises après le choc :

- 1ère hypothèse : $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$;
- seconde : $p + p \rightarrow \pi^+ + p + n$;
- troisième : $p + p \rightarrow p + \pi^+ + n$.

Pour chaque hypothèse, calculer : $\Delta E = E_3 + E_4 + E_5 - (E_1 + E_2)$.
En déduire l'hypothèse la plus probable.

Données : $m(p) = 938MeV.c^{-2}$; $m(n) = 939MeV.c^{-2}$
$m(\pi^0) = 135MeV.c^{-2}$; $m(\pi^+) = 139MeV.c^{-2}$

CORRECTION DES EXERCICES

Solutions sur le mouvement d'un point matériel

Solution 1

1. Nature du mouvement :

Comme a = constante, alors le mouvement est R.U.V

2. Expressions des vecteurs, accélération, vitesse et position

$\vec{a} = a_x\vec{\imath} = \ddot{x}\,\vec{\imath}\ ,\vec{v} = v_x\vec{\imath} = \dot{x}\,\vec{\imath}\ et\ \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$

3. Equations horaires du mouvement

- Equation de l'abscisse x(t)

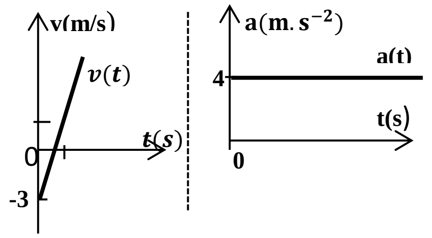
$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0\ , or\ à\ t = 0, v_0 = 3m/s\quad et$

$x_0 = 1m \implies x(t) = 2t^2 - 3t + 1$

- Equation de la vitesse v(t) :

$v(t) = at + v_0 \implies v(t) = 4t - 3$

- Représentation de v(t) et a(t)



4. Date de passage par l'origine

A l'origine $x(t) = 2t^2 - 3t + 1 = 0,$

d'où : $t_1 = 0{,}5s\ et\ \ t_2 = 1s$

A $t_1 = 0{,}5s,\ \ v = 4\times 0{,}5 - 3 = -1m.s^{-1}\ \ et$

$t_2 = 1s, v = 4\times 1 - 3 = 1m.s^{-1}$

Entre ces deux dates la valeur de la vitesse change de signe ce qui signifie que le vecteur vitesse change de sens.

A $t = 0{,}5s$ le mouvement est uniformément retardé ($av < 0$) et

à $= 1s$, il est uniformément accéléré ($v > 0, a > 0$).

5. Le mobile change de sens puisque le vecteur vitesse change de sens entre les deux dates t=0,5 et t=1s.

Cela se produit lorsque la vitesse s'annule (arrêt du véhicule) soit $v(t) = 4t - 3 = 0 \implies t_3 = 0{,}75s$

La position :

$OM = x(t_3) = 2\times 0{,}75^2 - 3\times 0{,}75 + 1 = -0{,}125m$

Solution 2

1. Equation de la trajectoire

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \\ z = -4t^2 + 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{3} \\ z = -4\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{5x}{3} \end{cases}$$

D'où : $z = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{5}{3}x$

(c'est un parabole de concavité tourné vers le bas)

2. Vecteur position, vitesse et accélération

- Vecteur position $\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + z\vec{k} = (3t)\vec{\imath} + (-4t^2 + 5t)\vec{k}$,

à $t = 1{,}5s$: $\overrightarrow{OM} = (3\times 1{,}5)\vec{\imath} + (-4\times 1{,}5^2 + 5\times 1{,}5)\vec{k}$

$Soit\ \ \overrightarrow{OM} = 4{,}5\vec{\imath} - 1{,}5\vec{k}$

$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{4{,}5^2 + 1{,}5^2} = 4{,}74m$

- Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 3\vec{\imath} + (-8t + 5)\vec{k}$$

à $t = 1{,}5s : \vec{v} = 3\vec{\imath} - 7\vec{k} \Rightarrow \|\vec{v}\| = 7{,}61m.s^{-1}$

- Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -8\vec{k} \Rightarrow \|\vec{a}\| = 8m.s^{-2} = constante$$

Donc à $t = 1{,}5s$: on a : $a = 8m.s^{-2}$, car le mouvement est uniformément varié suivant Oz et uniforme suivant Ox.

3. a)) Vecteur vitesse au sommet de la trajectoire

Au sommet de la trajectoire : $v_z = 0 \Rightarrow \vec{v} = 3\vec{\imath}\ et\ \vec{a} = -8\vec{k}$

b)) Vecteur vitesse à son passage au plan z = 0 :

$z = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{5}{3}x = 0 \Rightarrow x = 0\ ou\ x = 3{,}75m$

- Au point d'abscisse x=0 :

$x = 3t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \vec{v} = 5\vec{k}\ \ et\ \vec{a} = -8\vec{k}$

- Au point d'abscisse x = 3,75m :

$x = 3t = 3{,}75 \Rightarrow t = 1{,}25s \Rightarrow \vec{v} = 3\vec{\imath} - 5\vec{k}\ \ et\ \ \vec{a} = -8\vec{k}$

4. a)) Comme le vecteur accélération est constante suivant z, alors aux points O et A on a : $a = 8m.s^{-2} = cste.$

b)) Composante a_t

$a_t = \frac{dv}{dt}\ , or\ v = \sqrt{9 + (-8t + 5)^2} = (64t^2 - 80t + 34)^{1/2}$

$$\Rightarrow\ a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{64t - 40}{\sqrt{64t^2 - 80t + 34}}$$

Composante a_n

On a : $a^2 = {a_t}^2 + {a_n}^2 \Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - {a_t}^2}$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{64 - \frac{(64t - 40)^2}{64t^2 - 80t + 34}} = \sqrt{\frac{576}{64t^2 - 80t + 34}}$$

c)) Rayon de la courbure

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{64t^2 - 80t + 34}{\sqrt{\frac{576}{64t^2 - 80t + 34}}}$$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{(64t^2 - 80t + 34)^3}{576}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{(64t^2 - 80t + 34)^3}{576}}$$

Au point O, t = 0, alors : R = $\left(\frac{(34)^3}{576}\right)^{\frac{1}{2}}$ = 8,26m

$A\ la\ date\ t = 1{,}5s$

$$R = \left(\frac{(64\times 1{,}5^2 - 80\times 1{,}5 + 34)^3}{576}\right)^{\frac{1}{2}} \implies R = 18{,}40m$$

Solution 3

1. Expression de la trajectoire

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 2t \end{cases}$$, en remplaçant t dans x, on a:

$$x = \frac{y^2}{4} - 1 \Rightarrow y = 2\sqrt{x+1}$$

- Expression de la vitesse :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 2t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 2 \end{cases} \Rightarrow v(t) = \sqrt{4(t^2+1)} = 2\sqrt{(t^2+1)}$$

2. a)) Expression de l'accélération

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2m.s^{-2}$$

b)) Nature du mouvement

$a =$ cste et $a \times v > 0$,

alors le mouvement est uniformément accéléré.

3. a)) Accélération tangentielle a_t $\quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)}}$

b)) Accélération normale a_n :

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} \Rightarrow a_n = \frac{2}{\sqrt{(t^2+1)}}$$

c)) Rayon de la courbure : $a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = 2(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$

A.N : pour t = 3s : $\rho = 2(3^2+1)^{\frac{3}{2}} = 63{,}24m$

Solution 4

1. Equation de la trajectoire

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \sqrt{4(1-t^2)} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

La trajectoire est un cercle de O(0;0) de rayon R = 2m.

2. Vecteur vitesse et son module

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -2t(1-t^2)^{-1/2} \end{cases}$$

$$v = \sqrt{4 + \frac{4t^2}{1-t^2}} \Rightarrow v = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} = 2(1-t^2)^{-1/2}$$

3. a)) Accélération tangentielle et accélération normal

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2t(1-t^2)^{-3/2} \quad et\ a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2}{1-t^2}$$

b)) Composante cartésienne

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -2(1-t^2)^{-1/2} - 2t \times \frac{-1}{2} \times (-2t)(1-t^2)^{-3/2} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -2(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

c)) Déduisons que le module de $\vec{a}$ est indépendant du repère d'étude

Dans la base cartésienne : $a^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 = \frac{4}{(1-t^2)^3}$

Dans la base de Freinet :

$$a^2 = a_t{}^2 + a_n{}^2 = 4t^2(1-t^2)^{-3} + \frac{4}{(1-t^2)^2}$$

$$a = \frac{4t^2(1-t^2)^{-1} + 4}{(1-t^2)^2} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{(1-t^2)^3}$$

Dans les deux bases, $a^2 = \frac{4}{(1-t^2)^3} \Rightarrow a = 2(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}$

d'où : le module de $\vec{a}$ est indépendant du repère étudié.

Solution 5

1. Equation de la trajectoire et nature

$$\begin{cases} x = 2a(1+cos(\omega t)) \\ y = asin(\omega t) \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2a}+1\right)^2 = cos^2(\omega t) \\ \left(\frac{y}{a}\right)^2 = sin^2(\omega t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2a}+1\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x+2a)^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

D'où la trajectoire est un ellipse de centre **Ω** (-2a ; 0)

2. Expression du vecteur $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$

- Vecteur vitesse et sa norme

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = -2a\omega\, sin(\omega t) \\ v_y = \frac{dy}{dt} = a\omega\, cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{a^2\omega^2(4sin^2(\omega t) + cos^2(\omega t))}$$

$$Or\ \ cos^2\omega t + sin^2\omega t = 1 \Rightarrow v = a\omega\sqrt{3sin^2(\omega t)+1}$$

- Vecteur accélération et sa norme

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2a\omega^2 cos(\omega t) \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -a\omega^2 sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a^2\omega^4(4cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t))}$$

$$d'où\!: a = a\omega^2\sqrt{3cos^2(\omega t)+1}$$

3. Accélération tangentielle et normale de l'accélération

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(a\omega\sqrt{3sin^2(\omega t)+1}\right)}{dt} = \frac{3a\omega^2 cos(\omega t)\, sin(\omega t)}{\sqrt{3sin^2(\omega t)+1}}$$

$$a^2 = a_t{}^2 + a_n{}^2 \Rightarrow a^2{}_n = a^2 - a_t{}^2 \Rightarrow$$

$$a^2{}_n = a^2\omega^4(3cos^2(\omega t)+1) - \frac{9a^2\omega^4 cos^2(\omega t) \times sin^2(\omega t)}{3sin^2(\omega t)+1}$$

$$a_n = \frac{3a^2\omega^4\,[cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t)] + a^2\omega^4}{3sin^2(\omega t)+1} = \frac{4a^2\omega^4}{3sin^2(\omega t)+1}$$

$$\Rightarrow a_n = 2a\omega^2\sqrt{\frac{1}{3sin^2(\omega t)+1}} = 2a\omega^2(3sin^2(\omega t)+1)^{-\frac{1}{2}}$$

4. Valeur minimale du rayon R de la courbure

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{a^2\omega^2(3sin^2(\omega t)+1)}{2a\omega^2(3sin^2(\omega t)+1)^{-\frac{1}{2}}}$$

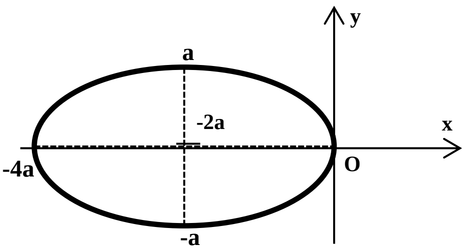
$$R = \frac{a}{2}(3\sin^2(\omega t) + 1)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \cos \omega t = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \omega t = \cos\frac{\pi}{2}\ soit\ \ t = \frac{\pi}{2\omega}$$

$$R_{min} = \frac{a}{2}\left(3sin^2\left(\omega \times \frac{\pi}{2\omega}\right) + 1\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{a}{2}\left(3sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$R_{min} = \frac{a}{2} \times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{a}{2} \times 2^3 = 4a$$

5. <u>Représentation de la trajectoire</u>



- <u>Vitesse du point M aux points particuliers de la trajectoire</u>

Un ellipse admet 4points caractéristiques (les sommets de cette ellipse) $A(0\,;0),\ B(-4a\,;0),\ A'(-2a\,;-a) et\ B'(-2a\,;\ a)$.

$$-\begin{cases} x = 2a(1 + \cos(\omega t)) = 0 \\ y = a\sin(\omega t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega t = \pi \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = -2a\omega \sin(\omega t) = 0 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = a\omega \cos(\omega t) = -a\omega \end{cases} \Rightarrow\ \ \vec{v} = -a\omega \vec{j}$$

$$-\begin{cases} x = 2a(1 + cos(\omega t)) = -4a \\ y = asin(\omega t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega t = 0\ \Rightarrow \vec{v} = a\omega \vec{j}$$

$$-\begin{cases} x = 2a(1 + cos(\omega t)) = -2a \\ y = asin(\omega t) = -a \end{cases} \Rightarrow \omega t = -\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow \vec{v} = 2a\omega \vec{i}$$

$$-\begin{cases} x = 2a(1 + cos(\omega t)) = -2a \\ y = asin(\omega t) = a \end{cases} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}\ \Rightarrow \vec{v} = -2a\omega \vec{i}$$

<u>Conclusion</u> :

Au point A(0 :0), $\vec{v} = -a\omega \vec{j},\ \ v = a\omega,$

Au point B(-4a ;0), $\vec{v} = a\omega \vec{j},\ \ v = a\omega$,

Au point A'(-2a ; - a), $\vec{v} = 2a\omega \vec{i}\ et\ \ v = 2a\omega$, et

Au point B'(-2a ;a), $\vec{v} = -2a\omega \vec{i}\ et\ \ v = 2a\omega.$

<u>Solution 6</u>

1. <u>Equation horaire du deux coureurs</u>

- Pour le coureur : MRU : $x(t) = vt + x_0$,

Or à t=0, $x_0 = -15\ \ \Rightarrow\ x_1(t) = 9{,}9t - 15$

- Pour le coéquipier : MRUV :

$x_2(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$,

$$or\ à\ t_0 = 0, v_0 = 0 \Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{3}{2}t^2 = 1{,}5t^2$$

- <u>Instant du témoin :</u>

Au point du rencontre $x_1 = x_2\ \ \Rightarrow 9{,}9t - 15 = 1{,}5t^2$

$1{,}5t^2 - 9{,}9t + 15 = 0\ \ \Longrightarrow \Delta = 8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2{,}83$

$$\Rightarrow t = \frac{9{,}9 \pm 2{,}83}{3} \Longrightarrow\ t_1 = 2{,}35s\ \ et\ \ t_2 = 4{,}24s$$

2. <u>Les abscisses du point du rencontre</u>

$A\ t_1 = 2{,}35s,\ \ x_1 = 1{,}5 \times 2{,}35^2 = 8{,}28m\ \ et$ à

$t_2 = 4{,}24s\ ,\ x_1 = 1{,}5 \times 4{,}24^2 = 26{,}96m$

- <u>Distances parcourus par les deux coureurs</u>

Pour le 1er coureur, comme il est à 15m de l'origine, alors

$A\ t_1 = 2{,}35s, x_1 = 8{,}28m\ \Rightarrow\ d_1 = 15 + 8{,}28 = 23{,}28m$

$A\ t_2 = 4{,}24s, x_2 = 26{,}96m, d_2 = 15 + 26{,}96 = 41{,}96m$

Pour le coéquipier : les distances parcourues sont confondues aux abscisses du rencontre : $x_1\ et\ x_2$.

3. <u>Instant où la vitesse du coéquipier est</u> $v = 9{,}9 \mathrm{m.s^{-1}}$

MRUV : $v = at = 3t = 9{,}9 \Rightarrow t = 3{,}3s$

- Distance parcourue à cet instant :

$d = 1{,}5t^2 = 1{,}5 \times 3{,}3^2 = 16{,}335m$

<u>Solution 7</u>

1. <u>Les lois horaires x_1(t) et x_2(t) de l'automobile et du camion</u>

<u>Pour l'automobile</u> : Il y a deux phases

- Pour $t \in [0\,;7s]$, le MRUV

$x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0\ , or\ à\ \ t_0 = 0, v_0 = 0\ et\ x_0 = 0.$

$\Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{2{,}5}{2}t^2 = 1{,}25t^2$ et $v_1 = at = 2{,}5t$,

à $= 7s$, $x_1 = 1{,}25 \times 7^2 = 61{,}25m$ et

$v = 2{,}5 \times 7 = 17{,}5m.s^{-1}$

- Pour $t > 7s$, le mouvement est uniforme de vitesse

$v = 17{,}5m.s^{-1}$ et d'équation horaire :

$$x'_1(t) = v(t - t_0) + x_0$$

A t = 7s, $x_0 = 61{,}25m\ \Rightarrow$

$$x'_1(t) = 17{,}5(t - 7) +\ 61{,}25 = 17{,}5t - 61$$

Pour le camion : MRU de vitesse $v = 12{,}5m.s^{-1}$

$x_2(t) = vt + x_0 = 12{,}5t - 20$

2. <u>Les durées des dépassements</u> θ_1 et θ_2.

- Pour $t \in [0\,;7s],\ \ x_1 = x_2 \Rightarrow\ 1{,}25t^2 = 12{,}5t - 20$

$1{,}25t^2 - 12{,}5t + 20 = 0,\ \ \Delta = 56{,}25\ \Rightarrow\ \sqrt{\Delta} = 7{,}5 \Longrightarrow$

$$\mathrm{t} = \frac{12{,}5 - 7{,}5}{2{,}5} = 2\mathrm{s\ ou\ t'} = \frac{12{,}5 + 7{,}5}{2{,}5} = 8\mathrm{s}$$

Pour $\mathrm{t'} = 8\mathrm{s} \notin\ [0; 7\mathrm{s}]\ \ \Longrightarrow \theta_1 = 2\mathrm{s}$ et pour $t \in [7s\,;+\infty[, x'_1 = x_2\ \ si\ et\ seulement\ si$:

$$17{,}5t - 61 = 12{,}5t - 20 \Longrightarrow \theta_2 = t = \frac{41}{5} = 8{,}2s$$

- <u>Déduire les abscisses des dépassements x_1 et x_2</u>

Pour $\theta_1 = 2s,\ x_1 = 1{,}25 \times 2^2 = 5m$ et

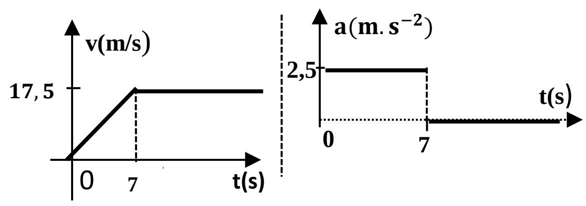
pour $\theta_2 = 8{,}2s,\ x_2 = 1{,}25 \times 8{,}2^2 = 84{,}05m$

3. <u>Vitesses de l'automobile aux instants θ_1 et θ_2</u>

Pour l'automobile : à t = θ_1, $v_1 = 2{,}5t = 2{,}5 \times 2 = 5m.s^{-1}$

pour $t = \theta_2 \in [7s\,;+\infty[$, le mouvement est uniforme de vitesse : $v = 17{,}5m.s^{-1} = cste$

4. Représentation graphique de v(t) et a(t



5. a)) Si $v_2 = 30{,}6km.h^{-1} = 8{,}5m.s^{-1}$, alors

$x'_2(t) = 8{,}5t - 20$, il y a dépassement si , $x_1 = x'_2$,

ce qui revient à résoudre l'équation :

$1{,}25t^2 - 8{,}5t + 20 = 0$, *qui n'a pas de solution* car $\Delta < 0$,

Alors il n'aura pas de rencontre donc pas de rattrapage.

b)) Détermination de la distance minimale

$\Delta x = x'_2 - x_1 = 1{,}25t^2 - 8{,}5t + 20$, est minimale si sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$\Delta x' = \frac{d}{dt}(\Delta x) = 2{,}5t - 8{,}5 = 0\,, t_{min} = \frac{8{,}5}{2{,}5} = 3{,}4s$$

$$\Delta x_{min} = 1{,}25 \times 3{,},4^2 - 8{,}5 \times 3{,}4 + 20 = 4{,}53m$$

Solution 8

1. Equations horaires du mouvement

En prenant comme origine des dates et d'abscisse l'instant où le train démarre, alors :

- Pour le train : MRUV :

$$x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0\,, or\ \text{à}\ t_0 = 0, v_0 = 0$$

$x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 \Longrightarrow x_1(t) = 0{,}5t^2$ et $v(t) = t$

- Pour le voyageur : MRU de vitesse v = 6 ms-¹ :

$x_2(t) = vt + x_0 \Rightarrow x_2(t) = 6t - 20$

2. il y a rattrapage si , $x_1 = x'_2$, ce qui revient à résoudre l'équation : $0{,}5t^2 - 6tt + 20 = 0$, qui n'a pas de solution car $\Delta < 0$ d'où ils ne vont pas se rencontrer.

Alors le voyageur ne rattrapera le train.

3. Détermination de la distance minimale

$\Delta x = x'_2 - x_1 = 0{,}5t^2 - 6t + 20$, est minimale si sa dérivée para rapport au temps est nulle :

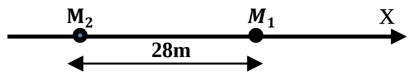
$\frac{d}{dt}(\Delta x) = \Delta x' = t - 6 = 0 \Rightarrow t_{min} = 6s$

$\Delta x_{min} = 0{,}5 \times 6^2 - 6 \times 6 + 20 = 2m.$

Solution 9

1. Montrons que les deux véhicules se heurtent

Les deux véhicules parcourent un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $v = 86{,}4km.h^{-1} = 24m.s^{-1} = cste$ puis d'un mouvement rectiligne uniformément décéléré de décélération différentes ($a_1 = -7{,}7m.s^{-2}$ et $a_2 = -4{,}2m.s^{-2}$)



- Détermination des équations horaires du mouvement

En prenant comme origine des dates et des abscisses la position du mobile M_2, on a :

Pour le mobile M_1 d'accélération $a_1 = -7{,}7m.s^{-2}$

- Phase 1 : MRU :

$$x_1(t) = vt + x_0\,, \text{à}\ t = 0, x_0 = 0, \Rightarrow x_1(t) = 24t$$

- Phase 2 : MRUD : $x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$,

$$or\ \text{à}\ t_0 = 0, v_0 = 24m.s^{-1}\ et\ x_0 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow x_1(t) = -\frac{1}{2} \times 7{,}7t^2 + 24t$$

$x_1(t) = -3{,}85t^2 + 24t$ et $v_1(t) = a_1t + v_0 = -7{,}7t + 24$

Pour le mobile M_2 d'accélération $a_2 = -4{,}2m.s^{-2}$

- Phase 1 : MRU : $x_2(t) = vt + x_0$, à $t = 0$,

$$x_0 = -20, \Rightarrow x_2(t) = 24t - 28$$

- Phase 2 : MRUD : $x_2(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$,

$$or\ \text{à}\ t_0 = 0, v_0 = 24m.s^{-1} et\ x_0 = -28$$

alors: $x_2(t) = -\frac{1}{2} \times 4{,}2t^2 + 24t - 28 = -2{,}1t^2 + 24t - 28$

et $v_2(t) = a_1t + v_0 = -4{,}2t + 24$

Si les deux véhicules se heurtent, alors au point de rencontre

$x_1(t) = x_2(t)$ *ce qui revient* à résoudre l'équation :

$-1{,}75t^2 + 28 = 0 \Rightarrow t_1 = 4s\ et\ t_2 = -4s$(à rejeter)

D'où les deux véhicules vont se heurter à la date t = 3,38s.

2. Vitesse relative des deux véhicule au moment du choc

A la date t = 4s, $v_1 = -7{,}7 \times 4 + 24 = -6{,}8m.s^{-1}$ (alors M_1 est immobile) : $v_2 = -4{,}2 \times 4 + 24 = 7{,}2m.s^{-1}$

3. Décélération minimale de M_2 pour éviter le choc

Pour éviter le choc, il faut que la distance minimale séparant les deux véhicules soient égale à 28m. D'où : $a_{1(min)} = -7{,}7m.s^{-2}$

Solution 10

a)) Equation horaire du mouvement

$$z_1(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + z_0\,, or\ \text{à}\ t_0 = 0, et\ z_0 = 0$$

$$\Rightarrow z_1(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t = -5t^2 + 30t$$

b)) Altitude maximale

Au point maximal, $\frac{dZ}{dt} = 0 \Rightarrow -10t + 30 = 0 \Rightarrow t = 3s$,

$$Z_{max} = -5 \times 3^2 + 30 \times 3 = 45m$$

La bille A atteint son altitude maximale,

$Z_{max} = 45m$ à la date $t = 3s$.

2. Equation horaire de la bille B

$$z_2(t) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0)$$

$\Rightarrow z_2(t) = -5(t-3)^2 + 30(t-3) = -5t^2 + 60t - 135$

- Instant et abscisse du rencontre

Au point du rencontre

$z_1(t_R) = z_2(t_R) \Rightarrow 30t_R - 135 = 0$, $pour\ t_R = 4{,}5s$

$z_R = -5 \times 4{,}5^2 + 30 \times 4{,}5 = 33{,}75m$

Solution 11

Durée totale du mouvement et la distance totale parcourue

Etude cinématique du mouvement

- Phase 1 : MRUA : $x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$,

$$or\ à\ t_0 = 0, v_0 = 0 \Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{2}at^2$$

$x_1(t) = 0{,}4t^2\ \ et\ v = at = 0{,}8t\ \Rightarrow v = 0{,}8tt = 8 \Rightarrow\ t_1 = 10s$ et $x_1 = 0{,}4 \times 10^2 = 40$m

-Phase2 : MRU : $v = \frac{d}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{d}{v} = \frac{24}{8} = 3s$

- Phase3 : MRUD : RIT :

$$\Delta v^2 = 2ad\ \Rightarrow a = \frac{\Delta v^2}{2d} = \frac{-8^2}{2 \times 8} = -4m.s^{-2}$$

$v(t) = -4t + 8$, *à l'arrêt :* $v(t) = -4t + 8 = 0,\ t_3 = \frac{8}{4} = 2s,$

donc : $T = t_1 + t_2 + t_3 = 10 + 3 + 2 = 15s$ et

$$D = 40 + 24 + 8 = 72m$$

D'où la durée totale du mouvement est $T = 15s$ et la distance totale parcourue est $D = 72m.$

Solution 12

1. Distance parcourue pendant la 1ère phase

Phase 1 : MRUA : $x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 = 0{,}6t^2\ et\ v_1 = 1{,}2t$

A t=10s, $d_1 = 0{,}6.10^2 = 60m\ et\ v_1 = 1{,}2.10 = 12m.s^{-1}$

2. Distance parcourue pendant la 2ème phase

Phase 2 : MRU :

$$v_1 = v_2 = \frac{d_2}{t_2} \Rightarrow\ d_2 = v_1t_2 = 12 \times 20 = 240m$$

3. Accélération a_3 du mobile pendant la 3ème phase

R.I.T : $\Delta v^2 = -{v_1}^2 = 2a_3d_3$

$$\Rightarrow\ a_3 = \frac{-{v_1}^2}{2d_3} = \frac{-12^2}{2 \times 8} = -9m.s^{-2}$$

Durée mise par le mobile pendant la 3ème phase :

$$\Delta v = -v_1 = a_3t_3\ \Rightarrow t_3 = \frac{-v_1}{a_3} = \frac{-12}{-9} = 1{,}33s$$

4. Durée totale et la distance totale parcourue

$T = t_1 + t_2 + t_3 = 10 + 20 + 1{,}33 = 31{,}33s$ et

$$D = 60 + 240 + 8 = 308m$$

Vitesse moyenne : $v_{moy} = \frac{D}{T} = \frac{308}{31{,}33} = 9{,}83m.s^{-1}$

Solution 13

a)) Durée de freinage :

$$\Delta v = -v_1 = a_3t_3\ \Rightarrow t_3 = \frac{-v_1}{a_3} = \frac{-20}{-0{,}5} = 40s$$

b)) Distance parcourue pendant la 2ème phase

Phase1 : MRUA : $x_1(t) = \frac{1}{2}at^2$, Or

$$\Delta v = v_1 = a_1t_1\ \Rightarrow\ a_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{20}{25} = 0{,}8m.s^{-2}$$

$$x_1(t) = 0{,}4t^2\ \Rightarrow à\ t = 25s,\ \ d_1 = 0{,}4 \times 25^2 = 250m$$

Phase 3 : MRUD : R.I.T : $\Delta v^2 = -{v_1}^2 = 2a_3d_3$

$\Rightarrow d_3 = \frac{-{v_1}^2}{a_3} \Rightarrow d_3 = \frac{-20^2}{2(-0{,}5)} = 400m$

$$D = d_1 + d_2 + d_3\ \Rightarrow d_2 = D - (d_1 + d_3)$$

$$d_2 = 10^4 - (250 + 400) \Rightarrow d_2 = 9{,}3510^3m = 9{,}35km$$

c)) Durée totale du mouvement

Pour la 2ème phase :

$$v_1 = v_2 = \frac{d_2}{t_2}\ \Rightarrow t_2 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{9350}{20} = 467{,}5s$$

$$\Rightarrow T = t_1 + t_2 + t_3 = 25 + 467{,}5 + 40$$

$$T = 532{,}5s = 8min52{,}5s$$

Solution 14

1. Equations horaires du mouvement

-Phase1 : (de A à B) MRUD

$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_At + x_A$, $or\ à\ t_0 = 0, x_A = 0$

$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_At\ \ et\ \ v_1(t) = a_1t + v_0$

$v_B = 15km.h^{-1} = 15m.s^{-1}\ et\ v_B = 36kmh^{-1} = 10m.s^{-1}$

RIT : ${v_B}^2 - {v_A}^2 = 2a_1AB\ \Rightarrow$

$$a_1 = \frac{{v_B}^2 - {v_A}^2}{2AB} = \frac{10^2 - 15^2}{2 \times 125} = -0{,}5m.s^{-2}$$

$$x_1(t) = -0{,}25t^2 + 15t\ \ et\ \ v_1(t) = -0{,}5t + 15$$

Au point B, $v_B = -0{,}5t_B + 15 = 10\ \Rightarrow t_B = 10s$

- Phase 2 : (de B à C) MRU de vitesse :

$$v_B = v_C = 10m.s^{-1}$$

$$x_2(t) = v_B(t - t_B) + x_B\ \Rightarrow\ x_2(t) = 10(t - 10) + 125$$

$$\Rightarrow x_2(t) = 10t + 25$$

- Phase 3 : (de C à D) : MRUA :

$x_3(t) = \frac{1}{2}a_3(t - t_C)^2 + v_C(t - t_C) + x_C$

$et\ v_3(t) = a_3(t - t_C) + v_C$

Or au point C, $t_C = 10 + 60 = 70s$ et

$x_C = 10(70) + 25 = 725m$

$$v_D - v_C = a_3\Delta t\ \Rightarrow\ a_3 = \frac{v_D - v_C}{\Delta t} = \frac{15 - 10}{20} = 0{,}25m.s^{-2}$$

$$\begin{cases} x_3(t) = \frac{1}{2} \times 0{,}25(t - 70)^2 + 10(t - 70) + 7252 \\ v_3(t) = 0{,}25(t - 70) + 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3(t) = 0{,}125t^2 - 7{,}5t + 637{,}5 \\ v_3(t) = 0{,}25t - 7{,}5 \end{cases}$$

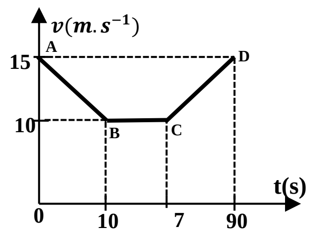
- Valeur de la distance AD

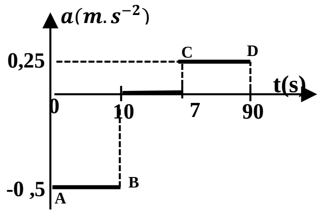
La durée totale mise sur le trajet est :

$$t_{AD} = 10 + 60 + 20 = 90s$$

$$AD = 0{,}125(90)^2 - 7{,}5(90) + 637{,}5 = 975m$$

2. Diagramme de v(t) et a(t)





Solution 15

1. Vitesse maximale acquise par la voiture

Phase1 (MRUA) : RIT : ${v_B}^2 - {v_A}^2 = 2a_1AB$,

$$\text{Or } v_A = 0 \Rightarrow {v_B}^2 = 2a_1AB \Rightarrow AB = \frac{{v_B}^2}{2a_1}$$

Phase 2 : (MRU) :$v_B = v_C = \frac{BC}{t_{BC}} \Rightarrow BC = v_Bt_{BC}$

Phase 3 : (MRUD) : RIT : $-{v_B}^2 = 2a_2CD \Rightarrow CD = \frac{-{v_B}^2}{2a_2}$

$$Or\ AD = AB + BC + CD \Rightarrow \frac{{v_B}^2}{2a_1} + v_Bt_{BC} + \frac{-{v_B}^2}{2a_2} = AD$$

$$\Rightarrow \frac{{v_B}^2}{0{,}2} + v_B(14 \times 60) + \frac{-{v_B}^2}{-0{,}2} = 13720$$

$$5{v_B}^2 + 840v_B + 5{v_B}^2 - 1370 = 0 \Rightarrow {v_B}^2 + 84v_B - 1372 = 0$$

$\Delta = 84^2 + 4 \times 1372 = 12544 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 112$,

$$v_B = \frac{-84 \pm 112}{2} \Rightarrow v_B = 14m.s^{-1}$$

D'où la vitesse maximum acquise est: $v_B = 14m.s^{-1}$

2. Durée totale du parcours ABCD

Phase 1 : $v_B = a_1t_{AB} \Rightarrow t_{AB} = \frac{v_B}{a_1} = \frac{14}{0{,}1} = 140s$;

Phase 2 : $t_{BC} = 14min = 840s$

Phase 3 : $v_D - v_C = a_2t_{CD} \Rightarrow t_{CD} = \frac{-v_B}{a_2} = \frac{-14}{-0{,}1} = 140s$

$$t_{AD} = t_{AB} + t_{BC} + t_{CD} = 140 + 840 + 140 = 1120s$$

3. Calcul de distance AB, BC et CD

$$AB = \frac{{v_B}^2}{2a_1} = \frac{14^2}{0{,}2} = 980m\ ;$$

$$BC = v_Bt_{BC} = 14 \times 840 = 11760m$$

$$CD = \frac{-{v_B}^2}{2a_2} = \frac{14^2}{-0{,}2} = 980m$$

4. Vitesse moyenne de la voiture sur sa trajectoire :

$$v_{moy} = \frac{AD}{t_{AD}} = \frac{13720}{1120} = 12{,}25m.s^{-1}$$

5. Equations horaires du mouvement

Phase1 : MRUA :

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_At + x_A\ , or\ à\ t_0 = 0, x_A = 0\ et\ v_A = 0$$

$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 = 0{,}05t^2$ et $v_1(t) = 0{,}1t$

- Phase 2 : (de B à C) MRU : de vitesse $v_B = v_C = 14m.s^{-1}$

$$x_2(t) = v_B(t - t_B) + x_B \Rightarrow x_2(t) = 14(t - 140) + 840$$

$$\Rightarrow x_2(t) = 14t - 1120$$

- Phase 3 : (de C à D) : MRUA

$$x_3(t) = \frac{1}{2}a_3(t - t_C)^2 + v_C(t - t_C) + x_C$$

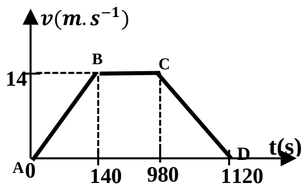
$$et\ v_3(t) = a_3(t - t_C) + v_C$$

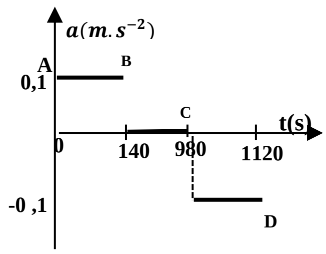
$$x_3(t) = -\frac{1}{2} \times 0{,}1(t - 980)^2 + 14(t - 980) + 12740$$

$$x_3(t) = -0{,}05t^2 + 112t - 49000 \quad et$$

$$v_3(t) = -0{,}1(t - 980) + 14 = -0{,}1t + 112$$

6. Diagramme de v(t) et a(t)





Solution 16

1. a)) Equations horaires du mouvement de la rame

$$x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0\ , or\ à\ t_0 = 0, x_0 = 0\ et\ v_0 = v_0$$

$x_1(t) = \frac{1}{2}a{\theta_1}^2 + v_0\theta_1$ et $v_1 = a\theta_1 + v_0$ et

$$x_2(t) = \frac{1}{2}a{\theta_2}^2 + v_1\theta_2 \Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{2}a{\theta_2}^2 + (a\theta_1 + v_0)\theta_2$$

b)) Valeur de l'accélération a et de la vitesse v_0

Pour $\theta_1 = 2s$, $x_1 = 2a + 2v_0 = 24$ (1) et

Pour $\theta_2 = 2s$, $x_2 = 6a + 2v_0 = 32$ (2)

$(2) - (1) \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2m.s^{-2}$ et $v_0 = 10m.s^{-1}$

2. Vitesse de la rame dans la phase uniforme

$v = at + v_0 = 2t + 10$, à t=10s, $v = 2(10) + 10 = 30m.s^{-1}$

$$v = \frac{d_2}{\theta_4} \Rightarrow d_2 = v\theta_4 = 30 \times 30 = 900m$$

3. a)) Distance parcourue pendant la phase de décélération

R.I.T : $-v^2 = 2ad_3 \Rightarrow d_3 = \frac{-v^2}{2a} = \frac{-30^2}{2(-2)} = 225m$

b)) Distance totale parcourue

$$d_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t = t^2 + 10t = 10^2 + 10 \times 10 = 200m$$

$$D = d_1 + d_2 + d_3 = 200 + 900 + 225 = 1325m$$

Solution 17

1. Lois horaires du mouvement

- Phase 1 : MRUA : $x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_0t + x_0$,

or à $t_0 = 0, x_0 = 0$ et $v_0 = 0 \Rightarrow$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 \ \Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{2}a_1{\theta_1}^2 \ et \ v_1(t) = a_1\theta_1$$

- Phase2 : MRUD : $x_2(t) = -\frac{1}{2}|a_2|{\theta_2}^2 + a_1\theta_1\theta_2 + x_1$

$$et \ v_2(t) = -|a_2|\theta_2 + a_1\theta_1$$

2. a)) Relation entre a_1, a_2, θ_1 et θ_2.

A l'arrêt $et \ v_2(t) = -|a_2|\theta_2 + a_1\theta_1 = 0 \ \Rightarrow \theta_2 = \frac{a_1\theta_1}{|a_2|}$

b)) Montrons que $\theta_1 = \sqrt{\frac{2D|a_2|}{|a_2|a_1 + {a_1}^2}}$

On a : $x_2(t) = -\frac{1}{2}|a_2|{\theta_2}^2 + a_1\theta_1\theta_2 + \frac{1}{2}a_1{\theta_1}^2 = D$

$\Longrightarrow -|a_2|{\theta_2}^2 + 2a_1\theta_1\theta_2 + a_1{\theta_1}^2 = 2D$, or $\theta_2 = \frac{a_1\theta_1}{|a_2|} \ \Rightarrow$

$$-|a_2|\left(\frac{a_1\theta_1}{|a_2|}\right)^2 + 2a_1\theta_1\frac{a_1\theta_1}{|a_2|} + a_1{\theta_1}^2 = 2D$$

$$\Rightarrow -{a_1}^2{\theta_1}^2 + 2{a_1}^2{\theta_1}^2 + a_1{\theta_1}^2|a_2| = 2D|a_2|$$

$${a_1}^2{\theta_1}^2 + a_1{\theta_1}^2|a_2| = 2D\,|a_2| \ \Rightarrow \ \theta_1 = \sqrt{\frac{2D\,|a_2|}{{a_1}^2 + a_1|a_2|}}$$

c)) En déduisons les valeurs de θ_1 et θ_2

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{2 \times 1500 \times \ 5.10^{-2}}{0{,}85^2 + 0{,}85 \times 0{,}05}} = 14s \ \ et$$

$$\theta_2 = \frac{0{,}85 \times 14}{0{,}05} = 238s$$

3. Calcul des longueurs l_1 et l_2

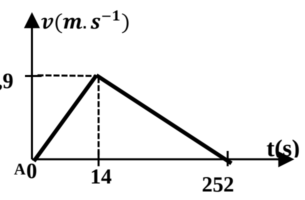
$$l_1 = \frac{1}{2}a_1{\theta_1}^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}85 \times 14^2 = 83{,}3m \ \ et$$

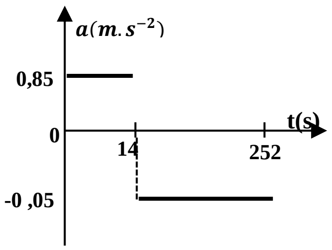
$$l_2 = D - l_1 = 1500 - 83{,}3 = 1416{,}7m$$

Vitesse maximale atteinte par la rame :

$$v_{max} = a_1\theta_1 = 0{,}85 \times 14 = 11{,}9m.s^{-1}$$

4. Représentation graphique de v(t) et a(t)





Solution 18

1. a)) Montrons que le mouvement est C.U

Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$:

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{V^2}{R}\vec{N} = 50\vec{N} \ \Longrightarrow \ \frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow v = cste$$

Par ailleurs le mouvement est circulaire, alors le mouvement de est circulaire uniforme.

b)) Détermination du rayon de la trajectoire

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} \ \ or \ \ a = a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = 50m.s^{-2}$$

$$soit \ \ \omega^2 = \frac{a}{R} \ \Longrightarrow \ T^2 = \frac{4\pi^2 R}{a}$$

$$R = \frac{T^2 a}{4\pi^2} = \frac{(0{,}4\pi)^2 \times 50}{4\pi^2} = 2m$$

2. a)) Montrons que v est constante

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = -a\omega\, sin(\omega t) \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = a\omega\, cos(\omega t) \end{cases}$$

$$v = \sqrt{a^2\omega^2\left(sin^2(\omega t) + cos^2(\omega t)\right)} = a\omega = cste$$

$$v = 10m.s^{-1}$$

b)) Montrons que l'accélération est constante

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -a\omega^2\, cos(\omega t) \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -a\omega^2\, sin(\omega t) \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a^2\omega^4\left(cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t)\right)} = a\omega^2 = cste,$$

$a = 10ms^{-2}$.

c)) Nature de la trajectoire

$$\begin{cases} x = a\cos(\omega t) \\ y = a\sin(\omega t) \end{cases} \Longrightarrow \ x^2 + y^2 = a^2$$

La trajectoire est un cercle de centre O et de rayon $R = a$ et le mouvement est circulaire uniforme, alors le vecteur accélération $\vec{a}$ est centripète, radial et d'intensité $a = 10ms^{-2}$.

Solution 19

a)) Vitesse angulaire, période et la fréquence

$\theta(t) = \ 5t + \pi/8 \Longrightarrow \ \omega = 5rad.s^{-1}$;

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 1{,}256s \ \ et \ \ f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}256} = 0{,}796Hz$$

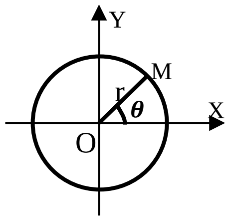
b)) Mouvement de M sur OX et sur OY :

$\cos\theta = \frac{X}{r} \Longrightarrow X = r\cos\theta \ \ et \ \ \sin\theta = \frac{Y}{r} \ \Longrightarrow Y = r\sin\theta$

c)) Equation de la trajectoire

$$\begin{cases} X = r\cos\theta \\ Y = r\sin\theta \end{cases}$$

$\Longrightarrow X^2 + Y^2 = r^2$ (cercle de rayon r)



d)) Module du vecteur vitesse

$$\vec{v} \begin{cases} v_X = \frac{dX}{dt} = -r\dot{\theta}\sin\theta \\ v_Y = \frac{dY}{dt} = r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{r^2\dot{\theta}^2(sin^2\theta + cos^2\theta)} = r\dot{\theta} = 0{,}05 \times 5 = 0{,}25ms^{-1}$$

Montrons que $\overrightarrow{OM} \ \perp \ \vec{v}$:

$\overrightarrow{OM} = (r\cos\theta)\vec{\imath} + (r\sin\theta)\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \left(-r\dot{\theta}\sin\theta\right)\vec{\imath} + \left(r\,\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{\jmath}$

$$\overrightarrow{OM}.\vec{v} = -r^2\cos\theta\sin\theta + r^2\sin\theta\cos\theta = 0 \ \Longrightarrow \ \overrightarrow{OM} \ \perp \ \vec{v}$$

e)) Le mouvement de M est circulaire uniforme car $v = cste$.

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \begin{cases} a_X = \frac{dv_X}{dt} = -r\dot{\theta}^2 \cos\theta \\ a_Y = \frac{dv_Y}{dt} = -r\dot{\theta}^2 \sin\theta \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{r^2\dot{\theta}^4(cos^2\theta + sin^2\theta)}$$

$\Rightarrow v = r\dot{\theta}^2 = r\omega^2 = a_N$

$\vec{a} = (-r\dot{\theta}^2 \cos\theta)\vec{\imath} + (-r\dot{\theta}^2 \sin\theta)\vec{\jmath}$

$\vec{a} = -\dot{\theta}^2(r\cos\theta\vec{\imath} + r\sin\theta\,\vec{\jmath}) = -\dot{\theta}^2\overrightarrow{OM}$ (radial)

Alors le vecteur accélération est radial et centripète :

$a = r\omega^2 = 0{,}05 \times 5^2 = 1{,}25 m.s^{-2}$.

Solution 20

1. Valeur de l'accélération angulaire à t=0 et t=4s

$$M.C.U.A : \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta}-\dot{\theta}_0}{t} = \frac{2\pi N - 2\pi N_0}{t} = \frac{2\pi}{t}(N - N_0)$

$$\ddot{\theta} = \frac{2\pi}{4 \times 60}(1000 - 100) = 23{,}56 rad.s^{-2}$$

2. Expression de la vitesse angulaire en fonction du temps

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0 = 23{,}56t + \frac{2\pi}{60} \times 100 = 23{,}56t + 10{,}47$$

3. Valeur de la vitesse angulaire à t=3s : $\dot{\theta} = 23{,}53 \times 3 + 10{,}47 = 81{,}15 rad.s^{-1}$

Nombre de tous effectués : R.I.T :

$$\omega^2 - {\omega_0}^2 = 4\pi^2(N^2 - {N_0}^2) = 2\ddot{\theta}\Delta\theta = 2\ddot{\theta}2\pi n$$

$$n = \frac{4\pi^2(N^2 - {N_0}^2)}{4\pi\ddot{\theta}} = \frac{\pi(N^2 - {N_0}^2)}{\ddot{\theta}}$$

$$A.N : n = \frac{\pi(1000^2 - 100^2)}{23{,}56 \times 60^2} = 36{,}66 tours$$

Solution 21 (Changement de phase)

Calculons la durée totale de rotation

Phase 1 : M.U.A : $\Delta\omega = \ddot{\theta}_1\Delta t$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_1 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi N}{\Delta t} = \frac{2\pi \times 120}{60 \times 60} = 0{,}21 rad.s^{-2}$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}21t^2 = 0{,}105t^2 \;\; et \; \omega(t) = \ddot{\theta}t = 0{,}21t$$

et à $t = 60s$: $\theta = 0{,}105 \times 60^2 = 378 rad \; et$

$\omega = 0{,}21 \times 60 = 12{,}6 rad.s^{-2}$

$R.I.T : \Delta\omega^2 = \omega^2 = 2\ddot{\theta}_1\Delta\theta = 2\ddot{\theta}_1 \times 2\pi n_1 \Rightarrow n_1 = \frac{\omega^2}{4\pi\ddot{\theta}_1}$

$$A.N : n_1 = \frac{12{,}6^2}{4\pi \times 0{,}2} = 63{,}17 tours$$

Phase 2 : M.U : $\Delta\theta = 2\pi n_2 = \omega\Delta t \Rightarrow n_2 = \frac{\omega\Delta t}{2\pi}$

Phase 3 : M.U.D :

$$\Delta\omega = \ddot{\theta}_2\Delta t \;\Rightarrow \ddot{\theta}_2 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{-\omega}{\Delta t} = \frac{-12{,}6}{5 \times 60} = -0{,}042 rad.s^{-2}$$

$$R.I.T : \Delta\omega^2 = -\omega^2 = 2\ddot{\theta}_2\Delta\theta = 2\ddot{\theta}_2 \times 2\pi n_3 \Rightarrow n_3 = \frac{-\omega^2}{4\pi\ddot{\theta}_2}$$

$$A.N : n_2 = \frac{-12{,}6^2}{4\pi(-0{,}042)} = 300{,}8 tours$$

Le nombre de tours total effectué par la roue est : $n = 1560 tours$

$n = n_1 + n_2 + n_3 \Longrightarrow n_2 = n - (n_1 + n_3)$

$n_2 = 1560 - (63{,}17 + 300{,}8) = 1196{,}03 tours$

$n_2 = \frac{\omega\Delta t}{2\pi} \Longrightarrow \Delta t = \frac{2\pi n_2}{\omega}$

$\Delta t = \frac{2\pi \times 1196{,}03}{12} = 626{,}24s = 10min56{,}24s$

La durée totale de rotation est :

$T = 1min + 10min56{,}24s + 5min = 16min56{,}24s = \mathbf{1016{,}24s}$

Solution 22

1. Angle balayé par le disque :

$$\Delta\omega^2 = \omega^2 = 2\ddot{\theta}\Delta\theta \;\Longrightarrow\; \Delta\theta = \frac{\omega^2}{2\ddot{\theta}} = \frac{8^2}{2 \times 2{,}5} = 12{,}8 rad$$

2. Loi horaire du mouvement : $\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 = \frac{1}{2} \times 2{,}5t^2 = 1{,}25t^2$

3. a)) La décélération angulaire : M.U.D :

$$\Delta\omega = \ddot{\theta}_2\Delta t \;\Rightarrow \ddot{\theta}_2 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{-2{,}5}{2} = -1{,}25 rad.s^{-2}$$

b)) Angle balayé par le disque pendant la durée de freinage

$\Delta\omega^2 = -\omega^2 = 2\ddot{\theta}_2\Delta\theta$

$$\Longrightarrow \Delta\theta = -\frac{\omega^2}{2\ddot{\theta}_2} = -\frac{8^2}{-2 \times 1{,}25} = 25{,}6 rad$$

c)) Nombre de tours complète effectués par le disque dans la phase 2

$\Delta\theta = 2\pi n \Longrightarrow n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{25{,}6}{2\pi} = 4 tours$

Solution 23

1. Vitesse angulaire : $\omega = 2\pi N = 2\pi \times \frac{15}{60} = 1{,}57 rad.s^{-1}$

2. Angle balayé par le disque en 2s :

$$M.C.U : \;\; \theta = \omega t = 1{,}57t = 1{,}57 \times 2 = 3{,}14 rad$$

3. Valeur de la décélération angulaire :

$$\Delta\omega = \ddot{\theta}\Delta t \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{-\omega}{\Delta t} = \frac{-1{,}57}{30} = -0{,}052 rad.s^{-2}$$

4. a)) Durée du mouvement accéléré :

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 2\pi(N - N_0) = \ddot{\theta}\Delta t$$

$$\Longrightarrow \Delta t = \frac{2\pi(N - N_0)}{\ddot{\theta}} = \frac{2\pi(20 - 6)}{60 \times 7} = 0{,}21s$$

b)) Nombre de tours effectué pendant par le disque à t=0,21s

R.I.T : $\omega^2 - {\omega_0}^2 = 4\pi^2(N^2 - {N_0}^2) = 2\ddot{\theta}\Delta\theta = 2\ddot{\theta}2\pi n$

$$n = \frac{4\pi^2(N^2 - {N_0}^2)}{4\pi\ddot{\theta}} = \frac{\pi(N^2 - {N_0}^2)}{\ddot{\theta}}$$

$$A.N : n = \frac{\pi(20^2 - 6^2)}{7 \times 60^2} = 4{,}53 \times 10^{-2} tours$$

Solution 24

1. Accélération angulaire de la poulie et loi horaire de son mouvement

$\ddot{\theta} = \frac{a}{r} = \frac{1}{1,60} = 0,625 rad.s^{-2}$ et

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 = \frac{1}{2} \times 0,625t^2 = 0,3125t^2$$

2. Vitesse angulaire de la poulie si S descend 2m de chute

Pour le solide S : M.U.A , R.I.T:

$$v^2 = 2ad \implies v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2 \times 2} = 2m.s^{-1}$$

$v = r\omega \implies \omega = \frac{v}{r} = \frac{2}{1,60} = 1,25 rad.s^{-1}$ et

$$N = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1,25}{2\pi} = 0,2 tr.s^{-1}$$

3. a)) Accélération angulaire :

$R.I.T: -\omega^2 = 2\ddot{\theta}\Delta\theta = 4\pi n\ddot{\theta}$

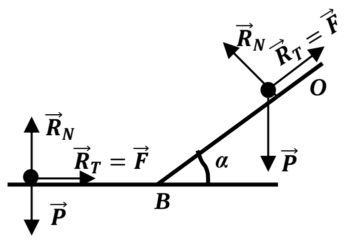
$\implies \ddot{\theta} = \frac{-\omega^2}{4\pi n} = \frac{-1,25^2}{4\pi \times 20} = -6,22.10^{-3} rad.s^{-2}$

b)) Durée du freinage : :

$$\Delta\omega = \ddot{\theta}\Delta t \implies \Delta t = \frac{\Delta\omega}{\ddot{\theta}} = \frac{-1,25}{-6,22.10^{-3}} = 200,96 s$$

Solutions sur la R.F.D

Solution 1



1. a)) Equations horaires du mouvement

Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ et à la force de de frottement $\vec{F} = \overrightarrow{R_T}$(réaction tangentielle).

T.C.I : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Suivant x'x : $mg\sin\alpha - F = ma \Rightarrow a = g\sin\alpha - \frac{F}{m}$

$$a = g\sin\alpha - \frac{F}{m} = 10 \times 0{,}5 - \frac{44}{55} = 4{,}2m.s^{-2}$$

MRUA , $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$,

Or à t=0, $x_0 = 0$ *et* $v_0 = 2m.s^{-1}$ alors $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$

$x(t) = 2{,}1t^2 + 2t$ et $v(t) = at + v_0 = 4{,}2t + 2$.

b)) Calcul de la durée de la descendante

On a : $x(t) = 2{,}1t^2 + 2t = L = 50 \Rightarrow 2{,}1t^2 + 2t - 50 = 0$

$\Delta = 2^2 + 4 \times 2{,}1 \times 50 = 424 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 20{,}6$,

$t = \dfrac{-2 \pm 20{,}6}{2 \times 2{,}1}$, *d'où* $t = 4{,}43$ *seconde*

c)) Vitesse au bas de la pente :

$$v = 4{,}2t + 2 = 4{,}2 \times 4{,}43 + 2 = 20{,}6m.s^{-1}$$

d)) Energie mécanique de (S) au bas de la pente

$E = E_C + E_{PP} = E_C$, car au bas de la pente $E_{PP} = 0$, alors :

$E = E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 55 \times 20{,}6^2 = 1{,}67 \times 10^4 J$

2. a)) Valeur de la nouvelle accélération

T.C.I : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$, Suivant x'x : $-F = ma \Rightarrow$

$a = -\frac{F}{m} = \frac{-44}{55} = -0{,}8m.s^{-2}$ (MRUR)

b)) Equations horaires du mouvement : M.R.U.D

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$, or à t=0, $x_0 = 0$ *et* $v_0 = 20{,}6m.s^{-1}$

alors : $x(t) = -0{,}4t^2 + 20{,}6t$ et

$v(t) = at + v_0 = -0{,}8t + 20{,}6$.

c)) Distance minimale parcourue

- Durée minimale mise : Au point maximal :

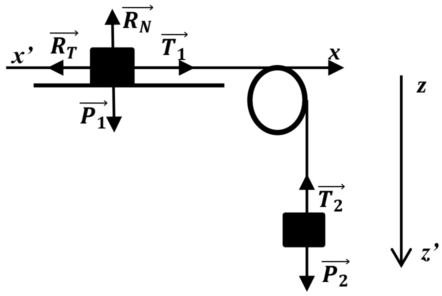
$v(t) = 0$, alors : $-0{,}8t_{min} + 20{,}6 = 0 \Rightarrow t_{min} = 25{,}75s$ et

$$d_{min} = -0{,}8 \times 25{,}75^2 + 20{,}6 \times 25{,}75 = 265{,}225m$$

Durée totale du mouvement :

$$T = 4{,}43 + 25{,}75 = 30{,}18s$$

Solution 2



1.a))Accélération du système

- Pour la masse S_1

T.CI : $\vec{P_1} + \vec{T_1} + \vec{R} = m_1\vec{a}$, Suivant x'x : $T_1 = m_1 a$ (1)

- Pour la masse s_2 : T.CI : $\vec{P_2} + \vec{T_2} = m_2\vec{a}$

Suivant z'z' : $m_2 g - T_2 = m_2 a \Rightarrow T_2 = m_2 g - m_2 a$ (2)

Or $T_1 = T_2$ alors : $m_1 a = m_2 g - m_2 a$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \quad ,A.N: \ a = \frac{300}{800} \times 10 = 3{,}75m.s^{-2}$$

b)) Energie mécanique de s_2 lorsqu'il heurte le sol

$E = E_C + E_{PP} = E_C$, car au sol de la pente $E_{PP} = 0$, alors :

$$E = E_C = \frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}m_2(2ad)$$

$$E = \frac{1}{2} \times 0{,}3 \times (2 \times 3{,}75 \times 3) = 3{,}375J$$

c)) Norme de la tension du fil

$$T_1 = m_1 a = 0{,}5 \times 3{,}75 = 1{,}875N$$

2. Contact avec frottement

- Accélération du système

- Pour la masse S_1 : T.CI : $\vec{P_1} + \vec{T_1} + \vec{R_N} + \vec{R_T} = m_1\vec{a}$

Suivant x'x : $-R_T + T_1 = m_1 a \Rightarrow T_1 = f + m_1 a$ (1)

- Pour la masse S_2 : T.CI : $\vec{P_2} + \vec{T_2} = m_2\vec{a}$

Suivant z'z' : $m_2 g - T_2 = m_2 a \Rightarrow T_2 = m_2 g - m_2 a$ (2)

Or $T_1 = T_2$ alors : $f + m_1 a = m_2 g - m_2 a \Longrightarrow$

$$a' = \frac{m_2 g - f}{m_1 + m_2} \quad ,A.N: a' = \frac{0{,}3 \times 10 - 1{,}2}{0{,}8} = 2{,}25m.s^{-2}$$

- Energie mécanique de s_2 lorsqu'il heurte le sol

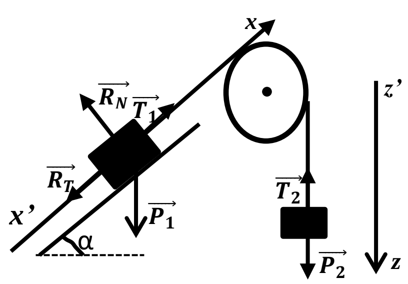
$E = E_C + E_{PP} = E_C = \frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}m_2(2a'd) = m_2 a'd$

$$E = 0{,}3 \times 2{,}25 \times 3 = 2{,}025J$$

- Norme de la tension T du fil

$$T_1 = f + m_1 a = 1{,}2 + 0{,}5 \times 2{,}25 = 2{,}325N$$

3. a)) Nouvelle accélération a'



- Pour la masse S_1

T.CI : $\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N} = m_1\vec{a}$

Suivant x'x : $-m_1 g \sin\alpha - f + T_1 = m_1 a$

$$\Rightarrow T_1 = m_1 g \sin\alpha + f + m_1 a \ (1)$$

- Pour la masse S_2 : T.CI : $\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_2} = m_2\vec{a}$

Suivant z'z : $m_2 g - T_2 = m_2 a \Rightarrow T_2 = m_2 g - m_2 a \ (2)$

Or $T_1 = T_2$ alors : $m_1 g \sin\alpha + f + m_1 a = m_2 g - m_2 a$

$$donc : \ a = \frac{g(m_2 - m_1 \sin\alpha) - f}{m_1 + m_2}$$

$$A.N : \ a = \frac{10(0{,}3 - 0{,}5 \times \sin 30) - 0{,}2}{0{,}8} = 0{,}375 m.s^{-2}$$

Comme $a > 0$, alors S_1 parcourt un M.R.U.A

b)) <u>Energie mécanique de S_1 à t = 1,2s</u>

$E = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2} m_1 v^2 + m_1 g x \sin\alpha$, avec $x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \ x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}375 \times 1{,}2^2 = 0{,}27m \quad et$

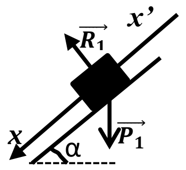
$$v^2 = 2ax \Rightarrow E = m_1\left(\frac{v^2}{2} + gx\sin\alpha\right) = m_1 x(a + g\sin\alpha)$$

$E = 0{,}5 \times 0{,}27(0{,}375 + 10\sin 30°) = 0{,}725J$

c)) $A\ t = 1{,}2s$, $v = at = 0{,}375 \times 1.2 = 0{,}45 m.s^{-1}$

c1)) <u>Caractéristiques du vecteur accélération</u>

Après la rupture la masse m_1 est soumise à son poids $\overrightarrow{P_1}$, à la réaction $\overrightarrow{R_1}$



T.CI : $\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{R_1} = m_1\vec{a}$

Suivant x'x : $m_1 g \sin\alpha = m_1 a \Rightarrow$

$$a = g\sin\alpha = 10 \times \sin 30° = 5 m.s^{-2}$$

Après la rupture du fil , le mouvement de la masse m_1 est uniformément Varié (Accéléré) , son vecteur accélération :

- direction : perpendiculaire à la trajectoire
- sens : suivant la trajectoire (x'x)
- intensité : $a = 5 m.s^{-2}$

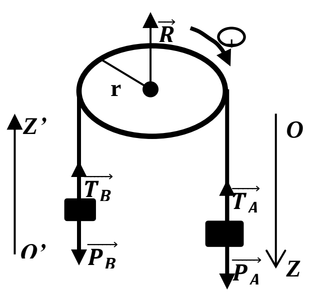
c2)) <u>Loi horaire du mouvement</u>

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$,

à $t = 1{,}2s$, $v_0 = -0{,}45 m.s^{-1}$ et $x_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2{,}5t^2 - 0{,}45t \\ v = 5t - 0{,}45 \end{cases}$

<u>Solution 3</u>

1. a)) <u>Accélération du système</u>



- Pour la masse M_A

T.CI : $\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{T_A} = M_A\vec{a}$

Suivant OZ : $M_A g - T_A = M_A a \Rightarrow T_A = M_A g - M_A a \ (1)$

- Pour la masse M_B T.CI : $\overrightarrow{P_B} + \overrightarrow{T_B} = M_B\vec{a}$

Suivant O'Z' : $-M_B g + T_B = M_B a$

$\Rightarrow T_B = M_B g + M_B a \ (3) \quad Or \ T_A = T_B \ alors :$

$$M_A g - M_A a = M_B g + M_B a \ \Rightarrow a = \frac{(M_A - M_B)g}{M_A + M_B}$$

$$A.N : a = \frac{(0{,}539 - 0{,}441) \times 9{,}8}{0{,}539 + 0{,}441} = 0{,}98 m.s^{-2}$$

b)) – <u>Espace parcourue par chaque corps à t=3s</u>

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$, or à $t = 0$, $x_0 = 0 \ et \ v_0 = 0$

$$soit \ x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}98 \times 3^2 = 4{,}41m$$

<u>Vitesse atteinte par chaque corps à t=3s</u> :

$$v_A = v_B = v = at = 0{,}98 \times 3 = 2{,}94 m.s^{-1}$$

<u>Energie cinétique de chaque corps</u>

$E_C(A) = \frac{1}{2} M_A {v_A}^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}539 \times 2{,}94^2 = 2{,}33J$

$E_C(B) = \frac{1}{2} M_B {v_B}^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}441 \times 2{,}94^2 = 1{,}90J$

2. a)) <u>Nouvelles valeurs de M_A et M_B</u>

- Pour la masse M_A : T.CI : $\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{T_A} + \overrightarrow{R_1} += M_A\vec{a}$

Suivant x'x : $-M_A g \sin\alpha + T_A = M_A a \Rightarrow$

$T_A = M_A g \sin\alpha + M_A a \ (1)$

- Pour la masse M_B : *T.CI* : $\overrightarrow{P_B} + \overrightarrow{T_B} = M_B\vec{a}$

Suivant z'z : $M_B a - T_B = M_B a \Rightarrow T_B = M_B g - M_B a \ (2)$

$Or \ T_A = T_B \ alors : M_A g \sin\alpha + M_A a = M_B g - M_B a$

$or \ M_A + M_B = 0{,}980 \ , \Longrightarrow M_B = 0{,}980 - M_A$

$$\Longrightarrow M_A g \sin\alpha + M_A a = (0{,}98 - M_A)(g - a)$$

$$M_A = \frac{0{,}98(g - a)}{g(\sin\alpha + 1)} = \frac{0{,}98(9{,}8 - 0{,}98)}{9{,}8(\sin 30° + 1)} = 0{,}588kg$$

$$et \ M_B = 0{,}980 - M_A = 0{,}392kg$$

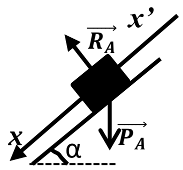
b)) <u>Energie mécanique du corps A à t=3s</u>

$$E = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2} M_A v^2 + M_A g x \sin\alpha = M_A\left(\frac{v^2}{2} + gx\sin\alpha\right)$$

$E = 0{,}588\left(\frac{2{,}94^2}{2} + 9{,}8 \times 4{,}41 \sin 30°\right) = 15{,}24J$

3. a)) Nature du mouvement prise par le corps A

Après la rupture la masse M_A est soumise à son poids $\overrightarrow{P_A}$ et à la réaction $\overrightarrow{R_A}$.



T.CI : $\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{R_A} += M_A\vec{a}$

Suivant x'x : $M_A g \sin\alpha = M_A a \Rightarrow$

$$a = g\sin\alpha = 9{,}8 \times 0{,}5 = 4{,}9 m.s^{-2}$$

Soit $a = 4{,}9 m.s^{-2} > 0$, alors on a un Mouvement R.U.A

b)) <u>Position et vitesse de A, 1,2s après la rupture</u>

<u>Loi horaire du mouvement</u>

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

à $t = 3s$, $v_0 = -2{,}94 m.s^{-1} \ et \ x_0 = 0$

$\begin{cases} x = 2{,}45t^2 - 2{,}94t \\ v = 4{,}5t - 2{,}94 \end{cases}$ $donc\ à\ t = 1{,}2s\ on\ a:$

$\begin{cases} x = 2{,}45 \times 1{,}2^2 - 2{,}94 \times 1{,}2 = 0 \\ v = 4{,}9 \times 1{,}2 - 2{,}94 = 2{,}94m.s^{-1} \end{cases}$

D'où à $t = 1{,}2s$ le corps A repasse à sa position de rupture dans le sens positif du mouvement.

Solution 4

a)) Durée totale du mouvement

Etude cinématique du mouvement

Phase2 : MRU : $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{36}{6} = 6m.s^{-1}$;

Phase1 : MRUA : $x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2$

On a : à t = 3s, $v_1 = a_1t = 6 \Rightarrow a_1 = \frac{6}{3} = 2m.s^{-2}$ et

$$x_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3^2 = 9m$$

Phase3 : MRUD : $D = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow x_3 = 15m$

R.I.T : $\Delta v^2 = -{v_1}^2 = 2a_3x_3$

$\Rightarrow a_3 = \frac{-{v_1}^2}{2x_3} = \frac{-36}{2\times15} = -1{,}2\mathrm{m.s^{-2}}$,

donc $\Delta v = a_3\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta v}{a_3} = \frac{-v_1}{a_3} = \frac{-6}{-1{,}2} = 5s$ et

$$T = 3 + 6 + 5 = 14s$$

D'où la durée total du mouvement est T = 14s

b)) Lois horaires du mouvement

Phase 1 : MRUA : $x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 = t^2\ et\ v_1 = a_1t = 2t$

Phase 2 : MRU : $v_2 = cste\ \ et\ x_2(t) = v_2(t - t_1) + x_1$

$et\ x_2(t) = 6(t - 3) + 9 = 6t - 9$

Phase 3 : MRUD : $x_3 = \frac{1}{2}a_3(t - t_2)^2 + v_2(t - t_2) + x_2$

$x_3 = \frac{1}{2} \times -1{,}2(t - 9)^2 + 6(t - 9) + 45$

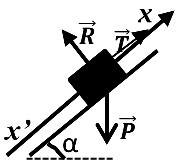
$\Longrightarrow x_3(t) = -0{,}6t^2 + 16{,}8t - 57{,}6$

$et\ v_3(t) = a_3(t - t_2) + v_2 = -1{,}2(t - 9) + 6$

$\Longrightarrow v_3(t) = -1{,}2t + 16{,}8$

c)) Intensité de la force d'attraction dans chaque phase

Le solide est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction $\vec{R}$ et à la force d'attraction $\vec{T}$



T.C.I : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$

Suivant x'x : $-mg\sin\alpha + T = ma$

Alors : $T = m(a + g\sin\alpha)$

- *Phase1 :* $T_1 = m(a_1 + g\sin\alpha)$

$A.N:\ T_1 = 980(2 + 9{,}8 \times 0{,}5) = 6{,}762 \times 10^3N$

- *Phase 2 : MRU, donc* $a_2 = 0$

$T_2 = mg\sin\alpha = 980 \times 9{,}8 \times 0{,}5 = 4{,}80 \times 10^3N$

Phase 3 : $T_3 = m(a_3 + g\sin\alpha)$;

$A.N:\ T_3 = 980(-1{,}2 + 9{,}8 \times 0{,}5) = 3{,}626 \times 10^3N$

d)) Puissance de la force d'attraction pendant la phase 2

$$P(\vec{T}) = T.V$$

Phase2 : $\mathcal{P}_2 = T_2.V = 4{,}80 \times 10^3 \times 62 = 2{,}88 \times 10^4W$

Car dans la phase 2, le mouvement est rectiligne uniforme.

Solution 5

a)) Valeur de v : Phase2 : MRU : $\mathrm{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20}{10} = 2\mathrm{m.s^{-1}}$

b)) Equations horaires du mouvement dans chaque phase

Phase 1 : MRUA : $x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2\ \ et\ \ v_1 = a_1t\ \ à\ t=3s,$

$$v_1 = a_1t = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3} = 0{,}67m.s^{-2}$$

$x_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 3^2 = 3m\ \ d'où : x_1 = 0{,}33t^2\ \ et\ \ v_1 = 0{,}67t$

Phase 2 *: MRU :* $v_2 = cste\ \ et\ x_2(t) = v_2(t - t_1) + x_1$

$\Longrightarrow\ x_2(t) = 2(t - 3) + 3\ soit\ \ x_2(t) = 2t - 3$

Phase 3 *: MRUD :* $x_3 = \frac{1}{2}a_3(t - t_2)^2 + v_2(t - t_2) + x_2$

$or\ \ \Delta v = a_3\Delta t \Rightarrow a_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-V}{\Delta t} = \frac{-2}{5} = -0{,}4m.s^{-2}$

$x_3 = \frac{1}{2} \times -0{,}4(t - 13)^2 + 2(t - 13) + 23$

$soit\ \ x_3(t) = -0{,}2t^2 + 7{,}2t - 36{,}8$

$et\ \ v_3(t) = a_3(t - t_2) + v_2 = -0{,}4(t - 13) + 2$

$soit\ \ v_3(t) = -0{,}4t + 7{,}2$

- Déduisons la hauteur H

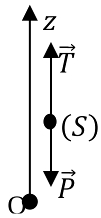
La durée totale du mouvement est $T = 3 + 10 + 5 = 18s$

A t = 18s, $H = x_3(18) = -0{,}2 \times 18^2 + 7{,}2 \times 18 - 36{,}8 = 28m$

c)) Norme de la tension T du câble

Le fardeau est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la force d'attraction $\vec{T}$

T.C.I : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ *, Suivant Oz:*



$-mg + T = ma \Longrightarrow T = m(a + g)$

- *Phase1 :* $T_1 = m(a_1 + g)$

$A.N:\ T_1 = 10^3(0{,}67 + 10) = 1{,}067 \times 10^4N$

- Phase 2 : MRU, donc

$a_2 = 0 \Longrightarrow T_2 = mg = 10^4N$

- Phase 3 *:* $T_3 = m(a_3 + g)$

$T_3 = 10^3(-0{,}4 + 10) = 9{,}6 \times 10^3N$

d)) Nature du mouvement de fardeau après la rupture du câble

Après la rupture du câble $T = 0$, donc $mg = ma$

donc $a = g$: c'est une chute libre sans vitesse initiale

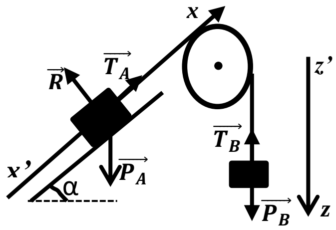
Temps mis par le fardeau pour toucher le sol

$z = \frac{1}{2}gt^2$, au sol

$$H = z = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 28}{10}} = 2{,}36s$$

Solution 6

1. Accélération du système



- Pour le solide S_A

T.C.I : $\vec{P_A} + \vec{T_A} + \vec{R} = m_A\vec{a}$ Suivant x'x :

$-m_A g\sin\alpha + T_A = m_A a \Rightarrow T_A = m_A g\sin\alpha + m_A a$ (1)

- Pour la masse m_B : *T.CI :* $\vec{P_B} + \vec{T_B} = m_B\vec{a}$

Suivant z'z : $m_B g - T_B = m_B a \Rightarrow T_B = m_B g - m_B a$ (2)

3ème loi de Newton : $T_A = T_B$ *alors :*

$$m_A g\sin\alpha + m_A a = m_B g - m_B a \Longrightarrow a = \frac{(m_B - m_A\sin\alpha)g}{m_A + m_B}$$

$$a = \frac{(0{,}3 - 0{,}4.0{,}5)}{0{,}4 + 0{,}3} \times 10 = 1{,}43m.s^{-2}$$

2. a)) Temps par A pour atteindre le point S

Le mouvement de S est U.A car $a = 1{,}43m.s^{-2} > 0$

$$x = \frac{1}{2}at^2 = OS \text{ soit } t_{OS} = \sqrt{\frac{2OS}{a}} = \sqrt{\frac{2.2}{1{,}43}} = 1{,}67s$$

b)) Vitesse de A en S

RIT : $v^2{}_S = 2aOS \Longrightarrow v_S = \sqrt{2aOS}$

$$v_S = \sqrt{2.1{,}43.2} = 2{,}39m.s^{-1}$$

c)) Nature des mouvement ultérieurs de A et B

Après la rupture du fil : $T_A = T_B = 0$

- Pour le solide A :

$m_A g\sin\alpha = m_A a' \Longrightarrow a' = g\sin\alpha > 0$: alors le mouvement de A après la rupture est uniformément accéléré.

- Pour le solide B :

$m_A g = m_A a'' \Longrightarrow a'' = g$: Chute libre sans vitesse initiale

3. a)) Vitesse de A juste avant le choc

Après la rupture $a = 10 \times 0{,}5 = 5ms^{-2}$

RIT : $v^2{}_1 = 2aL \Longrightarrow v_1 = \sqrt{2.5 \times 10} = 10m.s^{-1}$

b)) Vitesse de A et B juste après le choc

- Avant le choc : $\vec{P} = m_A\vec{v}_1 \Longrightarrow E_C = \frac{1}{2}m_A{v_1}^2$

- Après le choc :

$$\vec{P}' = m_A\vec{v}'_1 + m_C\vec{v}'_2 \Longrightarrow E'_C = \frac{1}{2}m_A{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_C{v'_2}^2$$

Conservation du vecteur quantité de mouvement :

$\vec{P} = \vec{P}' \Longrightarrow m_A\vec{v}_1 = m_A\vec{v}'_1 + m_C\vec{v}'_2$

Projection suivant $\vec{v}_1$: $m_A v_1 = m_A v'_1 + m_C v'_2$ (1)

Conservation de l'énergie cinétique :

$$E_C = E'_C \text{ soit } \frac{1}{2}m_A{v_1}^2 = \frac{1}{2}m_A{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_C{v'_2}^2$$

$$Soit\ \ m_A{v_1}^2 = m_A{v'_1}^2 + m_C{v'_2}^2 \ (2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m_A v_1 = m_A v'_1 + m_C v'_2 \ \ (1) \\ m_A{v_1}^2 = m_A{v'_1}^2 + m_C{v'_2}^2 (2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m_A(v_1 - v'_1) = m_C v'_2 \\ m_A({v_1}^2 - {v'_1}^2) = m_C{v'_2}^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m_A(v_1 - v'_1) = m_C v'_2 \ \ (1) \\ m_A(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_C{v'_2}^2 \ \ (2) \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Longrightarrow v_1 + v'_1 = v'_2 \ \ (3)$$

Dans (1) : $m_A v_1 = m_A v'_1 + m_C(v_1 + v'_1)$

$$soit\ \ (m_A - m_C)v_1 = (m_A + m_C)v'_1$$

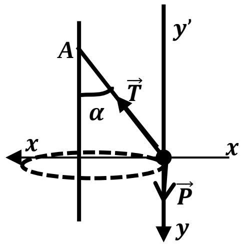
$$Alors\ \ v'_1 = \frac{(m_A - m_C)}{m_A + m_C}v_1 \ \ et\ \ v'_2 = \frac{2m_A}{m_A + m_C}v_1$$

$$A.N:\ \ v'_1 = \frac{(400 - 350)}{750} \times 10 \ \ et\ \ v'_2 = \frac{2.400}{750} \times 10$$

$$v'_1 = 0{,}67m.s^{-1} \ \ et\ \ v'_2 = 10{,}7m.s^{-1}$$

Solution 07

1. Valeur de l'angle α



Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil

T.C.I : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$,

suivant x'x : $Tsin\alpha = ma_n = mr\omega^2$

avec $r = lsin\alpha$, alors :

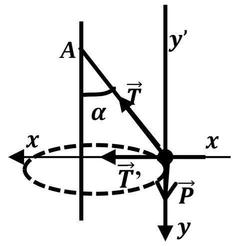
$$T = ml\omega^2 \ \ (1)$$

Suivant y'y : $Tcos\alpha - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha}$ *(2)*

$(1) = (2), alors : ml\omega^2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}$

$$\cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2} = \frac{10}{3 \times 12^2} = 0{,}023 \Rightarrow \alpha = 88{,}67°$$

2. Expression de la tension BC



T.C.I : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{T'} = m\vec{a}$

suivant x'x : $Tsin\alpha_0 + T = mr\omega^2$

$avec\ \ r = lsin\alpha_0$

$$T = ml\omega^2 - \frac{T'}{\sin\alpha_0} \ \ (1)$$

Suivant y'y : $Tcos\alpha_0 - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha_0}$ *(2)*

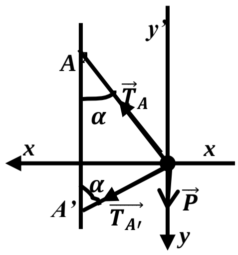
$$or\ (1) = (2) alors\ ml\omega^2 - \frac{T'}{\sin\alpha_0} = \frac{mg}{\cos\alpha_0}$$

$$\Rightarrow T' = m(l\omega^2\sin\alpha_0 - g\tan\alpha_0)$$

$$A.N:\ T_{BC} = T' = 0{,}1(3 \times 12^2 \times 0{,}5 - 10\tan 30°) = 21N$$

3. a)) Valeur de la tension BA et BA'

Le solide S est soumis à son poids $\vec{P}$ et aux tensions $\vec{T_{A'}}$ et $\vec{T_A}$.



T.C.I : $\vec{P}+\vec{T_A}+\vec{T_{A'}}=m\vec{a}$, suivant x'x :

$$T_A sin\alpha + T_{A'} sin\alpha = mr\omega^2$$

alors :$r = l\sin\alpha \Longrightarrow T_A + T_{A'} = ml\omega^2 (1)$

Suivant y'y : $T_A cos\alpha - T_{A'} cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow$

$$T_A - T_{A'} = \frac{mg}{\cos\alpha} \ (2) \ : \ (1)+(2) \ donne:$$

$$T_A = \frac{m}{2}\left(l\omega^2 + \frac{g}{\cos\alpha}\right) \ et \ T_{A'} = \frac{m}{2}\left(l\omega^2 - \frac{g}{\cos\alpha}\right)$$

$$Or \ \cos\alpha = \frac{AA'}{2AB} = \frac{60}{600} = 0{,}1$$

$A.N$: $T_A = \frac{0{,}1}{2}\left(3\times 12^2 + \frac{10}{0{,}1}\right) = 26{,}6N$ et

$$T_{A'} = \frac{0{,}1}{2}\left(3\times 12^2 - \frac{10}{0{,}1}\right) = 16{,}6N$$

b)) Valeur minimale de ω pour que le fil BA' soit tendu

Le fil BA' soit tendu si et seulement si

$$T_{A'} = \frac{m}{2}\left(l\omega^2 - \frac{g}{\cos\alpha}\right) \geq 0$$

$$donc : \ l\omega^2 - \frac{g}{\cos\alpha} \geq 0 \Rightarrow \omega^2 \geq \frac{g}{l\cos\alpha} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

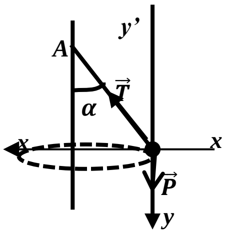
La vitesse minimale ω_0 est : $\omega_0 = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1{,}82 rad.s^{-1}$

Solution 08

1- a)) Vitesse angulaire de la tige

Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}$

et à la tension $\vec{T}$ du fil



T.C.I : $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$, suivant x'x :

$T sin\alpha = ma_n = mr{\omega_0}^2$ *avec*

$r = l sin\alpha$, alors : $T = ml{\omega_0}^2$ (1)

Suivant y'y :

$T cos\alpha - mg = 0 \Longrightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha}$ (2)

$$(1) = (2) \Longrightarrow ml{\omega_0}^2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}} \Longrightarrow$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}4\cos 60°}} = 7 rad.s^{-1}$$

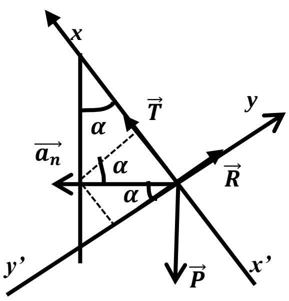
b)) Valeur de la tension T du fil

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0{,}4\times 9{,}8}{\cos 60°} = 7{,}84N$$

2. Intensité de la réaction R et de la tension T du fil

Le solide est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction $\vec{R}$

et à la tension $\vec{T}$ du fil.



T.C.I : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\vec{a}_n$

Dans le plan(x'x, y'y) :

$$\vec{a_n}\begin{cases}a_{nx} = a_n \sin\alpha \\ a_{ny} = a_n\cos\alpha\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}T - mg\cos\alpha = ma_n \sin\alpha \\ R - mg\sin\alpha = -ma_n\cos\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}T = m(g\cos\alpha + (2\pi N)^2 l sin^2\alpha) \\ R = m(g - (2\pi N)^2 l\cos\alpha)\sin\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}T = 0{,}4(9{,}8cos60° + (2\pi)^2\times 0{,}4 sin^2 60°) = 6{,}76N \\ R = 0{,}4(9{,}8 - (2\pi)^2\times 0{,}4\cos 60°)\sin 60° = 0{,}62N\end{cases}$$

Solutions sur la Dynamique de Rotation

Solution 1

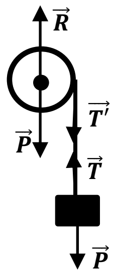


figure1

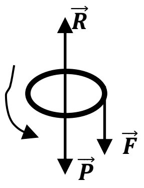


figure 2

1. a)) Acièration du système

- Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.

T.C.I : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Suivant OZ : $mg - T = ma \Rightarrow T = mg - ma$ (1)

- Le cylindre est soumis à son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ et à la tension $\vec{T'}$du fil. (voir figure 1)

R.F.D (en rotation) :

$\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_\Delta\ddot{\theta} \Longrightarrow M(\vec{P}) + M(\vec{R}) + M(\vec{T'}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$Or\ M(\vec{P}) + M(\vec{R}) = 0 \Longrightarrow M(\vec{T'}) = J_\Delta\ddot{\theta} \Longrightarrow$

$T'r = J_\Delta\ddot{\theta} = \frac{1}{2}Mr^2 \times \frac{a}{r} \Rightarrow T' = \frac{M\,a}{2}$ (2)

(1) = (2) alors $a = \frac{mg}{m+\frac{M}{2}}$; A.N : $a = \frac{10\times10}{10+\frac{20}{2}} = 5m.s^{-2}$

b)) Vitesse de (S) après 3m de chute.

R.I.T : $v^2 - {v_0}^2 = 2ad$ or à t=0, $v_0 = 0 \Longrightarrow v = \sqrt{2ad}$

A.N : $a = \sqrt{2\times5\times3} = 5{,}47m.s^{-1}$

c)) Détermination des lois horaires du mouvement

- Pour le solide : MUA , alors $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$,

or à t=0, $x_0 = 0$ et $v_0 = 0$ alors $x(t) = \frac{1}{2}at^2 = 2{,}25t^2$ et

$v(t) = \dot{x}(t) = at + v_0 = at = 5t.$

- Pour le cylindre : $a = r\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{a}{r} = \frac{5}{0{,}1} = 50rad.s^{-2}$

$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \omega_0t + \theta_0$, or à t=0, $\theta_0 = 0$ et $\omega_0 = 0$ alors

$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 = 25t^2$ et $\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}t + \omega_0 = \ddot{\theta}t = 50t$

d)) Nombre de tours effectués par le cylindre après 3m de chute

R.I.T : $\omega^2 - {\omega_0}^2 = 2\ddot{\theta}\Delta\theta = 2\ddot{\theta}\times2\pi n \Rightarrow \omega^2 = 4\ddot{\theta}\pi n \Longrightarrow$

$$n = \frac{\omega^2}{4\pi\ddot{\theta}} \quad avec\ v = r\omega \Longrightarrow \omega = \frac{v}{r} \Longrightarrow n = \frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2}{4\pi\ddot{\theta}}$$

$$A.N: n = \frac{\left(\frac{5{,}47}{0{,}1}\right)^2}{4\pi\times50} = 4{,}77tours$$

- Durée de la première phase : On a :

$$x(t) = 2{,}25t^2 = 3 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2{,}25}{3}} = 0{,}866s$$

2. a)) Calcul de moment du couple de freinage

Après la rupture de la corde le cylindre est soumis à son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ et à la force de frottement $\vec{F}$ (voir figure 2).

$T.E.C : E_{C_2} - E_{C_1} = \sum W(\overrightarrow{F_{ext}}) = \left(M(\vec{P}) + M(\vec{R}) + M_c\right)\theta$

$Or\ M(\vec{P}) + M(\vec{R}) = 0\ et\ E_{C_2} = 0$

$$\Longrightarrow -E_{C_1} = M_C.\theta = M_C.2\pi n$$

$\Longrightarrow -E_{C_1} = -\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = M_C.2\pi n \Longrightarrow M_C = -\frac{J_\Delta\omega^2}{2\pi n}$

$A.N : J_\Delta = \frac{1}{2}Mr^2 = \frac{1}{2}\times20\times(0{,}1)^2 = 0{,}1kg.m^2,$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{5{,}47}{0{,}1} = 54{,}7rad.s^{-1}$$

$$M_C = -\frac{0{,}1\times(54{,}7)^2}{2\pi\times100} = -0{,}476N.m$$

b)) Valeur de la décélération angulaire

R.F.D (en rotation) :

$$M_C = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{M_C}{J_\Delta} = -\frac{0{,}476}{0{,}1} = -4{,}76rad.s^{-2}$$

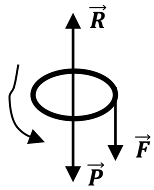
- Durée de la phase de freinage

$$\Delta\omega = \ddot{\theta}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\omega}{\ddot{\theta}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\ddot{\theta}} = \frac{-\omega_1}{\ddot{\theta}} = -\frac{54{,}7}{4{,}76} = 11{,}5s$$

Solution 2

1. Démontrons que le mouvement du disque est C.U.D

Le disque est soumis est à son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ et à la force de frottement $\vec{F}$.



R.F.D (en rotation) $:\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$\Longrightarrow M(\vec{P}) + M(\vec{R}) + M(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$Or\ M(\vec{P}) + M(\vec{R}) = 0 \Rightarrow M(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} \Longrightarrow = \frac{M(\vec{F})}{J_\Delta}$ or $(\vec{F}) < 0 \Rightarrow \ddot{\theta} < 0$, d'où le mouvement du disque est circulaire uniformément décéléré.

- Calcul de $\ddot{\theta}$et $M(\vec{F}) = M$

$$\Delta\omega = \ddot{\theta}\Delta t \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{-\omega_1}{\Delta t} = -\frac{2\pi f}{\Delta t}$$

$$\Longrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{2\pi\times2400}{60\times4\times60} = -1{,}047rad.s^{-2}$$

R.F.D : $M = J_\Delta\ddot{\theta}$ avec

$$J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\times0{,}1\times(0{,}1)^2 \Rightarrow J_\Delta = 5.10^{-4}kg.m^2$$

A.N: $M = 5.10^{-4}\times(-1{,}047) = -5{,}235.10^{-4}N.m$

2. Expression de $\theta(t)$

Comme le mouvement est C.U.D, alors :

$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \omega_0t + \theta_0$, or à t=0,

$$\theta_0 = 0\ et\ \omega_0 = 2\pi f \Rightarrow \omega_0 = 2\pi\frac{2400}{60} = 2{,}51.10^2rad.s^{-1}$$

$\Longrightarrow \theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + 2\pi ft$

- Nombre de tours effectués par le disque pendant la durée t_f.

On a : $\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + 2\pi ft$, or $= 2\pi n$, donc à $t = t_f$, on a :

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \times (-1{,}047) \times (4 \times 60)^2 + 2{,}51.10^2 \times 4 \times 60$$

$$\theta(t) = 3.10^4 rad = 2\pi n \Rightarrow n = \frac{3.10^4}{2\pi} = 4{,}77.10^3 tours$$

3. Utilisation du T.E.C pour démontrer que le mvt est C.U.D

T.E.C : $\Delta E_C = E_{C_2} - E_{C_1} = \sum W(\overrightarrow{F_{ext}}) = M\,\theta$, or $E_{C_2} = 0$

$$\Longrightarrow -E_{C_1} = M\theta \Rightarrow M = -\frac{E_{C_1}}{\theta} < 0 \text{, car } E_{C_1} > 0 \Rightarrow \omega_1 > \omega_2 = 0$$

D'où le mouvement du disque est C.U.D

- Retrouvons d'une autre façon n

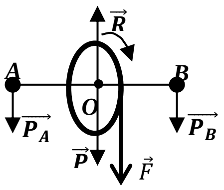
$$-E_{C_1} = -\frac{1}{2} J_\Delta \omega_1^{\,2} = M\theta = M.2\pi n \quad \Rightarrow n = -\frac{J_\Delta \omega_1^{\,2}}{4\pi M}$$

A. N : $n = -\dfrac{5.10^{-4} \times (2{,}51.10^2)^2}{4\pi \times (-5{,}235.10^{-4})} = 4{,}78.10^3$ tours

Solution 3

1. a)) Démontrons que le système va prendre un M.C.U.A

Le disque est soumis est à son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$, à la force $\vec{F}$ et aux poids $\overrightarrow{P_A}$ et $\overrightarrow{P_B}$.



R.F.D (en rotation) : $\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$\Longrightarrow M(\vec{P}) + M(\vec{R}) + M(\overrightarrow{P_A}) + M(\overrightarrow{P_B}) + M(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$Or\ M(\vec{P}) + M(\vec{R}) = 0 \ \ et\ M(\overrightarrow{P_A}) + M(\overrightarrow{P_B}) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad M(\vec{F}) = F.R = J_\Delta \ddot{\theta} \ \Rightarrow \ \ddot{\theta} = \frac{F.R}{J_\Delta} > 0$$

D'où : le système (disque + masselottes) va prendre un mouvement C.U.A.

- Calcul de $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{F.R}{J_\Delta} \quad or\ J_\Delta = J_0 + J_{tige} + 2ml^2$$

$$\Longrightarrow \ J_\Delta = \tfrac{1}{2} MR^2 + \tfrac{1}{12} M'L^2 + 2ml^2$$

$$J_\Delta = \tfrac{1}{2} \times 2 \times 0{,}1^2 + \tfrac{1}{12} \times 2{,}6 + 2 \times 0{,}5 \times 0{,}5^2 = \ 0{,}48 kg.m^2$$

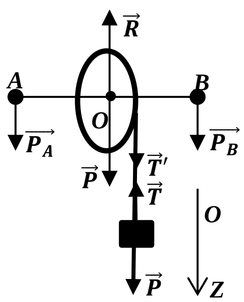
$$donc \ \ \ddot{\theta} = \frac{9 \times 0{,}1}{0{,}48} = 1{,}875 rad.s^{-2}$$

b)) Lois horaires du mouvement $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$

$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \omega_0 t + \theta_0$, *or à t=0,* $\theta_0 = 0$ *et* $\omega_0 = 0$ *alors*

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 = 0{,}94t^2 \ et\ \dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}t + \omega_0 = \ddot{\theta}t = 1{,}87t$$

2. a)) Détermination de la masse m'



- Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.

T.C.I : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m'\vec{a} \ \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m'\vec{a}$

Suivant OZ : $m'g - T = m'a \Rightarrow T = m'g - m'a$ (1)

- Pour le système (disque +masselottes) :

R.F.D : $M(\overrightarrow{T'}) = T'.R = J_\Delta \ddot{\theta} \Longrightarrow T' = \frac{J_\Delta \ddot{\theta}}{R}$ (2)

$$(1) = (2) \Longrightarrow \ \ m'(g-a) = \frac{J_\Delta \ddot{\theta}}{R} \Rightarrow m' = \frac{J_\Delta \ddot{\theta}}{(g-a)R}$$

$A.N : a = R\ddot{\theta} = 0{,}1 \times 1{,}87 = 0{,}187 m.s^{-2}$ et

$$m' = \frac{0{,}48 \times 1{,}87}{(10 - 0{,}187) \times 0{,}1} = 0{,}91 kg$$

b)) Détermination de la durée t après 2m de chute

Pour le solide : MUA , alors $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$, or à t=0,

$$x_0 = 0 \text{ et } v_0 = 0 \Longrightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 = 0{,}187t^2 = d = 2$$

$$\Longrightarrow t = \sqrt{\frac{0{,}187}{2}} = 0{,}3s$$

c)) Calcul de la vitesse angulaire ω et le nombre de tours n

$v = R\omega \Rightarrow \ \omega = \frac{v}{R}$, or $\Delta v^2 = v^2 = 2ad \ \Longrightarrow v = \sqrt{2ad}$

$$v = \sqrt{2 \times 0{,}187 \times 2} = 0{,}86 m.s^{-1} \Longrightarrow \omega = \frac{0{,}86}{0{,}1} = 8{,}6 rad.s^{-1}$$

$$R.I.T : \Delta\omega^2 = \omega^2 = 2\ddot{\theta}\Delta\theta = 2\ddot{\theta}\theta = 2\ddot{\theta}.2\pi n \Rightarrow n = \frac{\omega^2}{4\pi\ddot{\theta}}$$

$$A.N : n = \frac{8{,}6^2}{4\pi \times 1{,}87} = 3{,}14 tours$$

3. a))Détermination du moment du couple M_C

- Détermination de la nouvelle accélération prise par le système

$$On\ a : \ m''(g-a) = \frac{J_\Delta \ddot{\theta}}{R} = \frac{J_\Delta a}{R^2} \ \Rightarrow a = \frac{m''g}{m'' + \frac{J_\Delta}{R^2}}$$

$$A.N : a = \frac{1{,}2 \times 10}{1{,}2 + \frac{0{,}48}{0{,}1^2}} = 0{,}24 m.s^{-2} \ \ et\ \ddot{\theta} = \frac{a}{R} = \frac{0{,}24}{0{,}1} = 2{,}4 rad.s^{-2}$$

- Le système est soumis à une force de frottement de moment M_C

R.F.D : $M(\overrightarrow{T'}) + M_C = J_\Delta \ddot{\theta} \ \Longrightarrow T'R + M_C = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$\Longrightarrow T' = \frac{J_\Delta \ddot{\theta} - M_C}{R} \ (2')$$

- Pour le solide : TCI : $T = m''(g-a)$ (1')

$(1') = (2') \Rightarrow m''(g-a) = \frac{J_\Delta \ddot{\theta} - M_C}{R}$

$$\Longrightarrow M_C = J_\Delta \ddot{\theta} - Rm''(g-a)$$

A.N : $M_C = 0{,}48 \times 2{,}4 - 0{,}1 \times 1{,}2(10 - 0{,}24) = -1{,}92 \text{N.m}$

b)) Valeur de la tension T du fil :

$$T = m''(g-a) = 1{,}2(10 - 0{,}24) = 11{,}712 N$$

- Détermination de θ(t)

On a : $\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \omega_0 t + \theta_0$,

or à $t_0 = t = 0{,}3s$, $\omega_0 = 8{,}6 rad.s^{-1}$ *et*

$$\theta_0 = 2\pi n = 2\pi \times 3{,}14 = 19{,}73 rad$$

$\Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{2} \times 2{,}4t^2 + 8{,}6t + 19{,}73$

soit $\theta(t) = 1{,}2t^2 + 8{,}6t + 19{,}73$

Solution 4

1. a)) Montrons que :$OG = a = \frac{4}{3}R$.

On a : $(M+m)\overrightarrow{OG} = M\overrightarrow{OO'} + m\overrightarrow{OB} \Rightarrow$

$$\left(M + \frac{M}{2}\right)\overrightarrow{OG} = M\overrightarrow{OO'} + \frac{M}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}M.OG = MR + \frac{M \times 2R}{2} \quad \Rightarrow OG = \frac{4}{3}R$$

b)) Montrons que est $J_\Delta = 7mR^2$

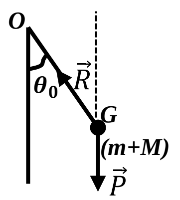
$J_\Delta = J + mOB^2$, *avec* $J = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

$\Rightarrow J_\Delta = \frac{3}{2}MR^2 + m.(2R)^2 = \frac{3}{2} \times 2mR^2 + 4mR^2 = 7mR^2$

2. a)) Équation différentielle du mouvement de S

Le système S de masse (m+M) est soumis

à son poids $\vec{P} = 3m\vec{g}$ et à la réaction $\vec{R}$



R.F.D (en rotation) :

$$\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$\Rightarrow M(\vec{P}) + M(\vec{R}) = J_\Delta\ddot{\theta}$ or $M(\vec{R}) = 0$

$\Rightarrow -3mg \sin\theta\, OG = J_\Delta\ddot{\theta} = 7mR^2\ddot{\theta}$

Pour des oscillation de faible amplitude,

$\sin\theta \sim \theta \Rightarrow \; -3mg\theta OG = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3mg}{J_\Delta}OG\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{3mg}{7mR^2} \times \frac{4}{3}R\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{4g}{7R}\theta = 0$, posons $\omega_0{}^2 = \frac{4g}{7R}$

D'où : $\ddot{\theta} + \omega_0{}^2\theta = 0$, c'est une équation différentielle du second ordre à coefficient constant, caractérise un mouvement de rotation sinusoïdale d'équation

$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Or à t = 0 , $\theta_0 = \theta_m = \theta_m \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

$\theta(t) = \theta_0 \cos\omega_0 t$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{4g}{7R}} = \sqrt{\frac{4\times10}{7\times0{,}2}} = 5{,}34 rad.s^{-1}$

$$\theta_0 = \pi/6 = 0{,}52 rad \Longrightarrow \theta(t) = 0{,}52\cos(5{,}34t)$$

b)) Longueur l du pendule simple synchrone de ce pendule

- La période du pendule composé est : $T_C = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{7R}{4g}}$

- La période du pendule simple est : $T_S = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$T_C = T_S \;\Leftrightarrow\; l = \frac{7}{4}R = 35cm.$

c)) Calcul de la vitesse v à l'équilibre du système

T.E.C : $\Delta E_C = E_{C_2} - E_{C_1} = \sum W(\overrightarrow{F_{ext}})$

$\Rightarrow \frac{1}{2}J_\Delta\omega_2{}^2 - \frac{1}{2}J_\Delta\omega_1{}^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$, *or* $W(\vec{R}) = 0$

$\frac{1}{2}J_\Delta(\omega_2{}^2 - \omega_1{}^2) = W(\vec{P}) = 3mgOG(1 - \cos\theta_0)$

$\Rightarrow \frac{7}{2}mR^2(\omega_2{}^2 - \omega_1{}^2) = 3mg.\frac{4}{3}R(1 - \cos\theta_0$

$\Rightarrow \omega_2 = \frac{v}{R} = \sqrt{\omega_1{}^2 + \frac{8}{7R}g(1 - \cos\theta_0)}$

$\Rightarrow v = R\sqrt{\omega_1{}^2 + \frac{8}{7R}g(1 - \cos\theta_0)}$

A.N : $v = 0{,}2\sqrt{20^2 + \frac{8}{7\times0{,}2} \times 10\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right)} = 4{,}038 m.s^{-1}$

3. a)) Calcul du moment du couple de freinage M_f

- Décélération angulaire :

R.I.T : $\omega^2 - \omega_0{}^2 = 2\ddot{\theta}\Delta\theta = 2\ddot{\theta} \times 2\pi n \Rightarrow -\omega_0{}^2 = 4\ddot{\theta}\pi n$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{(2\pi N)^2}{4\pi n} = -\frac{\left(2\pi \times \frac{300}{60}\right)^2}{4\pi \times 250} = -0{,}2\pi rad.s^{-2}$$

R.F.D(en rotation) :

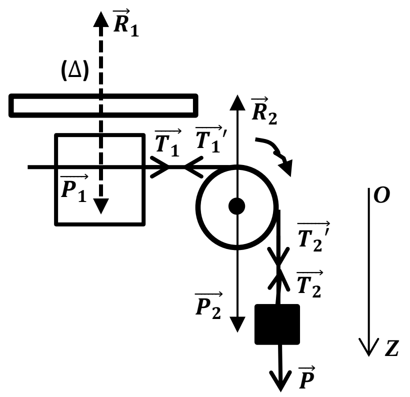
$$M_f = J_\Delta\ddot{\theta} = \frac{1}{2}MR^2.\ddot{\theta} \;\Rightarrow\; M_f = \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times 0{,}2^2(-0{,}2\pi)$$

$M_f = -6{,}28.10^{-3} N.m$

b)) Durée de freinage :

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}t + \omega_0 = 0 \Rightarrow t = -\frac{\omega_0}{\ddot{\theta}} = \frac{-10\pi}{-0{,}2\pi} = 50s$$

Solution 5



1. a)) Moment d'inertie de la tige par rapport à (Δ).

$J_1 = \frac{1}{12}M_1L^2 = \frac{1}{12} \times 0{,}096 \times 0{,}5^2 = 2.10^{-3} kg.m^2$

b)) Moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe

$J_2 = M_2R_2{}^2 = 0{,}050 \times 0{,}1^2 = 5.10^{-4} kg.m^2$

2. a)) Démontrons que $a = 0{,}7ms^{-2}$

- Pour le corps de m. *T.C.I :* $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{P} + \vec{T}_2 = m\vec{a}$,

Suivant OZ *:* $mg - T_2 = ma \;\Rightarrow\; T_2 = mg - ma$

- Pour la poulie de masse M_2

R.F.D (en rotation) *:* $\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_2\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow M(\vec{P_2}) + M(\vec{R_2}) + M(\vec{T_1'}) + M(\vec{T_2'}) = J_2\ddot{\theta}$$

$$Or\; M(\vec{P_2}) + M(\vec{R_2}) = 0 \Longrightarrow T_2'R_2 - T_1'R_1 = J_2\ddot{\theta}$$

$$Or\; T_2 = T_2' \;et\; \ddot{\theta} = \frac{a}{R_2} \Rightarrow \;(mg - ma)R_2 - T_1'R_2 = J_2\frac{a}{R_2}$$

$$\Rightarrow -T_1 = a\left(J_2\frac{1}{R_2{}^2} + m\right) - mg \;(1)$$

- Pour le tambour

R.F.D (en rotation) : $\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_2\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow M(\overrightarrow{P_1}) + M(\overrightarrow{R_1}) + M(\overrightarrow{T_1}) = J_1\ddot{\theta} \quad Or\ M(\overrightarrow{P_1}) + M(\vec{R}_1) = 0$$

$$\Rightarrow T_1R_1 = J_1\ddot{\theta} = J_1\frac{a}{R_1} \Rightarrow T_1 = J_1\frac{a}{R^2{}_1} \quad (2)$$

$$Or\ \ T_1 = T_1' \quad \Rightarrow -a\left(\frac{J_2}{{R_2}^2} + m\right) + mg = \frac{aJ_1}{R^2{}_1}$$

$$\Rightarrow a = \frac{mg}{\frac{J_1}{R^2{}_1} + \frac{J_2}{{R_2}^2} + m}$$

$$A.N:\ a = \frac{0{,}064 \times 10}{\frac{2.10^{-3}}{0{,}05^2} + \frac{5.10^{-4}}{0{,}1^2} + 0{,}064} = 0{,}7m.s^{-2}$$

b)) Accélération de la tige $\ddot{\theta}_1 = \frac{a}{R_1} = \frac{0{,}7}{0{,}05} = 14rad.s^{-2}$

3. a)) Distance parcourue par la masse

$$R.I.T: \Delta v^2 = v^2 = 2ad \ \Rightarrow \ d = \frac{v^2}{2a} = \frac{4}{2 \times 0{,}7} = 2{,}86m$$

.- Vitesse angulaire de de la tige $\dot{\theta}_1 = \frac{v}{R_1} = \frac{2}{0{,}05} = 40rad.s^{-1}$

b)) Détermination du nombre de tours n

$$R.I.T \ \ \Delta\omega^2 = {\dot{\theta}_1}^2 = 2\ddot{\theta}_1\Delta\theta = 2\ddot{\theta}_1\theta = 2\ddot{\theta}_1.2\pi n$$

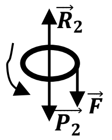
$$\Rightarrow n = \frac{{\dot{\theta}_1}^2}{4\pi\ddot{\theta}_1} \Rightarrow n = \frac{40^2}{4\pi \times 14} = 9{,}094tours$$

- Détermination de l'instant t :

$$\dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_1 t \Rightarrow t = \frac{\dot{\theta}_1}{\ddot{\theta}_1} = \frac{40}{14} = 2{,}8s$$

4. a)) Montrons que le mouvement est C.U.D

Après la rupture, la poulie est soumise à son poids $\overrightarrow{P_2}$, à la réaction $\overrightarrow{R_2}$ et à la force de frottement $\vec{F}$.



R.F.D (en rotation) :$\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_2\ddot{\theta}$

$$M(\vec{P}_2) + M(\vec{R}_2) + M(\vec{F}) = J_2\ddot{\theta} \ \ Or\ M(\vec{P}_2) + M(\vec{R}_2) = 0$$

$$M(\vec{F}) = J_2\ddot{\theta} \ \Rightarrow \ \ddot{\theta} = \frac{M(\vec{F})}{J_2} \ \ or\ M(\vec{F}) < 0 \ \Rightarrow \ddot{\theta} < 0,$$

d'où le mouvement de la poulie est C. U. D

- Valeur de la décélération angulaire

$M(\vec{F}) = -FR_2 = -21 \times 0{,}05 = -1{,}05N.m$ et

$$\ddot{\theta} = \frac{M(\vec{F})}{J_2} = -\frac{1{,}05}{5.10^{-4}} = -210rad.s^{-2}$$

- Nombre de tours n effectués

$$R.I.T: \Delta\omega^2 = -{\omega_1}^2 = 2\ddot{\theta}\Delta\theta = 2\ddot{\theta}\theta = 2\ddot{\theta}.2\pi n$$

$$\Rightarrow n = -\frac{{\omega_1}^2}{4\pi\ddot{\theta}} = -\frac{40^2}{4\pi(-210)} = 0{,}6tours$$

b)) Durée de freinage :

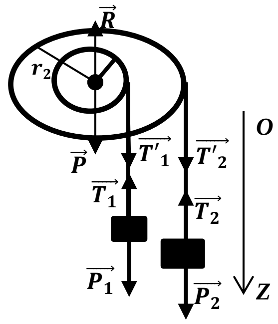
$$\dot{\theta}_2 = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-\dot{\theta}_1}{\ddot{\theta}} = \frac{-40}{-210} = 0{,}19s$$

- Angle balayé par la poule :

$$\Delta\theta = 2\pi n = 2\pi \times 0{,}6 = 3{,}77rad$$

Solution 6

1. a)) Calcul de l'accélération angulaire de la poulie



- Pour la poulie de moment d'inertie J_0=4,5.$10^{-2}kg.m^{-2}$

R.F.D (en rotation) : $\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_0\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow M(\overrightarrow{T'_1}) + M(\overrightarrow{T'_2}) + M(\vec{P}) + M(\vec{R}) = J_0\ddot{\theta}$$

$$Or\ M(\vec{P}) + M(\vec{R}) = 0 \Rightarrow T'_1r_1 + T'_2r_2 = J_0\ddot{\theta}\ (1)$$

- Pour la masse m_1

T.CI : $\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{T_1} = m_1\overrightarrow{a_1}$

Suivant OZ : $m_1g - T_1 = m_1a_1 = m_1\ddot{\theta}r_1$

$\Rightarrow T_1 = m_1g - m_1\ddot{\theta}r_1 \ \ (2)$

- Pour la masse m_2

T.CI : $\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_2} = m_2\overrightarrow{a_2}$, *Suivant OZ :*

$$m_2g - T_2 = m_2a_2 = m_2\ddot{\theta}\, r_2 \Rightarrow T_2 = m_2g - m_2\ddot{\theta}r_2\ (3)$$

$or\ \ T_1 = T'_1 \ \ et \ \ T_2 = T'_2$

$$\Rightarrow (m_1g - m_1\ddot{\theta}r_1)r_1 + (m_2g - m_2\ddot{\theta}r_2)r_2 = J_0\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{(m_1r_1 + m_2r_2)g}{m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2 + J_0}$$

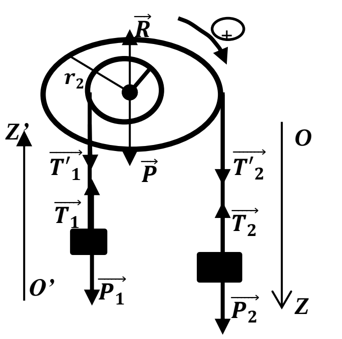
$$A.N: \ddot{\theta} = \frac{(0{,}15 \times 0{,}1 + 0{,}2^2) \times 10}{0{,}15 \times 0{,}1^2 + 0{,}2^3 + 45 \times 10^{-3}} = 10{,}09rad.s^{-2}$$

b)) Calcul des tensions T_1 et T_2

$$T_1 = m_1(g - \ddot{\theta}r_1) = 0{,}15(10 - 10{,}09 \times 0{,}1) = 1{,}35N$$

$$T_2 = m_2(g - \ddot{\theta}r_2) = 0{,}2(10 - 10{,}09 \times 0{,}2) = 1{,}6N$$

2. a)) Valeur de la nouvelle accélération angulaire de la poulie



La poulie va tourner suivant le mouvement de chute de la masse m_1(voir la figure)

D'après l'étude précédente, on a

Pour la poulie R.F.D (en rotation) : $-T'_1r_1 + T'_2r_2 = J_0\ddot{\theta}\ (1)$

Pour la masse m_1 : *T.CI :* $\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{T_1}=m_1\overrightarrow{a_1}$, *Suivant O'Z' :*

$-m_1g+T_1=m_1a_1=m_1r_1\ddot{\theta}g$

$$T_1=m_1g+m_1\ddot{\theta}r_1\ \ (2)$$

Pour la masse m_2 : *T.CI :* $\overrightarrow{P_2}+\overrightarrow{T_2}=m_2\overrightarrow{a_2}$, *Suivant OZ :* $m_2g-T_2=m_2a_2=m_2\ddot{\theta}\,r_2\Longrightarrow T_2=m_2g-m_2\ddot{\theta}r_2$ (3)

Or $T_1=T'_1$ *et* $T_2=T'_2$

$\Longrightarrow -(m_1g+m_1\ddot{\theta}r_1)r_1+(m_2g-m_2\ddot{\theta}r_2)r_2=J_0\ddot{\theta}$

$$\Longrightarrow \ddot{\theta}=\frac{(-m_1r_1+m_2r_2)g}{m_1{r_1}^2+m_2{r_2}^2+J_0}$$

$$A.N:\ddot{\theta}=\frac{(-0{,}15\times 0{,}1+0{,}2^2)\times 10}{0{,}15\times 0{,}1^2+0{,}2^3+45\times 10^{-3}}=4{,}58rad.s^{-2}$$

b)) Vitesse angulaire de la poulie et vitesse linéaire de m_1

$\ddot{\theta}=\frac{a_1}{r_1}=\frac{a_2}{r_2}\Rightarrow\ a_1=\ddot{\theta}r_1=4{,}58\times 0{,}1=0{,}458m.s^{-2}$

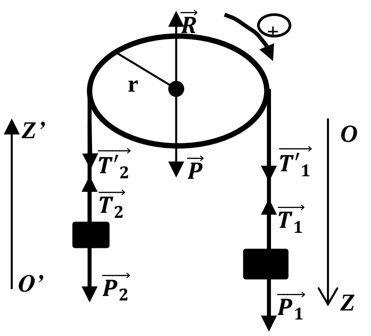
R.I.T : $v_1{}^2=2a_1d\ \Rightarrow v_1=\sqrt{2a_1d}=\sqrt{2\times 0{,}458\times 2}$

Soit $v_1=1{,}35m.s^{-1}$ et

$$\dot{\theta}=\frac{v_1}{r_1}=\frac{v_2}{r_2}\Rightarrow\ \dot{\theta}=\frac{v_1}{r_1}=\frac{1{,}35}{0{,}1}=13{,}5rad.s^{-1}$$

Solution 7

I.1. a)) Accélération du système



- Pour la poulie *:*

R.F.D (en rotation) *:* $\sum M(\overrightarrow{F_{ext}})=J\ddot{\theta}$

$$\Longrightarrow M(\overrightarrow{T'_1})+M(\overrightarrow{T'_2})+M(\vec{P})+M(\vec{R})=J\ddot{\theta}$$

Or $M(\vec{P})+M(\vec{R})=0\ \Longrightarrow T'_1r-T'_2r=J\ddot{\theta}=J\frac{a}{r}$

$$T'_1-T'_2=J\frac{a}{r^2}\ \ ,or\ \ J=mr^2\Rightarrow T'_1-T'_2=m\ \ (1)$$

- Pour la masse m_1 : *T.CI :* $\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{T_1}=m_1\vec{a}$

Suivant OZ : $m_1g-T_1=m_1a\Rightarrow T_1=m_1g-m_1a$ (2)

- Pour la masse m_2

T.CI : $\overrightarrow{P_2}+\overrightarrow{T_2}=m_2\vec{a}$, *Suivant O'Z' :*

$$-m_2g+T_2=m_2a\ \Rightarrow T_2=m_2g+m_2a\ (3)$$

Or $T_1=T'_1$ *et* $T_2=T'_2$

$$\Longrightarrow (m_1g-m_1a)-m_2g-m_2a=ma\ \Rightarrow a\ =\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+m}$$

$$A.N:a=\frac{200\times 10}{500}=4m.s^{-2}$$

b)) La vitesse de la masse m_1 lorsqu'elle heurte le sol

R.I.T : $v^2=2ad\ \Rightarrow v=\sqrt{2ad}=\sqrt{2\times 4\times 3}=4{,}90m.s^{-1}$

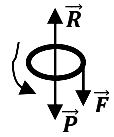
c)) Calcul des tensions T_1 et T_2

$$T_1=m_1(g-a)=0{,}3(10-4)=1{,}8N\ \text{ et}$$

$T_2=m_2(g+a)=0{,}1(10+4)=1{,}4N$

2. a)) Norme de la force de freinage F

Après la rupture du fil, la poulie est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction $\vec{R}$ et à la force de frottement $\vec{F}$.



T.EC : $\Delta E_C=E_{C_2}-E_{C_1}=\sum W(\overrightarrow{F_{ext}})$

$$\Longrightarrow E_{C_2}-E_{C_1}=W(\vec{P})+W(\vec{R})+W(\vec{F})$$

or $W(\vec{R})+W(\vec{P})=0$ *et* $E_{C_2}=0$

$\Longrightarrow -\frac{1}{2}J\omega_1{}^2=-\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2=W(\vec{F})=M(\vec{F}).\theta=-Fr.2\pi n$

$\Longrightarrow\ F=\frac{mv^2}{2\pi nr}=\frac{0{,}1\times 24}{2\pi\times 6\times 0{,}06}=1{,}06N$

b)) – Montrons que le mouvement est C.U.D

R.F.D (en rotation): $M(\vec{F})=J\ddot{\theta}\Rightarrow\ddot{\theta}=\frac{M(\vec{F})}{J}<0$, *car* $M(\vec{F})<0$

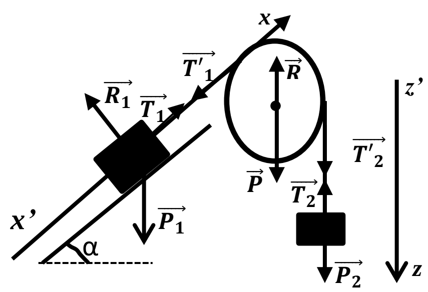
d'où le mouvement de la poulie est C.U.D

$\ddot{\theta}=\frac{M(\vec{F})}{J}=\frac{-Fr}{mr^2}=-\frac{F}{mr}=-\frac{1{,}06}{0{,}1\times 0{,}06}\ =-1{,}77.10^2rad.s^{-2}$

- Durée de freinage

$\omega(t)=\ddot{\theta}t+\omega_0=0\Rightarrow t=-\frac{\omega_0}{\ddot{\theta}}=-\frac{v}{r\ddot{\theta}}=\frac{4{,}90}{0{,}06\times 177}=0{,}46s$

II. 1. Nouvelle valeur de m_1 et m_2



Pour la poulie :

R.F.D (en rotation) *:* $\sum M(\overrightarrow{F_{ext}})=J\ddot{\theta}$

soit $-T'_1r+T'_2r=J\ddot{\theta}=J\frac{a}{r}$

$\Longrightarrow -T'_1+T'_2=J\frac{a}{r^2}\ \ \Rightarrow -T'_1+T'_2=ma$ *(1)*

- Pour la masse m_1

T.CI : $\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{T_1}+\overrightarrow{R_1}+=m_1\vec{a}$

Suivant x'x : $-m_1g\sin\alpha+T_1=m_1a$

$\Longrightarrow T_1=m_1g\sin\alpha+m_1a$ (2)

- Pour la masse m_2

T.CI : $\overrightarrow{P_2}+\overrightarrow{T_2}=m_2\vec{a}$, *Suivant z'z :*

$$m_2g-T_2=m_2a\ \Rightarrow T_2=m_2g-m_2a\ (3)$$

Or $T_1=T'_1$ *et* $T_2=T'_2$

$\Longrightarrow -(m_1 g\sin\alpha + m_1 a) + m_2 g - m_2 a = ma$

$or\ m_1 + m_2 = 0{,}4$

$\Longrightarrow -(m_1 g\sin\alpha + m_1 a) + (0{,}4 - m_1)(g - a) = ma$

$$m_1 = \frac{ma - 0{,}4(g-a)}{-g(sin\,\alpha + 1)} = \frac{0{,}1\times 4 - 0{,}4(10-4)}{-10(0{,}5+1)} = 0{,}133kg$$

$m_1 + m_2 = 0{,}4 — m_1 = 0{,}4 - 0{,}133 = 0{,}267kg$

2- Énergie mécanique de la masse m_1 à t = 3s

$E = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2}m_1v^2 + m_1 gx$, $avec\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

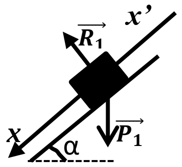
$Or\ à\ t = 0,\ v_0 = 0\ et\ x_0 = 0 \Rightarrow\ x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\times 4\times 3^2 = 18m$

$et\ v^2 = 2ax \Rightarrow v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2\times 4\times 18} = 12m.s^{-1}$

$$E = m_1\left(\frac{v^2}{2} + gx\right) = 0{,}3\left(\frac{12^2}{2} + 10\times 18\right) = 75{,}6J$$

3. a)) Caractéristiques du vecteur accélération

Après la rupture la masse m_1 est soumise à son poids $\vec{P_1}$, à la réaction $\vec{R_1}$



$T.CI : \vec{P_1} + \vec{R_1} += m_1\vec{a}$

$Suivant\ x'x :\ m_1 g\sin\alpha = m_1 a$

$\Rightarrow a = g\sin\alpha = 10\times 0{,}5 = 5m.s^{-2}$

- direction : perpendiculaire à la trajectoire
- sens : suivant la trajectoire (x'x)
- intensité : $a = 5m.s^{-2}$

b)) Loi horaire du mouvement

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$, $à\ t = 3s,\ v_0 = -12m.s^{-1}$

$$\begin{cases} x = 2{,}5t^2 - 12t \\ v = 5t - 12 \end{cases}$$

c))Temps mis par la masse m_1 pour repasser à sa position initiale

$T = t_1 + t_2, à\ t_1 = t = 3s \Longrightarrow x = 18 = 2{,}5t^2 - 12t$

$$\Longrightarrow 2{,}5t^2 - 12t - 18 = 0$$

$\Delta = 144 + 4(2{,}5)(18) = 324 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 18$

$$\Longrightarrow t = \frac{12 \pm 18}{2\times 2{,}5} \Longrightarrow t_2 = \frac{12+18}{2\times 2{,}5} = 6s\ \Longrightarrow T = 3 + 6 = 9s$$

D'où la masse m_1 repasse à sa position initiale à la date t=9s.

Solution 8

1. a)) Accélération de la masse *M*

$M.R.U.V : d_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 + v_0 t + x_0, or\ à\ t = 0,\ v_0 = 0\ et\ x_0 = 0$

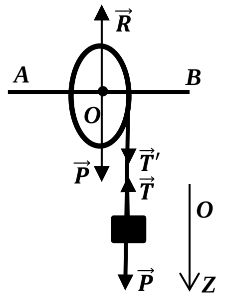
$$d_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 \Rightarrow a_1 = \sqrt{\frac{2d_1}{t^2}} = \sqrt{\frac{2\times 0{,}2}{0{,}6^2}} = 1{,}054m.s^{-2}$$

b)) Montrons que le moment d'inertie de S est $J_0 = 10^{-3}$ kg.m²

- Pour la masse M

$T.C.I : : \vec{P} + \vec{T} = M\vec{a}$, $suivant\ OZ :$

$Mg - T = Ma \Longrightarrow T = Mg - Ma$



- Pour le cylindre

$R.F.D : : \sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_0\ddot{\theta} = J_0\frac{a}{r}$

$$\Longrightarrow T'r = J_0\frac{a}{r} \Rightarrow T' = \frac{J_0 a}{r^2}$$

$$Or\ T = T' \Rightarrow M(g-a) = \frac{J_0 a}{r^2}$$

$$\Rightarrow J_0 = \frac{M(g-a)r^2}{a}$$

$$A.N: a = \frac{0{,}2(10 - 1{,}054)\times(2{,}5.10^{-2})^2}{1{,}054} = 10^{-3}kg.m^2$$

2. a)) Expression de la nouvelle accélérationa_2

D'après l'étude précédente, on a :

- Pour la masse $M :\ T = Mg - Ma_2$
- Pour le cylindre : $T'r = J\ddot{\theta}_2$, $avec\ J = J_0 + 2md^2$

$$\Longrightarrow T'r = (J_0 + 2md^2)\frac{a_2}{r} \Rightarrow T' = \frac{(J_0 + 2md^2)a_2}{r^2}$$

$$Or\ T = T' \Rightarrow Mg - Ma_2 = \frac{(J_0 + 2md^2)a_2}{r^2}$$

$$\Longrightarrow a_2 = \frac{Mg}{\frac{J_0 + 2md^2}{r^2} + M}$$

b)) Montrons que si $y = \frac{1}{a_2} \Rightarrow y = \alpha X + \beta$, $avec\ X = d^2$

$$y = \frac{1}{a_2} = \frac{\frac{J_0 + 2md^2}{r^2} + M}{Mg} = \frac{J_0 + 2md^2}{Mgr^2} + \frac{1}{g}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{2m}{Mgr^2}d^2 + \frac{J_0}{Mgr^2} + \frac{1}{g} = \alpha X + \beta$$

$$Où\ \alpha = \frac{2m}{Mgr^2}\ et\ \beta = \frac{J_0}{Mgr^2} + \frac{1}{g}$$

$$A.N : \alpha = \frac{2\times 0{,}1}{0{,}2\times 10\times(2{,}5.10^{-2})^2} = 160\ et$$

$$\beta = \frac{10^{-3}}{0{,}2\times 10\times(2{,}5.10^{-2})^2} + \frac{1}{10} = 0{,}9$$

3. a)) Accélération a_2 pour d=20cm

$$a_2 = \frac{Mg}{\frac{J_0 + 2md^2}{r^2} + M}$$

$$AA.N: a_2 = \frac{0{,}2\times 10}{\frac{10^{-3} + 2\times 0{,}1\times 0{,}2^2}{(2{,}5.10^{-2})^2} + 0{,}2} = 0{,}137m.s^{-2}$$

- Accélération angulaire $\ddot{\theta}_2$:

$$a_2 = r\ddot{\theta}_2 \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = \frac{a_2}{r} = \frac{0{,}137}{0{,}025} = 5{,}48rad.s^{-2}$$

b)) L'instant t_2 et le nombre de tours effectués à cet instant

$M.R.U.V : d_2 = \frac{1}{2}a_2{t_2}^2\ \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2d_2}{a_2}} = \sqrt{\frac{2\times 0{,}5}{0{,}137}} = 2{,}70s$

$R.I.T : {v_2}^2 = 2a_2 d_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2a_2 d_2} = \sqrt{2\times 0{,}137\times 0{,}5}$

$v_2 = 0{,}37m.s^{-1}\ et\ \omega_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{0{,}37}{0{,}025} = 14{,}8rad.s^{-1}$

$R.I.T :\ {\omega_2}^2 = 2\ddot{\theta}_2\theta = 2\ddot{\theta}_2\times 2\pi n_1$

$\Rightarrow n_1 = \sqrt{\frac{{\omega_2}^2}{4\pi\ddot{\theta}_2}} = \sqrt{\frac{14{,}8^2}{4\pi\times 5{,}48}} \Longrightarrow \ n_1 = 1{,}78 tours$

4. – Moment du couple de freinage

$$\Delta\omega = \ddot{\theta}_3\Delta t \ \Rightarrow \ \ddot{\theta}_3 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_3 - \omega_2}{\Delta t} = \frac{-\omega_2}{\Delta t} = \frac{-14{,}8}{15} = 0{,}987$$

D'où la décélération angulaire de ce mouvement est :

$$\ddot{\theta}_3 = -0{,}987 rad.s^{-2}$$

- Pour la masse M : $T = Mg - Ma_3 = Mg - Mr\ddot{\theta}_3$

- Pour le cylindre : $M(\vec{T}) + M_C = M_C + T'r = J\ddot{\theta}_3$,

avec : $J = J_0 + 2md^2 = 10^{-3} + 2\times 0{,}1\times 0{,}2^2 = 9.10^{-3} kg.m^2$

$T' = \frac{J\ddot{\theta}_3 - M_C}{r}$ *or* $T = T' \Longrightarrow Mg - Mr\ddot{\theta}_3 = \frac{J\ddot{\theta}_3 - M_C}{r}$

$$Mr(g - r\ddot{\theta}_3) = J\ddot{\theta}_3 - M_C \ \Rightarrow \ M_C = J\ddot{\theta}_3 - Mr(g - r\ddot{\theta}_3)$$

$$M_C = -10^{-3}.0{,}987 - 0{,}2\times 2{,}5.10^{-2}(10 - 2.5.10^{-2} \times(-0{,}987)) = -5{,}11\times 10^{-2} N.m$$

- Nombre de tours effectués par le cylindre

R.I.T : $-{\omega_2}^2 = 2\ddot{\theta}_2\theta = 2\ddot{\theta}_2.2\pi n_2$

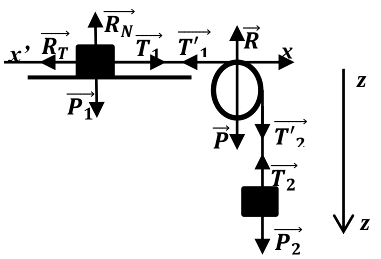
$$\Rightarrow n_2 = \frac{-\omega_2}{4\pi\ddot{\theta}_2} = \frac{-(14{,}8)^2}{4\pi\times(-0{,}987)} = 17{,}66 tours$$

- Nombre de tours total :

$$n_{total} = n_1 + n_1 = 1{,}78 + 17{,}66 = 19{,}44 tours$$

Solution 9

1. Accélération prise par S_2



-Pour la poulie : R.F.D (en rotation) : $\sum M(\vec{F_{ext}}) = J\ddot{\theta}$

$$\Longrightarrow M(\vec{T'_1}) + M(\vec{T'_2}) + M(\vec{P}) + M(\vec{R}) = J\ddot{\theta}$$

Or $M(\vec{P}) + M(\vec{R}) = 0 - T'_1 r + T'_2 r = J\ddot{\theta} = J\frac{a}{r}$

$-T'_1 + T'_2 = J\frac{a}{r^2}$ (1)

- Pour la masse S_1 : *T.CI* : $\vec{P_1} + \vec{T_1} + \vec{R_N} + \vec{R_T} = m_1\vec{a}$

Suivant x'x : $-R_T + T_1 = m_1 a \Rightarrow T_1 = R_T + m_1 a$

$f = \frac{R_T}{R_N} \Rightarrow R_T = fR_N = fm_1 g \ \Rightarrow \ T_1 = fm_1 + m_1 a$

Pour la masse m_2 : *T.CI* : $\vec{P_2} + \vec{T_2} = m_2\vec{a}$

Suivant z'z' : $m_2 g - T_2 = m_2 a \ \Rightarrow T_2 = m_2 g - m_2 a$ (3)

Or $T_1 = T'_1$ *et* $T_2 = T'_2$

$$\Longrightarrow -(fm_1 g + m_1 a) + m_2 g - m_2 a = J\frac{a}{r^2}$$

$$\Longrightarrow a = \frac{(m_2 - fm_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} \ ,$$

$$A.N : a = \frac{(0{,}1 - 0{,}75\times 0{,}1)\times 9{,}8}{0{,}2 + \frac{8.10^{-5}}{10^{-4}}} = 0{,}245 m.s^{-2}$$

Comme $a > 0$,alors le mouvement est R.U.A

b)) Si le fil casse, alors $T_1 = fm_1 + m_1 a = 0 \ \Rightarrow a = -f$

$a = -f = -0{,}75 m.s^{-2} < 0$, donc, si le fil casse le solide S_1 va prendre un M.R.U.D

Or, si les frottements sont négligeables, alors a = 0, donc le solide S_1 va prendre un M.R.U

3.a)) Tension des fils en mouvement

Si les frottement sont négligeables alors *:*

$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}$ $\quad A.N : a = \frac{0{,}1\times 9{,}8}{0{,}2 + \frac{8.10^{-5}}{10^{-4}}} = 0{,}98 m.s^{-2}$

$T_1 = m_1 a = 0{,}1\times 0{,}98 = 9{,}8\times 10^{-2} N$

$T_2 = m_2(g - a) = 0{,}1(9{,}8 - 0{,}98) = 88{,}2\times 10^{-2} N$

b)) – Vitesse de S_2 après 10s

$v = at + v_0$, *or à t =0* $v_0 = 0$

donc $v = at = 0{,}98\times 10 = v = 9{,}8 m.s^{-1}$

- Vitesse angulaire de la poulie *:* $\omega = \frac{v}{r} = 9{,}8\times 10^2 rad.s^{-1}$

- Nombre de tours effectués par la poulie

R.I.T : $\omega^2 = 2\ddot{\theta}\theta = 2\frac{a}{r}\times 2\pi n \Rightarrow n = \frac{\omega^2 r}{4\pi a}$

$$A.N : n = \frac{(9{,}8.10^2)^2\times 10^{-2}}{4\times 0{,}98\times\pi} = 7{,}80 tours$$

4. a)) Moment du couple de freinage

- Détermination de la décélération angulaire

$$\omega = \ddot{\theta}t + \omega_0 = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{\omega_0}{t} = \frac{-980}{2} = -490 rad.s^{-2}$$

R.F.D : $M_C = J\ddot{\theta} = 8\times 10^{-5}\times(-490) = 3{,}92\times 10^{-2} N.m$

b)) Angle balayé par la poulie à t=2s

R.I.T : $\Delta\omega^2 = -{\omega_0}^2 = 2\ddot{\theta}\Delta\theta \ \Rightarrow \ \Delta\theta = \frac{-{\omega_0}^2}{2\ddot{\theta}} = \frac{-980^2}{2(-490)} = 980 rad$

- Nombre de tours effectués :

$$\Delta\theta = 2\pi n \ \Rightarrow n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{980}{2\pi} = 1{,}56\times 10^2 tours$$

Solution 10

I. 1. a)) Accélération linéaire du disque

Le disque est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$

T.E.C : $\Delta E_C = E_{C_2} - E_{C_1} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$, *or* $W(\vec{R})$*=0 et*

E_{C_1}*=0* , donc : $E_{C_2} = \frac{1}{2}(MV^2 + J_0\omega^2) = W(\vec{P}) = Mgxsin\alpha$

$$E_{C_2} = \frac{1}{2}(MV^2 + J_0\omega^2) = \frac{1}{2}\left(MV^2 + \frac{1}{2}MR^2\times\frac{V^2}{R^2}\right) = \frac{3}{4}MV^2$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{4}MV^2 = Mgxsin\alpha \ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}V^2\right) = \frac{d}{dt}(\,gxsin\alpha)$$

$\Longrightarrow \frac{3}{4}\times 2V.\dot{V} = \dot{x}gsin\alpha = Vgsin\alpha \ \Rightarrow a = \frac{2}{3}gsin\alpha$

A.N : $a = \frac{2}{3}gsin\alpha = \frac{2}{3}\times 10\times 0{,}5 = 3{,}33 m.s^{-2}$

b)) Lois horaires du mouvement x(t) et θ(t)

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$, or à t=0, $x_0 = 0$ et $v_0 = 0$ alors

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{3,33}{3}t^2 = 1,67t^2$, $v(t) = at = 3,33t$ et

$$a = r\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{a}{R} = \frac{3,33}{30.10^{-2}} = 11,1 rad.s^{-2}$$

$\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}t + \omega_0 = \ddot{\theta}t$, or à t=0, $\theta_0 = 0$ et $\omega_0 = 0$

alors $\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}t = 11,1t$

2. a)) <u>Vitesse v_1 du disque après un parcourt de 50cm</u>

$x(t) = 1,67t^2 = 20 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{20}{1,67}} = 3,46s$ et

$$v_1 = 3,33t = 3,33 \times 3,46 = 11,52 m.s^{-1}$$

Ou bien : T.E.C : $\frac{3}{4}v^2 = gLsin\alpha \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{4gLsin\alpha}{3}}$

A.N: $v_1 = \sqrt{\frac{4\times10\times20\times0,5}{3}} = 11,54 m.s^{-1}$

- <u>Nombre de tours effectués à l'instant t=0,55s</u>

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 = \frac{1}{2} \times 11,1 \times 3,46^2 = 66,44 rad$$

$\Longrightarrow \theta = 2\pi n = 66,44 \Rightarrow n = \frac{66,44}{2\pi} = 10,57 tours$

b)) <u>Expression de v'_1 et v'_2 après le choc</u>

- Avant le choc : $\vec{P} = M\vec{v_1} + m\vec{v_2} = M\vec{v_1}$, car $v_2 = 0$ et

$E_C = \frac{1}{2}M{v_1}^2$

- Après le choc : $\vec{P'} = M\vec{v'_1} + m\vec{v'_2}$ et $E'_C = \frac{1}{2}M{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m{v_2}^2$

Comme le choc est élastique, alors il y a deux conservations :

- Conservation du vecteur quantité de mouvement :

$\vec{P} = \vec{P}' \Rightarrow M\vec{v_1} = M\vec{v'_1} + m\vec{v'_2} \Rightarrow Mv_1 = Mv'_1 + mv'_2$

$\Longrightarrow M(v_1 - v'_1) = mv'_2$ (1)

- <u>Conservation de l'énergie cinétique</u>

$E_C = E'_C \Rightarrow \frac{1}{2}M{v_1}^2 = \frac{1}{2}M{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m{v'_2}^2$ alors

$$M({v_1}^2 - {v'_1}^2) = m{v'_2}^2 \Rightarrow$$

$M(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m{v'_2}^2$ (2) donc $\frac{(2)}{(1)}$ donne :

$$v_1 + v'_1 = v'_2 \ (3)$$

Dans (1) , on a : $M(v_1 - v'_1) = m(v_1 + v'_1)$

$$\Longrightarrow v'_1 = \frac{(M-m)}{M+m}v_1 \quad \text{et } v'_2 = \frac{2M}{M+m}v_1$$

c)) <u>Discussion de v_1' et v_2' suivant les valeurs de M et m</u>

- Si $M \gg m \Rightarrow v'_1 = v_1$ et $v'_2 = 2v_1$,

- Si $M \ll m \Rightarrow v'_1 = -v_1$ et $v'_2 = 0$

- Si $M = m \Rightarrow v'_1 = 0$ et $v'_2 = v_1$

<u>Valeurs numérique de v'_1 et v'_2</u>

- Détermination de la masse m

Pour une sphère homogène $J_0 = \frac{2}{5}mr^2$

$$\Rightarrow m = \frac{5J_0}{2r^2} = \frac{5 \times 0,8}{2 \times 0,2^2} = 50kg$$

$$v'_1 = \frac{(10-50)}{60} \times 11,5 = -7,67 \, m.s^{-1}$$

$$\text{et } v'_2 = \frac{20}{60} \times 11,5 = 3,83 \, m.s^{-1}$$

3. a)) <u>Accélération du disque s'il roule avec glissement</u>

Si le disque roule en glissant sur le plan incliné, alors il est considéré comme un point matériel.

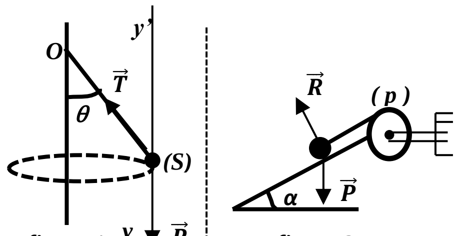
T.C.I : $\vec{P} + \vec{R} = M\vec{a}$, suivant x'x :

$Mgsin\alpha = Ma \Rightarrow a = gsin\alpha = 10 \times\times 0,5 = 5m.s^{-2}$

b)) <u>Durée de descendance</u>

$x(t) = 2,5t^2 = 20 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{20}{2,5}} = 2,83s$

<u>Solution 11</u>



fiaure 1 <u>figure 2</u>

I. 1. <u>Valeur de l'angle θ</u>

Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du ressort.

T.C.I : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$, suivant x'x : $Tsin\theta = ma_n = mr\omega^2$ avec

$r = lsin\theta$, $T = ml\omega^2$ (1)

Suivant y'y : $Tcos\theta - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{cos\,\theta}$ (2)

Or : $T = k\Delta l = k(l - l_0) = \frac{mg}{cos\,\theta} \Rightarrow cos\,\theta = \frac{mg}{k(l-l_0)}$

A.N : $cos\,\theta = \frac{0,1\times10}{50(0,16-0,12)} = 0,5 \Rightarrow \theta = 60°$

2. <u>Valeur de N(fréquence de rotation)</u>

$$(1) = (2 \Longrightarrow ml\omega^2 = ml(2\pi N)^2 = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$\Rightarrow N = \sqrt{\frac{g}{l(2\pi)^2\cos\theta}} \Longrightarrow N = \sqrt{\frac{10}{0,16(2\pi)^2\times0,5}} = 1,78Hrz$

II. 1. <u>Expression de l'accélération de S en f(m, J_0, r, α, et g)</u>

Pour le solide (S) :

T.C.I : $\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$, Suivant x'x :

$-T + mgsin\theta = ma \Rightarrow T = -ma + mgsin\theta$ (1)

Pour la poulie de moment d'inertie J_0

R.F.D(en rotation) : $M(\vec{T'}) = T'r = J_0\ddot{\theta} = J_0\frac{a}{r} \Rightarrow T' = J_0\frac{a}{r^2}$ (2)

$$(1) = (2) - ma + mgsin\theta = J_0\frac{a}{r^2} \Longrightarrow a = \frac{mgsin\theta}{\frac{J_0}{r^2} + m}$$

2. <u>Expression de a en f(x,t)</u> : M.R.U.V :

$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \times 0,64}{0,8^2} = 2m.s^{-2}$$

3. <u>Valeur Numérique de J_0</u>

$$J_0 = \left(\frac{gsin\theta}{a} - 1\right)mr^2 = \left(\frac{10 \times 0,5}{2} - 1\right) \times 0,1 \times 0,1^2$$

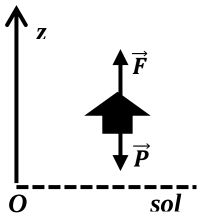
$$J_0 = 1,5 \times 10^{-3} kg.m^2$$

Solutions sur l'étude énergétique d'un système mécanique

Solution 1

1. a)) Montrons que le Mouvement est U.A

La fusée est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la force de poussée $\vec{F}$.



T.C.I : $\vec{F}+\vec{P}=m\vec{a}$, Suivant Oz :

$-mg+F=ma\ \Rightarrow a=\frac{F-mg}{m}$,

Or , pour que la fusée décolle, il faut que

$F>P\Rightarrow F-mg>0\Rightarrow a>0$

Comme a > 0, alors le mouvement de la fusée est R.U.A

b)) Valeur de l'accélération et de la poussée F

MRUA : $v=at+v_0$, or à t=0, $v_0=0$, donc $v=at$

$$a=\frac{v}{t}=\frac{100}{3{,}6\times 10}=2{,}78m.s^{-2}\quad et$$

$$F\ =\ m(a+g)=200(2{,}78+9{,}8)=2{,}516\times 10^{3}N$$

c)) Altitude atteinte lorsque le moteur s'arrête

MRUA : $z=\frac{1}{2}at^2$ et le moteur s'arrête à t=*10s ;*

$z=\frac{1}{2}\times 2{,}78\ \times 10^2=139m$

d)) Nature du mouvement lorsque le moteur s'arrête

Lorsque le moteur s'arrête,

$F=0$; donc $-\ mg\ =\ ma\ \Rightarrow a=-g$, après la rupture, la fusée fera un chute libre sans vitesse initiale (ou MRUD).

- Altitude maximale atteinte

Altitude atteinte après l'arrêt du moteur :

R.I.T : $\Delta v^2=-v^2=2az=-2gz\ \Rightarrow\ z=\frac{v^2}{2g}$

$$z'=\frac{100^2}{3{,}6^2\times 2\times 9{,}8}=39{,}36m\ \ et$$

$$Z_{max}=z+z'=139+39{,}36=178{,}36m$$

2. a)) Altitude atteinte lorsque le moteur s'arrête

L'existence d'une force de frottement sur la trajectoire de la fusée donne :

T.C.I : $\vec{F}+\vec{P}+\vec{f}=m\vec{a}$;

Suivant Oz : $-mg-f+F=ma\ \Rightarrow a=\frac{F-f}{m}-g$

$$a=\frac{2{,}516\times 10^3-100}{200}-9{,}8=2{,}28m.s^{-2}\ (MRUA)$$

$\Rightarrow z=\frac{1}{2}at^2$ et le moteur s'arrête toujours à t=10s , donc *:* $z=\frac{1}{2}\times 2{,}28\ \times 10^2=114m$

Donc le moteur s'arrête à l'altitude $z=114m$

b)) Altitude maximale atteinte

Altitude atteinte par la fusée après l'arrêt du moteur :

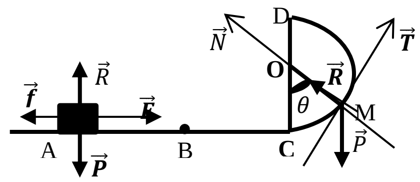
$$v=at=2{,}28\times 10=22{,}8m.s^{-1}$$

donc la fusée atteinte une vitesse de $22{,}8m.s^{-1}$ à t = 10s.

R.I.T : $\Delta v^2=-v^2=2az'=-2gz'$

$$Z_{max}=z+z'=114+26{,}52=140,$$

Solution 2



1. a)) Détermination de l'accélération du solide (S)

Entre A et B le solide est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction $\vec{R}$ et à la force de poussée $\vec{F}$.

T.C.I : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m\vec{a}$

suivant *AB :* $F=ma\ alors\ a=\frac{F}{m}=\frac{1}{0{,}5}=2m.s^{-2}$

- Expression de la vitesse au point B en f(F,m,l)

R.I.T :$\Delta v^2={v_B}^2=2aAB=2al=2\times\frac{F}{m}\times l$

$\Rightarrow\ v_B=\sqrt{\frac{2Fl}{m}}$ ou bien

T.E.C : entre A et B :

$$E_C(B)-E_C(A)=W(\vec{P})+W(\vec{R})+W(\vec{F}),$$

Or : $W(\vec{P})=0\,,W(\vec{R})=0\ et\ E_C(A)=0$ *, donc*

$$E_C(B)=\ W(\vec{F}\Rightarrow\ \ \frac{1}{2}m{v_B}^2=F.l\ \Rightarrow v_B=\sqrt{\frac{2Fl}{m}}$$

b)) Vitesse au point C

Comme la force $\vec{F}$ ne s'exerce qu'entre A et B , alors :

T.E.C : entre C et B

$E_C(C)-E_C(B)=0\Rightarrow E_C(C)=E_C(B)$

$$\Rightarrow\ v_C=v_B=\sqrt{\frac{2Fl}{m}}\Longrightarrow\ v_C=\sqrt{\frac{2\times 1\times 1{,}5}{0{,}5}}=2{,}45m.s^{-1}$$

2. a)) Expression de la vitesse de S en M en f(F, m, r, l, g, θ)

T.E.C : entre C et M : $E_C(M)-E_C(C)=W(\vec{P})+W(\vec{R})$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{2}m{v_M}^2-\ \frac{1}{2}m{v_C}^2=-mgh\,,avec\ h=r(1-\cos\theta)$$

$$v_M=\sqrt{{v_C}^2-2gh}=\sqrt{\frac{2Fl}{m}-2gr(1-\cos\theta)}$$

b)) Expression de l'intensité de la réaction $\vec{R}$

T.C.I : $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$,

Suivant $\vec{N}$ *:* $-mg\cos\theta+R=ma_n=m\frac{{v_M}^2}{r}$

$$R=m\left(g\cos\theta+\frac{{v_M}^2}{r}\right)\Longrightarrow$$

$R=m(g\cos\theta-2g(1-\cos\theta)+\frac{2Fl}{mr})$

$$d'où:\ R=m\left[g(3\cos\theta-2)+\frac{2Fl}{mr}\right]$$

3.Valeur minimale de F pour que S atteint le point D

Pour S atteint le point D , il faut que $R\geq 0\ \ et\ \theta=\pi$

$R \geq 0 \Leftrightarrow m\left[g(3\cos\pi - 2) + \frac{2Fl}{mr}\right] \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{2Fl}{mr} \geq 5g$

$\Longrightarrow F_0 = \frac{5mgr}{2l} = \frac{5 \times 0{,}5 \times 10 \times 1}{3} = 8{,}33N$

4. a)) <u>Expression de la vitesse de S en M.</u>

L'existence d'une force de frottement $\vec{f}$ donne :

T.E.C : entre A et M :

$$E_C(M) - E_C(A) = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{F})$$

$$\frac{1}{2}m{v_M}^2 = -mgh + Fl - f(L + CM)\;, avec\; CM = r\theta$$

$$v_M = \sqrt{\frac{2Fl}{m} - \frac{2f(L + r\theta)}{m} - 2gr(1 - \cos\theta)}$$

b)) <u>Intensité de la force de frottement $\vec{f}$</u>

$$On\ a : {v_M}^2 = \frac{2Fl}{m} - \frac{2f(L + r\theta)}{m} - 2gr(1 - \cos\theta)$$

$$\Longrightarrow \frac{2f(L + r\theta)}{m} = \frac{2Fl}{m} - {v_M}^2 - 2gr(1 - \cos\theta)$$

$$\Longrightarrow f = \frac{Fl}{L + r\theta} - m\left(\frac{{v_M}^2 + 2gr(1 - \cos\theta)}{2(L + r\theta)}\right)$$

$$A.N:\ f = \frac{1 \times 1{,}5}{3 + \pi/6} - 0{,}5\left(\frac{0{,}5^2 + 2 \times 10(1 - \cos 30°)}{2(3 + \pi/6)}\right)$$

$$f = 0{,}22N$$

- <u>Accélération du solide sur la portion AB</u>

T.C.I : $\vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$ *, Suivant AB :*

$$-f + F = ma \;\; \Rightarrow a = \frac{F - f}{m} = \frac{1 - 0{,}22}{0{,}5} = 1{,}56m.s^{-2}$$

Comme $a > 0$, alors le mouvement de S sur la portion AB est rectiligne uniformément accéléré d'équation *:*

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = 0{,}78t^2$$

c)) <u>Durée mise par S au passage en C</u>

$x(t) = 0{,}78t^2 = AB \;\Rightarrow\; t_{AB} = \sqrt{\frac{1{,}5}{0{,}78}} = 1{,}38s\ et$

$v_B = at_{AB} = 1{,}56 \times 1{,}38 = 2{,}15m.s^{-1}$

- Sur la portion BC, le mouvement est rectiligne uniforme :

$v_B = v_C = \frac{BC}{t_{BC}} \;\Rightarrow\; t_{BC} = \frac{BC}{v_B} = \frac{1{,}5}{2{,}15} = 0{,}70s$

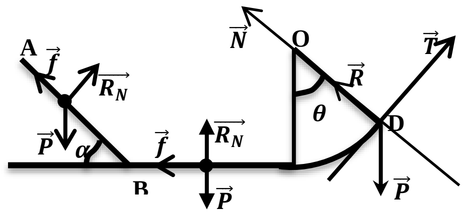
$\Longrightarrow t_{AC} = t_{AB} + t_{BC} = 1{,}38 + 0{,}70 = 2{,}08s$

- <u>Energie mécanique de S au point C</u>

$E = E_C + E_{PP} = E_C\ , car\ au\ sol\ \ E_{PP} = 0,$

$alors\ :\ E = E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times 2{,}15^2 = 1{,}15J$

<u>*Solution 3*</u>



1. <u>Expression de la vitesse de S aux points</u>

<u>A, B, C et D en f(r, g, h)</u>

Le solide S est soumis à son poids $\vec{P}$ er la réaction

$\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \vec{f}$

T.E.C : entre A et B

$E_C(B) - E_C(A) = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 = mgh - fAB = mgh - \frac{1}{10}mg\frac{h}{\sin\alpha}$$

$v_B = \sqrt{gh - \frac{gh}{10\sin\alpha}},\ or\ \sin\alpha = 0{,}5 \Longrightarrow\ \ v_B = \sqrt{\frac{4}{5}gh}$

T.E.C : entre B et C

$$E_C(C) - E_C(B) = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}m{v_C}^2 - \frac{1}{2}m{v_B}^2 = -fBC = -\frac{1}{10}mg \times 2r$$

$$v_C = \sqrt{-\frac{2}{5}gr + {v_B}^2} = \sqrt{-\frac{2}{5}gr + \frac{4}{5}gh} = \sqrt{\frac{2}{5}g(2h - r)}$$

T.E.C : entre C et D

$$E_C(D) - E_C(C) = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

$\Longrightarrow\ \frac{1}{2}m{v_D}^2 - \frac{1}{2}m{v_C}^2 = -mgh',\ \ avec\ \ h' = r(1 - \cos\theta)$

$$v_D = \sqrt{{v_C}^2 - 2gr(1 - \cos\theta)}\,, or\ \theta = 60°: 1 - \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$v_D = \sqrt{\frac{2}{5}g(2h - r) - gr} = \sqrt{\frac{1}{5}g(4h - 7r)}$$

2. a)) <u>Valeur de h si le solide arrive en D avec</u> $v_D = 2m.s^{-1}$

$v_D = \sqrt{\frac{1}{5}g(4h - 7r)} \;\Rightarrow {v_D}^2 = \frac{1}{5}g(4h - 7r)$

$\Longrightarrow h = \frac{5{v_D}^2}{4g} + \frac{7r}{4} = \frac{5 \times 4}{40} + \frac{7 \times 1}{4} = 2{,}25m$

b)) <u>Accélération de S sur la portion AB</u>

T.C.I : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$*, suivant AB :* $mg\sin\alpha - f = ma$

$$\Rightarrow\ mg\sin\alpha - \frac{1}{10}mg = ma$$

$$a = g(\sin\alpha - 0{,}1) = 10(0{,}5 - 0{,}1) = 4m.s^{-2}$$

- <u>Durée mise par S sur la portion AB</u>

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = 2t^2, or\ \ au\ point\ B,\qquad AB = x = 2{t_{AB}}^2$

$t_{AB} = \sqrt{\frac{AB}{2}} = \sqrt{\frac{h}{2\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2{,}25}{2 \times 0{,}5}} = 1{,}5s$

3.a)) <u>Expression de la force exercée par S sur la portion CD</u>

T.C.I : $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$

Suivant $\vec{N}$: $-mg\cos\theta+R=ma_n=m\frac{v_D{}^2}{r}$

$$R=m\left(g\cos\theta+\frac{v_D{}^2}{r}\right)=m\left(g\cos\theta+\frac{1}{5r}g(4h-7r)\right)$$

$$R=m\left[g\left(\cos\theta+\frac{4h}{5r}-\frac{7}{5}\right)\right]=\frac{mg}{5r}(5r\cos\theta+4h-7r)$$

$$R=\frac{mg}{5r}\left(\frac{5r}{2}+4h-7r\right),car\ \ \cos\theta=\cos 60°=\frac{1}{2}$$

$$D'où:\ R=\frac{mg}{5r}\left(-\frac{9r}{2}+4h\right)$$

b)) <u>Valeur minimale de la hauteur h pour que S arrive en D</u>

Pour que le solide arrive en D, il faut que $R_D\geq 0$

$$R_D\geq 0\ \Leftrightarrow\frac{mg}{5r}\left(-\frac{9r}{2}+4h\right)\geq 0\Rightarrow -\frac{9r}{2}+4h\geq 0$$

$$\Rightarrow h\geq\frac{9r}{8}\Longrightarrow\quad h_{min}=\frac{9r}{8}=1{,}125m$$

c)) <u>Vérifions si S peut toucher le plafond situé à1,5m de C</u>

T.EC : entre D et le point maximal

Au point maximal $v_{max}=0$ *donc :*

$$E_C(f)-E_C(D)=W(\vec{P})+W(\vec{R})$$

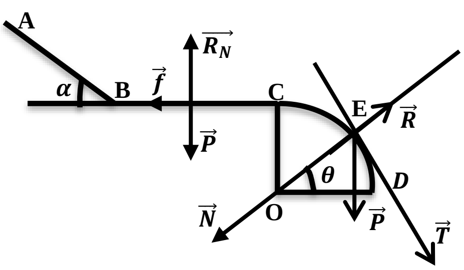
$$\Longrightarrow -E_C(D)=-\frac{1}{2}mv_D{}^2=W(\vec{P})=-mgh_f\ \Rightarrow h_f=\frac{v_D{}^2}{2g}$$

$$h_f=\frac{v_D{}^2}{2g}=\frac{4}{20}=0{,}2m$$

$$h_{max}=r(1-\cos\theta)+h_f=0{,}5+0{,}2=0{,}7m$$

$h_{max}=0{,}7m<1{,}5m$ $\Rightarrow$ le solide peut toucher le plafond situé à 1,5m au-dessus du point C.

<u>Solution 4</u>



1. <u>Vitesse de la bille en B</u>

Bilan des forces : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ de la piste.

T.E.C : entre A et B

$$E_C(B)-E_C(A)=W(\vec{P})+W(\vec{R}),\ Or\ E_C(A)=0$$

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2=mgh=mgAB\sin\alpha\Rightarrow$$

$$v_B=\sqrt{2gAB\sin\alpha}=\sqrt{2\times 10\times 1{,}6\sin 30°}=4m.s^{-1}$$

- <u>Durée mise par la bille M pour atteindre le point B</u>

T.C.I : $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$

suivant AB : $mg\sin\alpha=ma\ \Rightarrow\ a=g\sin\alpha$

$A.N: a=10\times 0{,}5=5m.s^{-2}(MRUA)$

$x(t)=\frac{1}{2}at^2=2{,}5t^2$, *or au point B,*

$$AB=x=2{,}5t_{AB}{}^2\Longrightarrow t_{AB}=\sqrt{\frac{AB}{2{,}5}}=\sqrt{\frac{1{,}6}{2{,}5}}=0{,}8s$$

2. a)) <u>Nature du mouvement de M sur piste BC</u>

Sur la piste BC , la bille est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{R_N}$ et à la force de frottement $\vec{f}$.

T.C.I : $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$: *Suivant BC :*

$$-f=ma\ \Rightarrow a=\frac{-f}{m}=\frac{-0{,}4}{0{,}05}=-8m.s^{-2}$$

Comme a < 0, alors le mouvement de la bille M sur la portion BC est uniformément retardé.

b)) <u>Equation horaire de la bille sur la portion BC</u>

$A\ t=0{,}8s:\ x(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t=-4t^2+4t$ *et*

$$v(t)=at+v_0=-8t+4$$

c)) <u>Calcul de la distance BC</u>

- Première méthode :

Au point C, $v_C(t)=-8t+4=0\ \Rightarrow\ t_{BC}=0{,}5s$

$A\ t=0{,}5s,\ BC=x(t)=-4\times 0{,}5^2+4\times 0{,}5=1$

ou bien

T.E.C : entre B et C

$$E_C(C)-E_C(B)=W(\vec{P})+W(\vec{R_N})+W(\vec{f})$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}mv_B{}^2=-fBC\ \Rightarrow BC=\frac{mv_B{}^2}{2f}$$

$$BC=\frac{mv_B{}^2}{2f}=\frac{0{,}05\times 16}{2\times 0{,}4}=1m$$

3.a)) <u>Expression de la vitesse de la bille en E en f(g, r, et θ)</u>

T.E.C : entre C et E

$$E_C(E)-E_C(C)=W(\vec{P})+W(\vec{R}),\ Or\ E_C(C)=0$$

$$\frac{1}{2}mv_E{}^2=mgh=mgr(1-\sin\theta)$$

$$v_E=\sqrt{2gr(1-\sin\theta)}$$

b)) <u>Expression de l'intensité la réaction R au point E</u>

T.C.I : $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$, *Suivant* $\vec{N}$:

$$mg\sin\theta-R=ma_n=m\frac{v_E{}^2}{r}=2mg(1-\sin\theta)$$

$$R_E=mg(\sin\theta-2+2\sin\theta)=mg(3\sin\theta-2)$$

b)) <u>Valeur de l'angle θ_0 pour que la bille quitte la piste en E</u>

Si la bille quitte la piste E, alors :

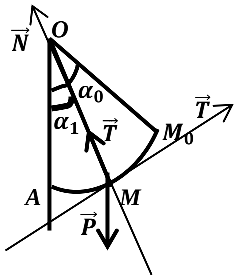
$$R_E=0\Longrightarrow 3\sin\theta_0-2\Longrightarrow\sin\theta_0=\tfrac{2}{3}\ \Rightarrow\ \theta_0=41{,}81°$$

Vitesse de la bille au point d'angle $\theta_0=41{,}81°$

$$v_0=\sqrt{2gr(1-\sin\theta_0)}=\sqrt{2.10.0{,}6\left(1-\tfrac{2}{3}\right)}=2m.s^{-1}$$

Solution 5

1. a)) Vitesse de S aux points M et A



Le solide S est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.

T.E.C : entre M_0 et M

$$E_C(M) - E_C(M_0) = W(\vec P) + W(\vec T)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgh$$

$\Rightarrow v_1 = \sqrt{{v_0}^2 + 2gh}$

Avec h $= l\cos\alpha_1 - l\cos\alpha_0 = l(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)$

soit $v_1 = \sqrt{{v_0}^2 + 2gl(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)}$

Au point A : $\alpha_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{{v_0}^2 + 2gl(1-\cos\alpha_0)}$

A.N : $v_1 = \sqrt{2^2 + 20(\cos 25° - \cos 40°)} = 2{,}6 m.s^{-1}$

$v_2 = \sqrt{2^2 + 20(1-\cos 40°)} = 2{,}95 m.s^{-1}$

b)) Tension du fil aux points M et A

T.C.I : $\vec P + \vec{T_1} = m\vec a$, Suivant $\vec N$:

$$-mg\cos\alpha_1 + T_1 = ma_n = m\frac{{v_1}^2}{l} \Rightarrow T_1 = m\left(g\cos\alpha_1 + \frac{{v_1}^2}{l}\right)$$

$$T_1 = m\left(g\cos\alpha_1 + 2g(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0) + \frac{{v_0}^2}{l}\right)$$

$$T_1 = m\left[g(3\cos\alpha_1 - 2\cos\alpha_0) + \frac{{v_0}^2}{l}\right]$$

Au point A : $\alpha_2 = 0 \Rightarrow T_2 = m\left[g(3 - 2\cos\alpha_0) + \frac{{v_0}^2}{l}\right]$

A.N : $T_1 = 0{,}2\left[10(3\cos 25° - 2\cos 40°) + \frac{2^2}{1}\right] = 3{,}17N$

$T_2 = 0{,}2\left[10(3 - 2\cos 40°) + \frac{2^2}{1}\right] = 3{,}74N$

c))) Valeur minimale de la vitesse v_0

Si on veut que la sphère fait un tour complet avec fil tendu, il faut

T ≥ 0 et α = π , donc $T_1 = m\left[g(3\cos\pi - 2\cos\alpha_0) + \frac{{v_0}^2}{l}\right] \geq 0$

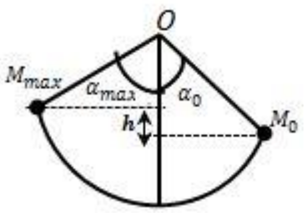
$$\Rightarrow g(-3 - 2\cos\alpha_0) + \frac{{v_0}^2}{l} \geq 0$$

${v_0}^2 \geq gl(3 + 2\cos\alpha_0)$ soit $v_{0(min)} = \sqrt{gl(3 + 2\cos\alpha_0)}$

A.N : $v_{0(min)} = \sqrt{10(3 + 2\cos 40°)} = 6{,}73 m.s^{-1}$

d)) Angle d'écartement maximal α_m

T.E.C : entre M_0 et M_{max}



$E_C(M_{max}) - E_C(M_0) = W(\vec P) + W(\vec T)$,

Or au point d'arrêt $E_C(M_{max}) = 0$

$E_C(M_0) = mgh = mgl(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_{max})$ car $\alpha_m > \alpha_0 \Rightarrow$

$\cos\alpha_0 - \cos\alpha_{max} = \frac{E_C(M_0)}{mgl} \Rightarrow \cos\alpha_{max} = \cos\alpha_0 - \frac{E_C(M_0)}{mgl}$

A.N : $\cos\alpha_{max} = \cos 40° - \frac{1{,}2}{0{,}2\times 10} = 0{,}166 \Rightarrow \alpha_{max} = 80{,}44°$ 2.

a)) Relation entre ω et θ

Le solide (S) est soumis à son poids $\vec P$ et à la tension $\vec T$ du fil

T.C.I : $\vec P + \vec T = m\vec a$, suivant x'x : $T\sin\alpha = ma_n = mr\omega^2$

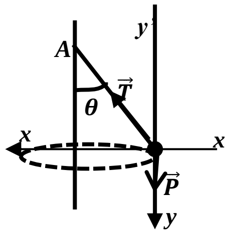
avec $r = l\sin\theta$, alors : $T = ml\omega^2$ (1)

Suivant y'y : $T\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$ (2)

(1) = (2) , alors : $ml\omega^2 = \frac{mg}{\cos\theta} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$

A.N : $\omega = \sqrt{\frac{10}{1\cos 30°}} = 3{,}4 rad.s^{-1}$

b)) Valeur de la tension T du fil



$T = \frac{mg}{\cos\theta} \Rightarrow T = \frac{0{,}2\times 10}{\cos 30°} = 2{,}31N$

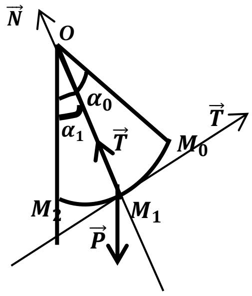
c)) Valeur minimale de ω

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$, pour la valeur minimale

de ω, cos θ ≥ 1 , alors :

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{10}{1}} = 3{,}16 rad.s^{-1}$$

EXERCICE 6



1. a)) Energie mécanique E_0

$E_0 = E_{C0} + E_{PP0} = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mgl\cos\alpha_0 = m\left(\frac{{v_0}^2}{2} - gl\cos\alpha_0\right)$

$$E_0 = 0{,}2\left(\frac{9}{2} - 9{,}8\times 0{,}8\cos 40°\right) = -0{,}3J$$

b)) Expression de v_1 et v_2

T.E.C : entre M_1 et M_0

$$E_C(M_1) - E_C(M_0) = W(\vec P) + W(\vec T)$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgh$

$v_1 = \sqrt{{v_0}^2 + 2gh}$ Avec $h = l\cos\alpha_1 - l\cos\alpha_0$

d'où : $v_1 = \sqrt{{v_0}^2 + 2gl(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0)}$

Au point M_2 : $\alpha_1 = 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{{v_0}^2 + 2gl(1-\cos\alpha_0)}$

A.N : $v_1 = \sqrt{3^2 + 2\times 9{,}8\times 0{,}8(\cos 25° - \cos 40°)}$

$v_1 = 3{,}35 m.s^{-1}$

$v_2 = \sqrt{3^2 + 2\times 9{,}8\times 0{,}8(1-\cos 40°)} = 3{,}56 m.s^{-1}$

c)) Tension du fil au points M_1

T.C.I : $\vec P + \vec{T_1} = m\vec a$, Suivant $\vec N$:

$$-mg\cos\alpha_1 + T_1 = ma_n = m\frac{{v_1}^2}{l} \Rightarrow T_1 = m\left(g\cos\alpha_1 + \frac{{v_1}^2}{l}\right)$$

$$T_1 = m(g\cos\alpha_1 + 2g(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0) + \frac{{v_0}^2}{l}$$

$T_1 = m\left[g(3\cos\alpha_1 - 2\cos\alpha_0) + \frac{{v_0}^2}{l}\right]$ *et*

Au point M_2 : $\alpha_1 = 0 \Longrightarrow T_2 = m\left[g(3 - 2\cos\alpha_0) + \frac{{v_0}^2}{l}\right]$

A.N : $T_1 = 0{,}2\left[9{,}8(3\cos 25° - 2\cos 40°) + \frac{3^2}{0{,}8}\right] = 4{,}58N$ et

$T_2 = 0{,}2\left[9{,}8(3 - 2\cos 40°) + \frac{3^2}{0{,}8}\right] = 5{,}13N$

d)) Energie mécanique en M_2

$$E_1 = E_{C1} + E_{PP1} = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - mgl = m\left(\frac{{v_2}^2}{2} - gl\right)$$

$$E_1 = 0{,}2\left(\frac{3{,}56^2}{2} - 9{,}8\times 0{,}8\right) = -0{,}3J$$

On a : $E_1 = E_0 = -0{,}3J = cste$, *entre* M_0 *et* M_2 , *il a* conservation de l'énergie mécanique, due à l'absence de résistance de l'aire (force de frottement), donc le système est conservatif.

e)) Valeur minimale de la vitesse v_0

Si on veut que la bille fasse un tour complet avec fil tendu, il faut $T_1 \geq 0$ *et* $\alpha = \pi$, *donc*

$$T_1 = m\left[g(3\cos\pi - 2\cos\alpha_0) + \frac{{v_0}^2}{l}\right] \geq 0$$

$$g(-3 - 2\cos\alpha_0) + \frac{{v_0}^2}{l} \geq 0 \Rightarrow {v_0}^2 \geq gl(3 + 2\cos\alpha_0)$$

$$\Longrightarrow v_{0(min)} = \sqrt{gl(3 + 2\cos\alpha_0)}$$

A.N : $v_{0(min)} = \sqrt{9{,}8(3 + 2\cos 40°)} = 6{,}67m.s^{-1}$

f)) Valeur de l'angle d'écartement maximal

T.E.C : entre M_0 et M_{max} :

$$E_C(M_{max}) - E_C(M_0) = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$$

Or au point d'arrêt $E_C(M_{max}) = 0$

$$E_{C0} = \frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgh = mgl(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_{max}) \Rightarrow$$

$$\cos\alpha_0 - \cos\alpha_{max} = \frac{{v_0}^2}{2gl} \Rightarrow \cos\alpha_{max} = \cos\alpha_0 - \frac{{v_0}^2}{2gl}$$

$A.N:\ \cos\alpha_{max} = \cos 40° - \frac{9}{2\times 9{,}8\times 0{,}8} = 0{,}192$

$$\Rightarrow \alpha_{max} = 78{,}92°$$

Equation horaire du mouvement

Après la rupture du fil, T=0 , $mg = ma$ alors $a = g$ (Chute libre sans vitesse initiale)

$$\Longrightarrow y = \frac{1}{2}gt^2 = 4{,}9t^2$$

Solution 7

1. a)) Vitesse v_1 juste avant le choc

La bille est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.

T.E.C : $\frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgh \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$

b)) Expression de la tension T du fil en fonction de h

T.C.I : $\vec{P} + \vec{T_1} = m\vec{a}$, Suivant $\vec{N}$:

$$-mg + T_1 = ma_n = m\frac{{v_1}^2}{l} \Rightarrow T_1 = m(g + \frac{2gh}{l})$$

2. Hauteur maximale de deux billes après le choc en f(h)

a))) Pour une collision inélastique

Dans un choc inélastique , il y a conservation du vecteur quantité de mouvement :

- Avant le choc : $\vec{P} = m\vec{v_1} + 2m\vec{v_2} = m\vec{v_1}$, *car* $v_2 = 0$

- Après le choc : $\vec{P'} = (m + 2m)\vec{v}$

$\vec{P} = \vec{P'} \Rightarrow m\vec{v_1} = (m + 2m)\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{3}\vec{v_1}$.

T.E.C : après le choc

$\frac{1}{2}(3m){v_f}^2 - \frac{1}{2}(3m)v^2 = -\frac{3}{2}mv^2 = -3mgh_{(max)}$

car au point maximal la vitesse s'annule.

$$h_{(max)} = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\times\frac{2gh}{9} = \frac{1}{9}h$$

Alors les deux billes s'élèvent d'une hauteur $h_{(max)} = \frac{1}{9}h$

b)) Pour un choc élastique

Il y a conservation de l'énergie cinétique des deux billes et de la quantité de mouvement.

- Vitesse de deux billes après le choc

Le mouvement se décompose à nouveau en 2 étapes.

- Avant le choc :

$\vec{P} = m\vec{v_1} + 2m\vec{v_2} = m\vec{v_1}$, *car* $v_2 = 0$ *et* $E_C = \frac{1}{2}m{v_1}^2$

- Après le choc :

$\vec{P'} = m\vec{v'_1} + 2m\vec{v'_2}$ *et* $E'_C = \frac{1}{2}m{v'_1}^2 + m{v_2}^2$

Lors d'un choc élastique, alors il y a deux conservations :

- Conservation du vecteur quantité de mouvement :

$\vec{P} = \vec{P'} \Rightarrow m\vec{v_1} = m\vec{v'_1} + 2m\vec{v'_2}$

$\Rightarrow mv_1 = mv'_1 + 2mv'_2 \Longrightarrow (v_1 - v'_1) = 2v'_2$ (1)

- Conservation de l'énergie cinétique

$E_C = E'_C \Rightarrow \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \frac{1}{2}m{v'_1}^2 + m{v'_2}^2$

$\Longrightarrow ({v_1}^2 - {v'_1}^2) = 2{v'_2}^2$

$\Longrightarrow (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = 2{v'_2}^2$ (2)

donc $\frac{(2)}{(1)}$ donne : $v_1 + v'_1 = v'_2$ (3)

Dans (1): $(v_1 - v'_1) = 2(v_1 + v'_1)$

$\Rightarrow v'_1 = -\frac{1}{3}v_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{2gh}$ *et* $v'_2 = \frac{2}{3}v_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$

- Hauteur maximale atteinte par les deux billes

T.E.C : après le choc :

$$\frac{1}{2}m{v_f}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}'^2 = -\frac{1}{2}m{v'_1}^2 = -mgh_{1(max)}$$

- Pour la bille de masse m : $h_{1(max)} = \frac{{v'_1}^2}{2g} = \frac{1}{2g}\times\frac{2gh}{9} = \frac{1}{9}h$

- Pour la bille de masse 2m :

$h_{2(max)} = \frac{{v'_2}^2}{2g} = \frac{1}{2g}\times\frac{8gh}{9} = \frac{4}{9}h$

Solutions sur le champ de pesanteur

Solution 1

1.a)) Vitesse de la bille M juste avant le choc

Avant le choc : $\vec{P} = m\vec{v_0}$ et $E_C = \frac{1}{2}m{v_0}^2$

Après le choc :

$$\vec{P} = m\overrightarrow{v'_0} + m'\vec{v'} \text{ et } E'_C = \frac{1}{2}m{v'_0}^2 + \frac{1}{2}m'v'^2$$

- Conservation du vecteur quantité de mouvement :

$$m\vec{v_0} = m\overrightarrow{v'_0} + m'\vec{v'} \Rightarrow mv_0 = mv'_0 + m'v' \ (1)$$

- Conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v'_0}^2 + \frac{1}{2}m'\,v'^2 \Rightarrow m{v_0}^2 = m{v'_0}^2 + m'\,v'^2 (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow v_0 + v'_0 = v' \Longrightarrow v'_0 = v' - v_0$$

$(1) : mv_0 = m(v' - v_0) + m'v'$

$$\Longrightarrow v_0 = \frac{(m' + m)}{2m}v' = \frac{(200 + 50)}{100} \times 1{,}6 = 4m.s^{-1}$$

b)) Vitesse de M juste après le choc

$v'_0 = v' - v_0 = 1{,}6 - 4 = -2{,}4m.s^{-1}$

Comme $v'_0 < 0$, alors après le choc la bille M recule vers l'arrière(choc avec recule).

2. a)) Nature du mouvement de la bille M'

Si M' quitte la gouttière, alors elle est soumis qu' à son poids $\vec{P} = m'\vec{g}$. T.C.I : $m'\vec{g} = m'\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$, alors le mouvement de M' est une chute libre avec vitesse initialement horizontale.

b)) Equation cartésienne de la trajectoire

$$\vec{v_C}\begin{vmatrix} v_{Cx} = V_C \\ v = 0 \end{vmatrix} ; \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = g \end{vmatrix} ; \overrightarrow{CM_0}\begin{vmatrix} x_C = 0 \\ y_C = 0 \end{vmatrix} ; \overrightarrow{CM}\begin{vmatrix} x = v_C t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{g}{2{v_C}^2}x^2 \Rightarrow y = \frac{10}{2 \times 1{,}6^2}x^2 \Rightarrow y = 1{,}95x^2$$

c)) Distance CK

Comme K est un point d'impact, alors :

$$y_K = 1{,}95{x_K}^2 = h \Rightarrow {x_K}^2 = \frac{80}{1{,}95} = 41\text{ , donc}$$

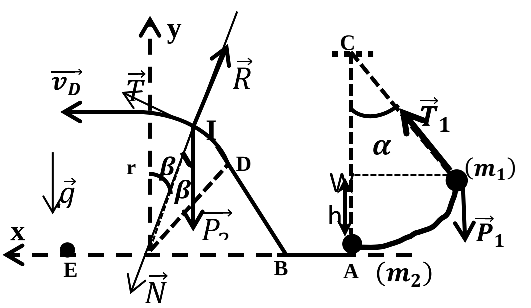
$$CK = \sqrt{{x_K}^2 + {y_K}^2} = \sqrt{41 + 80^2} = 85{,}25m$$

Solution 2

1. a)) Valeur de l'angle α

T.E.C : entre A_0 et A

$$E_C(A) = W(\vec{P}) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgl(1 - \cos\alpha)$$



$$\cos\alpha = 1 - \frac{v^2}{2gl} = 1 - \frac{9}{20 \times 0{,}9} = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 60°$$

2. Vitesse de la bille M_2 juste après le choc

Conservation de la quantité de mouvement

$$\vec{P_1} + \vec{P_2} = \overrightarrow{P'_1} + \overrightarrow{P'_2} \Rightarrow m_1\vec{v_1} + \vec{0} = m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2} \Rightarrow$$

$$v'_1 = \frac{m_1v_1 - m_2v'_2}{m_1} = \frac{0{,}2 \times 3 - 0{,}1 \times 4}{0{,}2} = 1m.s^{-1}$$

3. a)) Vitesse de M_2 en I en fonction de V, g, r et β

T.E.C : entre A et I :

$$E_C(I) - E_C(A) = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) \Rightarrow \frac{1}{2}m{v_I}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = -mgh$$

$$v_I = \sqrt{v^2 - 2gh} = \sqrt{v^2 - 2gr\cos\beta}$$

b)) Intensité de la réaction R en f (m, g, r, v et β)

T.C.I : $m_2\vec{g} + \vec{R} = m_2\vec{a}$, *Suivant* $\vec{N}$: $m_2 g\cos\beta - R = m_2\frac{{v_I}^2}{r}$

$$R = m_2(g\cos\beta + 2g\cos\beta - \tfrac{v^2}{r}) = m_2(3g\cos\beta - \tfrac{v^2}{r})$$

c)) Valeur du rayon r

Quand la bille M_2 arrive en *D*,

$$\beta = 0 \Rightarrow v_D = \sqrt{v^2 - 2gr}$$

$${v_D}^2 = v^2 - 2gr \Rightarrow r = \frac{-{v_D}^2 + v^2}{2g} = \frac{-1 + 16}{20} = 0{,}75m$$

4.a)) Equation cartésienne de la trajectoire

T.C.I : $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{v_D}\begin{vmatrix} v_{Dx} = v_D \\ v_{Dy} = 0 \end{vmatrix} ; \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix} ; \overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix} ;$$

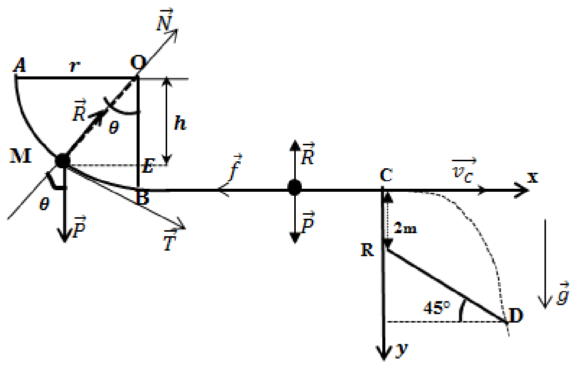
$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_D t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + r \end{vmatrix}$$

$$Donc \quad y = -\frac{g}{2{V_D}^2}x^2 + r \Rightarrow y = -5x^2 + 0{,}75$$

b)) Calcul de la distance OE

$$E\begin{vmatrix} x_E = OE \\ y_E = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow 0 = -5OE^2 + 0{,}75 \Rightarrow OE = \sqrt{\frac{0{,}75}{5}} = 0{,}387m$$

Solution 3



1. Le mobile est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$

a)) Expression de v_M en f (V_A, g, r, θ)

T.E.C : entre A et M

$$E_C(M) - E_C(A) = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) \text{ , or } W(\vec{R}) = 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_M{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2 = mgh = mgr\cos\theta$

$v_M = \sqrt{v_A{}^2 + 2gr\cos\theta}$,

Au point B, $\theta = 0 \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A{}^2 + 2gr}$

$$v_B = \sqrt{5^2 + 20} = 6{,}7 m.s^{-1}$$

b)) Expression de la réaction R_M en $f(m, v_A, g, r, \theta)$

T.C.I : $m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}$, *Suivant* $\vec{N}$ *:*

$$-mg\cos\theta + R_M = m\frac{v_M{}^2}{r} \Rightarrow R_M = m\left(g\cos\theta + \frac{v_M{}^2}{r}\right)$$

$$R_M = m\left(g\cos\theta + 2g\cos\theta + \frac{v_A{}^2}{r}\right) = m\left(3g\cos\theta + \frac{v_A{}^2}{r}\right)$$

Au point B, $\theta = 0$, alors *:* $R_B = m\left(3g + \frac{v_A{}^2}{r}\right)$

$$A.N: R_B = 0{,}1(30 + 25) = 5{,}5N$$

2. a)) Valeur de l'intensité f

Le mobile est soumis à une force de frottement $\vec{f}$

T.E.C : entre B et C

$E_C(C) - E_C(B) = W(\vec{P}) + W(\vec{R_N}) + W(\vec{f})$,

$\frac{1}{2}mv_C{}^2 - \frac{1}{2}mv_B{}^2 = -fBC \Rightarrow f = \frac{m(v_B{}^2 - v_C{}^2)}{2BC}$

$f = \frac{0{,}1(45 - 25)}{2 \times 3} = 0{,}33N$

b)) Nature du mouvement su la piste horizontale

T.C.I : $\vec{f} + \vec{R_N} + m\vec{g} = m\vec{a}$ *, Suivant x'x :*

$$-f = ma \Rightarrow a = \frac{-f}{m} = \frac{-0{,}33}{0{,}1} = -3{,}3m.s^{-2}$$

Comme $a < 0$, alors le mouvement du mobile su la piste horizontale est uniformément décéléré.

c)) Durée du trajet BC

$$\Delta v = v_C - v_B = at_{BC} \Rightarrow t_{BC} = \frac{v_C - v_B}{a} = \frac{5 - 6{,}7}{-3{,}3} = 0{,}52s$$

d)) Enoncé du théorème de l'énergie mécanique

<< La variation de l'énergie mécanique entre deux instants quelconques est égale à la somme de toutes les travaux des forces non-conservatives : $\Delta E = \sum W(\vec{F}non - consevative)$.

- Au point B: $E_B = E_C(B) = \frac{1}{2}mv_B{}^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times 45 = 2{,}25J$

- Au point C : : $E_C = E_C(C) = \frac{1}{2}mv_C{}^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times 25 = 1{,}25J$

$E(C) < E(B)$, alors il y a diminution de l'énergie mécanique due aux forces de frottement, donc le système est : « dissipatif »

3. a)) Equation cartésienne de la trajectoire

T.C.I : $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$\vec{v_C}\begin{vmatrix} v_{Cx} = v_C \\ v_{Cy} = 0 \end{vmatrix}$; $\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = g \end{vmatrix}$; $\vec{CM_0}\begin{vmatrix} x_C = 0 \\ y_C = 0 \end{vmatrix}$; $\vec{CM}\begin{vmatrix} x = v_C t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{vmatrix}$

Donc : $y = \frac{g}{2v_C{}^2}x^2 \Rightarrow y = \frac{10}{2 \times 5^2}x^2 \Rightarrow y = 0{,}2x^2$

b)) Calcul de la distance CD

Comme D est un point d'impact, alors *:*

(CD) : $y = ax + b$*,où :* $a = \tan\alpha = \tan 45° = 1$ et b=2

(CD) : $y = x + 2 \Rightarrow y = 0{,}2x^2 = x + 2$

$\Rightarrow 0{,}2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4(0{,}2)2 = 2{,}16$

$\sqrt{\Delta} = 1{,}47 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 1{,}47}{0{,}4} \Rightarrow x_D = \frac{1 + 1{,}47}{0{,}4} = 6{,}17m$ *et*

$y_D = 6{,}17 + 2 = 8{,}17m$

$\Rightarrow CD = \sqrt{x_D{}^2 + y_D{}^2} = \sqrt{6{,}17^2 + 8{,}17^2} = 10{,}23m$

- Vitesse du mobile en D $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_C \\ v_y = gt \end{vmatrix}$

$$au\ point\ D, x_D = V_C t_D \Rightarrow t_D = \frac{x_D}{V_C} = \frac{6{,}17}{5} = 1{,}23s$$

$\vec{v_D}\begin{vmatrix} v_{Dx} = v_C = 5 \\ v_{Dy} = gt = 10 \times 1{,}23 = 12{,}3 \end{vmatrix}$

$$v_D = \sqrt{5^2 + 12{,}3^2} = 13{,}27m.s^{-1}$$

c)) Comme entre C et D, il n'y a pas de frottement, alors :

$$E_m(D) = E_m(C) = 1{,}25J$$

Solution 4

1. a)) Montrons que le mouvement est plan

- Condition initiale $\vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0\sin\alpha_0 \\ v_{0z} = v_0\cos\alpha_0 \\ v_{0y} = 0 \end{vmatrix}$,$\vec{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{vmatrix}$

Le ballon est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

T.C.I : $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \\ a_y = 0 \end{vmatrix}$, $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0\sin\alpha_0 \\ v_z = -gt + v_0\cos\alpha_0 \\ v_y = 0 \end{vmatrix}$ *et*

$\vec{OM}\begin{vmatrix} x = (v_0\sin\alpha_0)t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\cos\alpha_0)t \\ y = 0 \end{vmatrix}$

Comme y = 0, alors le mouvement est plan et a eu lieu dans le plan (OX, Oz)

b)) Equation de la trajectoire

$x = (V_0\sin\alpha_0)t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0\sin\alpha_0}$

$$\Rightarrow y = -\frac{g}{2V_0{}^2 sin^2\alpha_0}x^2 + x\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}$$

La trajectoire est une parabole de concavité tourné vers le bas.

2. a)) Valeur de v_0

Le ballon passe par le point de coordonnées x=6m et z=1,95m, donc ce point est un point d'impact du ballon :

$$y = -\frac{g}{2v_0{}^2 sin^2\alpha_0}x^2 + x\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0}$$

$$\Rightarrow z - x\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0} = -\frac{g}{2v_0{}^2 sin^2\alpha_0}x^2$$

$$z\sin\alpha_0 - x\cos\alpha_0 = -\frac{g}{2v_0{}^2 sin\ \alpha_0}x^2 \Rightarrow$$

$$v_0{}^2(2zsin^2\alpha_0 - x\sin 2\alpha_0) = -gx^2$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{x\sin 2\alpha_0 - 2zsin^2\alpha_0}}$$

$$A.N: V_0 = \sqrt{\frac{10\times 6^2}{6\sin 120° - 2\times 1{,}95 sin^2 60°}} = 12{,}59 m.s^{-1}$$

b)) Temps mis par le ballon pour atteindre le mur

Le mur est situé à une distance d=6m, donc

$$x = (v_0 \sin\alpha_0)t = d\ , t = \frac{d}{v_0\sin\alpha_0} = \frac{6}{12{,}59\sin 60°} = 0{,}55s$$

c)) Expression de la Vitesse v_1 en f(g, h et v_0)

T.E.C : entre O et B

$$E_C(B) - E_C(O) = W(\vec{P}) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}\ ;\ v_1 = \sqrt{12{,}59^2 - 20\times 1{,}95} = 10{,}93 m.s^{-1}$$

d)) Expression de $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0}$ en fonction de g, h et v_0

Le mouvement du ballon est uniforme suivant Ox, car $a_x = 0$, alors : $v_{0x} = v_0 \sin\alpha_0$ et en B, $v_{1x} = v_1 \sin\alpha_1$

$$v_{0x} = v_{1x} \Rightarrow v_0\sin\alpha_0 = v_1\sin\alpha_1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0} = \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}$$

$$A.N: \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0} = \frac{12{,}59}{\sqrt{12{,}59^2 - 20\times 1{,}95}} = 1{,}15$$

- Valeur de α_1

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0} = 1{,}15 \Rightarrow \sin\alpha_1 = 1{,}15\sin\alpha_0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = sin^{-1}(1{,}15\sin\alpha_0)$$

A.N : $\alpha_1 = sin^{-1}(1{,}15\sin 60°) = 84{,}83°$

3. Valeur de la distance D, si le tir n'était pas contré

Lorsque le ballon touche le sol, z =0 : alors

$$-\frac{g}{2v_0^2 sin^2\alpha_0}x^2 + x\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0} = 0$$

$$D = x = \frac{v_0^2\sin 2\alpha_0}{g} = \frac{12{,}59^2\sin 120°}{10} = 13{,}72m$$

Solution 5

1. a)) Accélération du solide (S)

Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\overrightarrow{R_N}$, à la force de frottement $\vec{f}$ et à la force de poussée $\vec{F}$.

T.C.I : $\vec{P} + \vec{f} + \vec{F} + \overrightarrow{R_N} = m\vec{a}$

Suivant x'x : $-f + F = ma \Rightarrow a = \frac{F-f}{m} = \frac{5-1}{0{,}5} = 8 m.s^{-2}$

Comme a >0, alors le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

- Lois horaires du mouvement de (S)

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0\ ; or\ \ à\ t = 0, v_0 = 1{,}5 m.s^{-1}\ et\ x_0 = 0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t\ \ et\ v = at + v_0$$

$$\Rightarrow x(t) = 4t^2 + 1{,}5t\ \ et\ v(t) = 8t + 1{,}5$$

b)) Vitesse de (S) en B

R.I.T : $v_B^2 - v_A^2 = 2aAB \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2aAB}$

$$v_B = \sqrt{1{,}5^2 + 2\times 8} = 4{,}27 m.s^{-1}$$

- Durée mise par (S) pour atteindre le point B

$$v_B = 8t_B + 1{,}5 = 4{,}27 \Rightarrow t_{AB} = \frac{4{,}27 - 1{,}5}{8} = 0{,}35s$$

- Energie mécanique de (S) en B

$$E(B) = E_C(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}\times 0{,}5\times 4{,}27^2 = 4{,}56J$$

2. a)) Longueur de la piste BO = L

T.E.C : entre B et O : $\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -mgL\sin\alpha - fL$

$$\Rightarrow L = \frac{m(v_B^2 - v_0^2)}{2(mg\sin\alpha + f)}$$

$$A.N: L = \frac{0{,}5(4{,}27^2 - 2^2)}{2(0{,}5\times 10\sin 30° + 1)} = 1{,}03m$$

b)) Energie mécanique en O

$$E(O) = E_C(O) + E_P(O) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgL\sin\alpha$$

$$\Rightarrow E(O) = m\left(\frac{v_0^2}{2} + gL\sin\alpha\right)$$

$$A.N:\ E(O) = 0{,}5\left(\frac{2^2}{2} + 10\times 1{,}03\times\sin 30°\right) = 3{,}52J$$

3. a)) Lois horaires du mouvement de (S) dans (Ox ,Oy)

- Condition initiale

$$\vec{v_0}\left|\begin{array}{l} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \end{array}\right.\ ,\overrightarrow{OM_0}\left|\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{array}\right.$$

Le mobile est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

T.C.I : $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array}\right.,\ \vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \end{array}\right.\ \ et$$

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x = (v_0\cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t \end{array}\right.$$

Equation de la trajectoire

$$x = (v_0\cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \Rightarrow y = -\frac{g}{2V_0^2cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$

$$y = -\frac{10}{2\times 2^2cos^2 30°}x^2 + x\tan 30° \Rightarrow y = -1{,}67x^2 + 0{,}57x$$

b)) Distance OC

C est un point d'impact de la trajectoire de (S) alors :

(OC) : y = ax où $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tan\,30° = 0{,}57$

Dans la base (Ox,Oy) *:* $a = -0{,}57 \Rightarrow y = -0{,}57x$

Pour calculer la distance OC, il faut déterminer d'abord les coordonnées du point d'impact C.

$$y_C = -1{,}67x^2_C + 0{,}57x_C = -0{,}57x_C$$

$$\Rightarrow -1{,}67x^2_C + 1{,}14x_C = 0$$

$$x_C = \frac{1{,}14}{1{,}67} = 0{,}68\ \ et\ \ y_C = -0{,}57\times 0{,}68 = -0{,}39$$

$$OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \sqrt{0{,}68^2 + (-0{,}39)^2} = 0{,}78m$$

- Durée du saut

$$x_C = (v_0\,cos\,\alpha)t_C \Rightarrow t_C = \frac{x_C}{v_0\,cos\,\alpha} = \frac{0{,}68}{2\cos 30°} = 0{,}4s$$

c)) Energie mécanique du système en C

Comme l'influence de l'air est négligeable entre O et C alors :

$E(C)) = E(O) = 3{,}52J$

4. a)) Equation cartésienne de la trajectoire

Ici, $y_0 = L\sin\alpha = 5{,}15m$;d'après l'étude précédente,

$$y = -1{,}67x^2 + 0{,}57x + 5{,}15$$

b)) Distance O'C

Arrivée en C, $y_C = 0$ et $OC = x_C > 0$

$$\Rightarrow y = -1{,}67x^2 + 0{,}57x + 5{,}15 = 0$$

$\Delta = 0{,}57^2 + 4(1{,}67)(5{,}15) = 34{,}73 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5{,}9$

$$x_C = \frac{-0{,}57 \pm 5{,}9}{2(-1{,}67)} \Rightarrow x_C = \frac{-0{,}57 - 5{,}9}{-2 \times 1{,}67} = 1{,}937$$

$D'où :\ O'C = 1{,}937m$

Solution 6

1. a)) Montrons que les deux fusées ont même vecteur $\vec{a}$

Puisque ces deux fusées évoluent dans un champs de pesanteur uniforme $\vec{g}$, alors elles sont soumises aux poids $\overrightarrow{P_A} = m_A\vec{g}$ et $\overrightarrow{P_B} = m_B\vec{g}$. $T.C.I : m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

On remarque que le vecteur accélération est indépendant de la masse de la fusée, alors les fusées A et B ont même vecteur accélération

b)) Lois horaires du mouvement et équation de la trajectoire

- Pour la fusée A

Condition initiale : $\overrightarrow{v_A}\begin{vmatrix} v_{Ax} = v_A\cos\alpha \\ v_{Ay} = v_A\sin\alpha \end{vmatrix}$, $\overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}$

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix}$, $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_A\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_A\sin\alpha \end{vmatrix}$ e t

$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = (v_A\cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_A\sin\alpha)t \end{vmatrix} \Rightarrow y = -\frac{g}{2{v_A}^2cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$

La trajectoire est une parabole de concavité tourné vers le bas.

- Pour la fusée B

$\overrightarrow{v_B}\begin{vmatrix} v_{Bx} = 0 \\ v_{By} = v_B \end{vmatrix} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_Bt$

La trajectoire est une droite verticale

2. a)) Valeur de α

$$x_P = (v_A\cos\alpha)t_P \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x_P}{t_Pv_A} = \frac{30}{4 \times 51{,}4} = 0{,}1456$$

$D'où : \alpha = cos^{-1}(0{,}1456) = 81{,}60°$

b)) Distance séparant les deux fusées

$$\begin{cases} y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_A\sin\alpha)t = \frac{-1}{2} \times 9{,}8 \times 16 + 51{,}4 \times 4\sin 81{,}6° = 125m \\ y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v_Bt = \frac{-1}{2} \times 9{,}8 \times 16 + 50 \times 4 = 122m \end{cases}$$

$AB = y_A - y_B = 3m$, alors la distance séparant les deux fusées à t=4s, est AB=3m

c)) Sécurité des spectateur

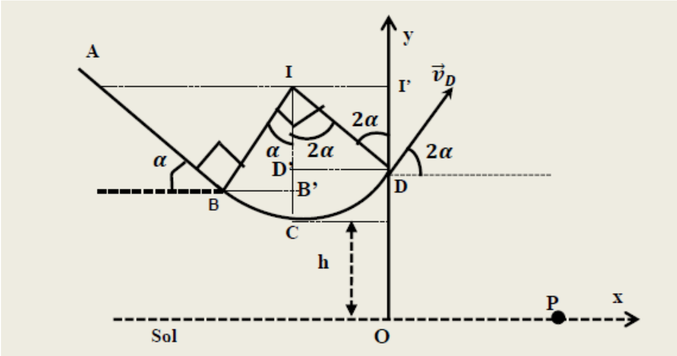
Si la fusée A explose sur le sol, alors $y = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{g}{2{v_A}^2cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha = 0$$

$$x = \frac{{v_A}^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{51{,}4^2\sin(2 \times 81{,}6°)}{9{,}8} = 77{,}9m$$

Les spectateurs se trouvent à 10m du lancement. A ce distance les spectateurs ne sont pas en sécurité car $100m > 77{,}9m$

Solution 7



1. Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$

a)) Vitesse de (S) en B

T.E.C : entre A et B

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 = mgAB\sin\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{2gAB\sin\alpha}$$

$$v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 1{,}6\sin 30°} = 4m.s^{-1}$$

- Vitesse de (S) en C

$T.E.C :\ \frac{1}{2}m{v_C}^2 - \frac{1}{2}m{v_B}^2 = mgh = mgR(1 - \cos\alpha)$

$soit\ \ v_C = \sqrt{{v_B}^2 + 2gR(1 - \cos\alpha)}$

$A.N : v_C = \sqrt{4^2 + 2 \times 10 \times 0{,}9(1 - \cos 30°)} = 4{,}29m.s^{-1}$

- Vitesse de (S) en D

T.E.C : $\frac{1}{2}m{v_D}^2 - \frac{1}{2}m{v_C}^2 = -mgh = -mgR(1 - \cos 2\alpha)$

$soit\ \ v_D = \sqrt{{v_C}^2 - 2gR(1 - \cos 2\alpha)}$

$A.N : v_D = \sqrt{4{,}29^2 - 20 \times 0{,}9(1 - \cos 60°)} = 3{,}06m.s^{-1}$

b)) Calcul de N en C

$T.C.I : \vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a},\ Suivant\ \vec{N}, R_C - mg = m\frac{{v_C}^2}{R}$

$$R_C = m\left(g + \frac{{v_C}^2}{R}\right) = 0{,}05\left(10 + \frac{4{,}29^2}{0{,}9}\right) = 1{,}52N$$

- Valeur de N en D

$T.C.I : \vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}\ , Suivant\ \vec{N},$

$$soit\ \ R_D - mg\cos 2\alpha = m\frac{{v_D}^2}{R} \Rightarrow R_D = m\left(g\cos 2\alpha + \frac{{v_D}^2}{R}\right)$$

$$R_D = 0{,}05\left(10\cos 60° + \frac{3{,}06^2}{0{,}9}\right) = 0{,}77N$$

c)) Caractéristique de $\vec{v_D}$ de (S) au point D

- Direction : vers le haut
- Sens : tangente à la trajectoire faisant un angle de 2α avec l'horizontal
- intensité : $v_D = 3{,}06m.s^{-1}$

2. a)) Equation cartésienne de la trajectoire de (S)

- Condition initiale

$$\vec{v_D}\left|\begin{matrix} v_{Dx}=v_D\cos2\alpha \\ v_{Dy}=v_D\sin2\alpha \end{matrix}\right. , \vec{OM_0}\left|\begin{matrix} x_0=0 \\ y_0=h+R(1-\cos2\alpha)=2m \end{matrix}\right.$$

Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}=m\vec{g}$

T.C.I : $m\vec{g}=m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=\vec{g}$

$$\vec{a}\left|\begin{matrix} a_x=0 \\ a_y=-g \end{matrix}\right. ; \ \vec{v}\left|\begin{matrix} v_x=v_D\cos2\alpha \\ v_y=-gt+v_D\sin2\alpha \end{matrix}\right. \ et$$

$$\vec{OM}\left|\begin{matrix} x=(v_D\cos2\alpha)t \\ y=-\frac{1}{2}gt^2+(v_D\sin2\alpha)t+y_0 \end{matrix}\right.$$

$$t=\frac{x}{v_0\cos2\alpha} \Longrightarrow y=-\frac{g}{2{v_D}^2cos^2 2\alpha}x^2+x\tan2\alpha+y_0$$

$$y=-\frac{10}{2\times3{,}06^2cos^2 60°}x^2+x\tan60°+y_0$$

$$\Rightarrow y=-2{,}13x^2+1{,}73x+2$$

b)) Hauteur maximale atteinte au-dessus du sol

Au point maximale, $\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow -4{,}23x_m+1{,}73=0 \Rightarrow$

$$x_m=\frac{1{,}73}{4{,}23}=0{,}4m \Rightarrow y_{max}=-2{,}13.0{,}4^2+1{,}73.0{,}4+2$$

$$\Longrightarrow H_{max}=y_{max}=2{,}35m$$

c)) Calcul de la distance OP

$P(x_P=OP;\ y_P=0) \Rightarrow$

$$y_P=-2{,}13OP^2+1{,}73OP+2=0$$

$$\Delta=1{,}73^2+4\times2\times2{,}13=20{,}033 \ \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4{,}48$$

$$OP=\frac{-1{,}73\pm4{,}48}{-2\times2{,}13} \ \Rightarrow OP=\frac{-1{,}73-4{,}48}{-2\times2{,}13}=1{,}46m$$

3. a)) Expression de W(f)

Entre A et D, (S) est soumis à une force de frottement $\vec{f}$

T.E.C : entre A et D

$$\Delta E_C=0=W(\vec{P})+W(\vec{f})+W(\vec{R})$$

$$\Rightarrow W(\vec{f})=-W(\vec{P})=-mghW(\vec{f})=-mgh=-mgR\cos2\alpha$$

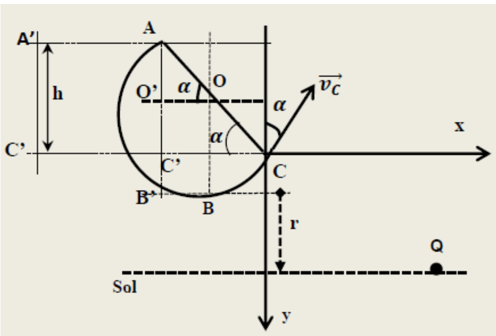
$$A.N:\ W(\vec{f})=-0{,}05\times10\times0{,}9\times\cos60°=-0{,}225J$$

d)) Intensité de la force de frottement f

$$W(\vec{f})=-fd=-f(AB+BC)=-f\left(AB+\frac{R\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f=-\frac{W(\vec{f})}{AB+\frac{R\pi}{2}}=-\frac{0{,}225}{1{,}6+\frac{0{,}9\pi}{2}}=7{,}46.10^{-2}N$$

Solution 8



1. La bille est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$

a)) Vitesse en A

T.E.C : entre A et C

$$\frac{1}{2}m{v_C}^2-\frac{1}{2}m{v_A}^2=mgh=mg2r\sin\alpha$$

car dans le triangle ACC' rectangle en C', $h=A'C'=AC'$

$$\sin\alpha=\frac{AC'}{AC}=\frac{h}{2r} \Longrightarrow h=2r\sin\alpha \Rightarrow v_A=\sqrt{{v_C}^2-4gr\sin\alpha}$$

$$A.N:\ v_A=\sqrt{3{,}75^2-40\times0{,}5\sin30°}=2m.s^{-1}$$

b) Vitesse de la bille en B

T.E.C : $\frac{1}{2}m{v_B}^2-\frac{1}{2}m{v_A}^2=mgh=mgr(1+\sin\alpha)$

car ICI , $h=AO'+O'B'=AO'+OB$

Or, dans le triangle AOO' rectangle en O',

$$\sin\alpha=\frac{AO'}{AO}=\frac{AO'}{r} \Longrightarrow AO'=r\sin\alpha \ \ et\ OB=r$$

$$h=r\sin\alpha+r=r(1+\sin\alpha) \Rightarrow v_B=\sqrt{{v_A}^2+2gr(1+\sin\alpha)}$$

$$A.N:\ v_B=\sqrt{2^2+20\times0{,}5(1+\sin30°)}=4{,}35m.s^{-1}$$

c)) Valeur de la réaction R_B

T.C.I : $m\vec{g}+\vec{R}=m\vec{a}$ *, Suivant* $\vec{N}$ *:*

$$-mg+R_B=m\frac{v^2{}_B}{r} \Rightarrow \ R_B=m\left(g+\frac{v^2{}_B}{r}\right)$$

$$A.N:R_B=0{,}05\left(10+\frac{4{,}35^2}{0{,}5}\right)=2{,}4N$$

2. La bille est soumise à une force de frottement $\vec{F}$

Vitesse de la bille en C

T.E.C : entre A et C

$$\frac{1}{2}m{v_C}^2-\frac{1}{2}m{v_A}^2=mg2r\sin\alpha-F.AC\ ,avec\ AC=r\pi \ \Rightarrow$$

$$v_C=\sqrt{{v_A}^2+4gr\sin\alpha-\frac{2Fr\pi}{m}}$$

$$A.N:v_C=\sqrt{2^2+0\times0{,}5\sin30°-\frac{2\times0{,}1\times0{,}5\pi}{0{,}05}}=2{,}78m.s^{-1}$$ 3.

a)) Equation de la trajectoire

- Condition initiale : $\vec{v_C}\left|\begin{matrix} v_{Cx}=v_C\sin\alpha \\ v_{Cy}=-v_C\cos\alpha \end{matrix}\right. , \vec{OM_0}\left|\begin{matrix} x_0=0 \\ y_0=0 \end{matrix}\right.$

Le mobile est soumis à son poids $\vec{P}=m\vec{g}$

T.C.I : $m\vec{g}=m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=\vec{g}$

$$\vec{a}\left|\begin{matrix} a_x=0 \\ a_y=g \end{matrix}\right. , \vec{v}\left|\begin{matrix} v_x=v_C\sin\alpha \\ v_y=gt-v_C\cos\alpha \end{matrix}\right. \ \ et$$

$$\vec{OM}\left|\begin{matrix} x=(v_C\sin\alpha)t \\ y=\frac{1}{2}gt^2-(v_C\cos\alpha)t \end{matrix}\right.$$

Equation de la trajectoire

$$x=(v_C\sin\alpha)t \ \Longrightarrow t=\frac{x}{v_C\sin\alpha}$$

$$y=-\frac{g}{2{v_C}^2sin^2\alpha}x^2-x\frac{1}{\tan\alpha}$$

$$A.N:y=-\frac{10}{2\times3{,}75^2sin^2 30°}x^2-x\frac{1}{\tan30°}$$

$D'où : y = 0{,}077x^2 - 1{,}73x$

b)) Coordonnées du point Q

$$Q \left| \begin{array}{l} x_Q \\ y_Q = r + (r(1+\sin\alpha) - 2r\sin\alpha) = r(2-\sin\alpha) \end{array}\right.$$

$$Q \left| \begin{array}{l} x_Q \\ y_Q = r(2-\sin\alpha) = 0{,}5(2-\sin 30°) = 0{,}75m \end{array}\right.$$

$y_Q = 0{,}07{x_Q}^2 - 1{,}73x_Q = 0{,}75$

$\Rightarrow 0{,}07{x_Q}^2 - 1{,}73x_Q - 0{,}75 = 0$

$\Delta = 1{,}73^2 + 4\times 0{,}75\times 0{,}07 = 3{,}2 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1{,}79$

$$x_Q = \frac{1{,}73 \pm 1{,}79}{2\times 0{,}07} \quad \Rightarrow x_Q = \frac{1{,}73+1{,}79}{2\times 0{,}07} = 25{,}14$$

$$D'où : \; Q \left| \begin{array}{l} x_Q = 25{,}14 \\ y_Q = 0{,}75 \end{array}\right.$$

c)) Calcul de la distance CQ

$$CQ = \sqrt{{x_Q}^2 + {y_Q}^2} = \sqrt{25{,}14^2 + 0{,}75^2} = 25{,}15m$$

Vitesse de la bille au point Q

$$x_Q = (v_C \sin\alpha)t_Q \;\Rightarrow\; t_Q = \frac{x_Q}{v_C\sin\alpha} = \frac{25{,}14}{3{,}75\sin 30°} = 13{,}40s$$

$$\overrightarrow{v_Q} \left| \begin{array}{l} v_{Qx} = v_C\sin\alpha = 3{,}75\times\sin 30° = 1{,}875 \\ v_{Qy} = gt_Q - v_C\cos\alpha = 10.13{,}40 - 3{,}75\cos 30° = 130{,}75 \end{array}\right.$$

$$v_Q = \sqrt{{v_{Qx}}^2 + {v_{Qy}}^2} = \sqrt{1{,}875^2 + 130{,}75^2} = 130{,}76m.s^{-1}$$

Solution 9

1. (S) est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$

a)) Vitesse de (S) en B

T.E.C : entre A et B

$\frac{1}{2}m{v_B}^2 = mgh = mgAB\sin\alpha \;\Rightarrow$

$$v_B = \sqrt{2gAB\sin\alpha} = \sqrt{20\times 1{,}5\sin 60°} = 5{,}09m.s^{-1}$$

b)) Accélération de (S) sur la piste AB

T.C.I : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ *, Suivant x ‘x :*

$$mg\sin\alpha = ma \;\Rightarrow a = g\sin\alpha$$

$a = 10\sin 60° = 8{,}66ms^{-1} = cste > 0$

Alors le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

c)) Lois horaires du mouvement

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = 4{,}33t^2 \;\; et \;\; v(t) = at = 8{,}66t$$

- Durée du trajet AB

Au point B, $v_B = 8{,}66t_B = 5{,}09 \;\Rightarrow t_B = \frac{5{,}09}{8{,}66} = 0{,}58s$

2. a)) Expression de v_M en f(r,g,θ , α, v_B)

T.E.C : entre B et M

$\frac{1}{2}m{v_M}^2 - \frac{1}{2}m{v_B}^2 = mgh \;\; avec\; h = r\cos\theta - r\cos\alpha$

$$v_M = \sqrt{{v_B}^2 + 2gr(\cos\theta - \cos\alpha)}$$

b)) Vitesse de (S) aux points O et C

- *Au point C :* $\theta = 0, \;\; v_C = \sqrt{{v_B}^2 + 2gr(1-\cos\alpha)}$

$$v_C = \sqrt{5{,}09^2 + 20(1-\cos 60°)} = 6m.s^{-1}$$

- Au point O, $\theta = \alpha \Rightarrow v_0 = v_B = 5{,}09m.s^{-1}$

c)) Expression de R_M en f(r, m,g,θ , α, v_B)

T.C.I : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$, Suivant $\vec{N}$:

$$-mg\cos\theta + R = ma_n = m\frac{{v_M}^2}{r} \Rightarrow R_M = m\left(g\cos\theta + \frac{{v_M}^2}{r}\right)$$

$$soit \;\; R_M = m\left(g\cos\theta + 2g(\cos\theta - \cos\alpha) + \frac{{v_B}^2}{r}\right)$$

$$D'où : \; R_M = m\left[g(3\cos\theta - 2\cos\alpha) + \frac{{v_B}^2}{r}\right]$$

- Au point $C : \theta = 0 : R_C = m\left[g(3-2\cos\alpha) + \frac{{v_B}^2}{r}\right]$

$$A.N : R_C = 0{,}2\left[10(3 - 2\cos 60°) + \frac{5{,}09^2}{1}\right] = 9{,}18N$$

- Au point O : $\theta = \alpha : \; R_0 = m\left(g\cos\alpha + \frac{{v_B}^2}{r}\right)$

$$R_0 = 0{,}2(10\cos 60 + 5{,}09^2) = 6{,}18N$$

3.a)) Equation cartésienne de la trajectoire

- Condition initiale : $\overrightarrow{v_0} \left| \begin{array}{l} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \end{array}\right.$, $\overrightarrow{OM_0} \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{array}\right.$

(S) est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

T.C.I : $m\vec{g} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array}\right. , \;\; \vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \end{array}\right. \quad et$$

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = (v_0\cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t \end{array}\right.$$

Equation de la trajectoire

$x = (v_0\cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$

$$soit \quad y = -\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$

$$y = -\frac{10}{2\times 5{,}09^2\cos^2 60°}x^2 + x\tan 60°$$

$$\Rightarrow y = -0{,}77x^2 + 1{,}73x$$

b)) Altitude maximale atteinte

Au point maximal :

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -1{,}54x + 1{,}73 = 0 \Rightarrow x = \frac{1{,}73}{1{,}54} = 1{,}12$$

$$y_{max} = -0{,}77\times 1{,}12^2 + 1{,}73\times 1{,}12 = 0{,}97m$$

c)) Distance sur l’axe Ox

Si (S) touche l’axe Oy, $y = 0 \Rightarrow -0{,}77x^2 + 1{,}73x = 0$

$$x = 0(condition\ initiale)$$

$$et \;\; x = \frac{1{,}73}{0{,}77} = 2{,}24 \Longrightarrow d = x = 2{,}24m$$

Solution 10

1. Vitesse de la bille en C

. (S) est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$

T.E.C : entre A et B

$\frac{1}{2}m{v_B}^2 = mgh = mgAB\sin\alpha$

$v_B = \sqrt{2gAB\sin\alpha} = \sqrt{20 \times 2{,}5\sin 30°} = 5m.s^{-1}$,

Comme les frottement sont négligeable entre B et C, alors : $v_C = v_B = 5m.s^{-1}$

2. Vitesse de la bille B_1 juste après le choc

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement $\vec{P}$

$\overrightarrow{P_{Avant}} = \overrightarrow{P_{Après}} \Leftrightarrow m_1\overrightarrow{v_C} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v'}_2$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{m_1v_C - m_2v'_2}{m_1} = \frac{0{,}2 \times 5 - 0{,}3 \times 4}{0{,}2} = -1m.s^{-1}$$

3.a)) Equation cartésienne de la trajectoire

- Condition initiale

$$\overrightarrow{v_D}\begin{vmatrix} v_{Dx} = v_D\cos\theta \\ v_{Dy} = v_D\sin\theta \end{vmatrix} , \overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}$$

(S) est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

$T.C.I : m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix} , \vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_D\cos\theta \\ v_y = -gt + v_D\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = (v_D\cos\theta)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_D\sin\theta)t \end{vmatrix}$$

$$x = (v_D\cos\theta)t \Rightarrow t = \frac{x}{v_D\cos\theta} \Rightarrow y = -\frac{g}{2v_D{}^2cos^2\theta}x^2 + x\tan\theta$$

$$y = -\frac{10}{2 \times 3{,}5^2cos^245°}x^2 + x\tan 45°$$

$$D'où: \ y = -0{,}83x^2 + x$$

b)) Détermination de la distance *EE'*

E' est un point d'impact de la trajectoire de (B_2) :

$y_{E'} = -0{,}83x_{E'}{}^2 + x_{E'}$, *or* $y_{E'} = -ED = -(h + h')$

- Détermination de h'

$T.E.C : \frac{1}{2}mv_D{}^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = -mgh' \Rightarrow h' = \frac{v_0{}^2 - v_D{}^2}{2g}$

$$h' = \frac{4^2 - 3{,}5^2}{20} = 0{,}1875m$$

$y_{E'} = -(h + h') = -(1{,}2 + 0{,}1875) = -1{,}3875m$

$-0{,}83x_{E'}{}^2 + x_{E'} + 1{,}3875 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 1 + 4(0{,}83)(1{,}3875) = 5{,}61 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2{,}36$

$$x_{E'} = \frac{-1 \pm 2{,}36}{-2 \times 0{,}83} \Rightarrow x_{E'} = \frac{-1 - 2{,}36}{-2 \times 0{,}83} = 2{,}02m$$

soit $EE' = x_{E'} = 2{,}02m$

On peut aussi déduire la longueur du fil :

$$h' = l(1 - \cos\theta) \Rightarrow l = \frac{h'}{1 - \cos\theta} = \frac{0{,}1875}{1 - \cos 45°} = 0{,}64m$$

4. Les frottements sur la piste AC sont équivalents à une force unique $\vec{f} = \frac{1}{10}m_1\vec{g}$.

a)) Vitesse de (B_1) aux points B et C

T.E.C : entre A et B : $\frac{1}{2}mv_B{}^2 = mgAB\sin\alpha - \frac{1}{10}mgAB$

$$v_B = \sqrt{2gAB(\sin\alpha - 0{,}1)}$$

$$A.N: \ v_B = \sqrt{20 \times 2{,}5(\sin 30° - 0{,}1)} = 4{,}47m.s^{-1}$$

T.E.C :entre B et C

$\frac{1}{2}mv_C{}^2 - \frac{1}{2}mv_B{}^2 = -\frac{1}{10}mg(2l)$

$$\Rightarrow v_C = \sqrt{v_B{}^2 - \frac{2gl}{5}} = \sqrt{4{,}47^2 - \frac{20 \times 0{,}64}{5}} = 4{,}17m.s^{-1}$$

b)) Nature du mouvement de (B_1) sur la piste BC

T.C.I : $\vec{f} + \vec{P} + \vec{R} = m_1\vec{a}$

Suivant x'x : $-f = m_1a \Rightarrow a = -0{,}1 \times 10 = -1m.s^{-2}$

a < 0 , le mouvement est uniformément retardé.

- Lois horaires du mouvement

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$; *or* à $t = 0, v_0 = 4{,}47m.s^{-1}$ *et* $x_0 = 0$

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ *et* $v = at + v_0 \Rightarrow$

$x(t) = -0{,}5t^2 + 4{,}47t$ *et* $v(t) = -t + 4{,}47$

c)) Durée totale du mouvement : $t_{AC} = t_{AB} + t_{BC}$

- *Détermination de la durée du trajet AB*

T.C.I : $\vec{f} + \vec{P} + \vec{R} = m_1\vec{a}$ *Suivant x'x :*

$$-\frac{1}{10}m_1g + m_1g\sin\alpha = m_1a$$

$$a = g(\sin\alpha - 0{,}1) = 10(\sin 30° - 0{,}1) = 4m.s^{-2}$$

$x(t) = \frac{1}{2}at^2$, *en B :* $x_B = AB = \frac{1}{2}at^2{}_{AB}$

$$\Rightarrow t_{AB} = \sqrt{\frac{2AB}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 2{,}5}{4}} = 1{,}1s$$

- Détermination de la durée du trajet BC

$v(t) = -t + 4{,}17$, *au point C :* $v_C = -t_{BC} + 4{,}47 = 4{,}17m.s^{-1}$

$$t_{BC} = 4{,}47 - 4{,}17 = 0{,}3s \Longrightarrow t_{AC} = 1{,}1 + 0{,}3 = 1{,}4s$$

b)) Vitesse du système (S) après le choc

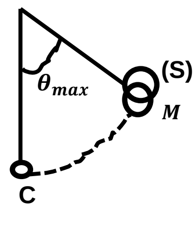
Appliquons la conservation de la quantité de mouvement $\vec{P}$

$\vec{P}_{Avant} = \overrightarrow{P_{Après}} \Leftrightarrow m_1\overrightarrow{v_1} = (m_1 + m_2)\vec{v} \Rightarrow v = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1$

$v = \frac{200}{500} \times 4{,}17 = 1{,}7m.s^{-1}$,

la vitesse du système (S) après le choc est $v = 1{,}7m.s^{-1}$.

- Hauteur maximale atteinte



T.E.C : entre C et M :

$$-\frac{1}{2}Mv^2 = -Mgh_{max}$$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{v^2}{2g} = \frac{1{,}7^2}{20} = 0{,}14m$$

- Amplitude maximale

$$h_{max} = l(1 - \cos\theta_{max}) \Rightarrow \cos\theta_{max} = 1 - \frac{h_{max}}{l}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{0{,}14}{0{,}64} = 0{,}78 \Rightarrow \theta_{max} = 38{,}74°$$

Solution 11

1. Calcul de la distance AB

Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

et à la réaction $\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$.

T.E.C : entre A et B :

$$-\frac{1}{2}m{v_A}^2 = -mgAB\sin\alpha - fAB \implies AB = \frac{m{v_A}^2}{2(mg\sin\alpha + f)}$$

$$AB = \frac{0{,}05\times 6^2}{2(0{,}05\times 10\sin 60° + 10^{-2})} = 2{,}03m$$

2. Vitesse (S) en C

T.E.C : entre B et C

$$\tfrac{1}{2}m{v_C}^2 = -mgr\cos\theta \Rightarrow v_C = \sqrt{2gr\cos\theta}$$

$$v_C = \sqrt{20\times 0{,}5\cos\frac{\pi}{4}} = 2{,}66m.s^{-1}$$

3. a)) Equation cartésienne de la trajectoire

- Condition initiale : $\overrightarrow{v_C}\begin{vmatrix} v_{Cx} = v_C\cos\alpha \\ v_{Cy} = v_C\sin\alpha \end{vmatrix}$, $\overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{vmatrix}$

Où $h = AB\sin\alpha - r\cos\theta = 2{,}03\sin 60° - 0{,}5\cos 45° = 1{,}4m$

Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

T.C.I : $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix}$, $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_C\cos\alpha \\ v_y = gt - v_C\sin\alpha \end{vmatrix}$

$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = (v_C\cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_C\sin\alpha)t + h \end{vmatrix}$

$x = (v_C\cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{x}{v_C\cos\alpha} \Rightarrow$

$$y = -\frac{g}{2{v_C}^2 cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h$$

$$\Rightarrow y = -\frac{10}{2\times 2{,}66^2 cos^2 60°}x^2 + x\tan 60° + 1{,}4$$

$$\Rightarrow y = -2{,}82x^2 + 1{,}73x + 1{,}4$$

b)) Coordonnées du point D

$D\begin{vmatrix} x_D \\ y_D = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow -2{,}82{x_D}^2 + 1{,}73x_D + 1{,}4 = 0$

$\Delta = 1{,}73^2 + 4\times 2{,}82\times 1{,}4 = 18{,}79 \implies \sqrt{\Delta} = 4{,}33$

$$x_D = \frac{-1{,}73 \pm 4{,}33}{2(-2{,}82)} \Rightarrow x_D = \frac{-1{,}73 - 4{,}33}{2(-2{,}82)} = 1{,}07m$$

D'où : $D\begin{vmatrix} x_D = 1{,}07 \\ y_D = 0 \end{vmatrix}$

Solution 12

1. Montrons que : $y = -\frac{9{,}8}{{v_0}^2}x^2 + x + 2$

- Condition initiale : $\overrightarrow{v_0}\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \end{vmatrix}$,$\overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = h = 2 \end{vmatrix}$

Le ballon est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

T.C.I : $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix}$; $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \end{vmatrix}$

$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = (v_0\cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t + y_G \end{vmatrix}$

$x = (v_0\cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0\cos\alpha} \Rightarrow$

$$y = -\frac{g}{2{v_0}^2 cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + y_G$$

$$\Rightarrow y = -\frac{9{,}8}{2{v_0}^2 cos^2 45°}x^2 + x\tan 45° + 2$$

$$\Rightarrow y = -\frac{9{,}8}{{v_0}^2}x^2 + x + 2$$

2. Valeur de la vitesse v_0

Le centre de la panier a pour coordonnées : C(d ;h)

$$h = -\frac{9{,}8\ d^2}{{v_0}^2} + d + 2 \Rightarrow -\frac{9{,}8\ d^2}{{v_0}^2} = h - d + 2 \Rightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9{,}8d^2}{d + 2 - h}} = \sqrt{\frac{9{,}8\times 7{,}1^2}{7{,}1 + 2 - 3{,}05}} = 9{,}04m.s^{-1}$$

3. a)) Durée mise par le ballon pour atteindre le point C

$$x_C = (v_0\cos\alpha)t_C = d \Rightarrow t_C = \frac{d}{v_0\cos\alpha} = \frac{7{,}1}{9{,}04\cos 45°} = 1{,}1s$$

b)) Vitesse du panier lorsque le panier est marqué

T.E.C : $\frac{1}{2}m{v_C}^2 - \frac{1}{2}m{v_G}^2 = -mgH' \Rightarrow v_C = \sqrt{{v_0}^2 - 2gH'}$

Où : $H' = H - h = 3{,}05 - 2 = 1{,}05m$

$$v_C = \sqrt{9{,}04^2 - 2\times 9{,}8\times 1{,}05} = 7{,}23m.s^{-1}$$

c)) Le panier sera marqué si et seulement si les coordonnées du Joueur B ne vérifie pas l'équation de la trajectoire:

$$y = -0{,}12x^2 + x + 2$$

$B(0{,}90\ ;\ 2{,}70)$:

$$y_B = -0{,}12\times 0{,}90^2 + 0{,}90 + 2 = 2{,}80 \neq 2{,}70$$

Comme le point B n'appartient pas à la trajectoire du ballon.

Alors le panier sera marqué.

Solution 13

1. Equation de la trajectoire

- Condition initiale : $\overrightarrow{v_0}\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \end{vmatrix}$,$\overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{vmatrix}$

Le poids est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

T.C.I : $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix}$; $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \end{vmatrix}$

$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = (v_0\cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t + h \end{vmatrix}$

$x = (v_0\cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0\cos\alpha} \Rightarrow$

$$y = -\frac{g}{2{v_0}^2 cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h$$

2. Expression de v_0 en fonction de v_0, h, x_1, g et α

Lorsque le poids arrive en C, y=0 et $x = x_1$

$$y = -\frac{g}{2{v_0}^2 cos^2\alpha}{x_1}^2 + x_1\tan\alpha + h = 0$$

$$\frac{g}{2v_0^2cos^2\alpha}x_1^2 = x_1 \tan\alpha + h$$

$$\Rightarrow 2v_0^2cos^2\alpha(x_1\tan\alpha + h) = gx_1^2$$

$$soit\ v_0 = \sqrt{\frac{gx_1^2}{2(x_1\tan\alpha + h)cos^2\alpha}}$$

$$A.N: v_0 = \sqrt{\frac{10\times 19{,}43^2}{2(19{,}43\tan 45° + 1{,}80)cos^2 45°}} = 13{,}33m.s^{-1}$$

3. Hauteur maximale atteinte

$$h_{max} = \frac{v_0^2sin^2\alpha}{g} + h = \frac{13{,}33^2sin^2 45°}{10} + 1{,}80 = 10{,}68m$$

Coordonnées du vecteur vitesse au sommet de la trajectoire

$$\vec{v}\left|\begin{matrix} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = 0\end{matrix}\right.$$

4. Norme du vecteur vitesse du projectile au point C

Il faut d'abord chercher la durée du saut : Or C est un point d'impact de la trajectoire et le mouvement suivant Ox est uniforme alors $x_1 = x = (v_0\cos\alpha)t_1$

Durée de saut :

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0\cos\alpha} = \frac{19{,}43}{13{,}33cos45°} = 2{,}06s$$

Coordonnées de $\vec{v}$ à l'instant t_1

$$\vec{v}\left|\begin{matrix} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt_1 + v_0\sin\alpha\end{matrix}\right.$$

$$v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (-gt_1 + v_0\sin\alpha)^2}$$

$$v_1 = \sqrt{(13{,}33\,cos\,45°)^2 + (-10\times 2{,}06 + 13{,}33sin\,45°)^2}$$

$$D'où : v_1 = 14{,}62m.s^{-1}$$

5. Energie mécanique du poids en A et en C

Ici, il faut comprendre que le niveau de l'énergie potentielle sera prise nulle en A.

- Au point A : $E(A) = E_C(A) + E_{PP}(A)$

$or\ EPP(A) = 0$ (début du mouvement)

$$E(A) = E_C(A) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\times 7{,}35\times 13{,}33^2 = 653J$$

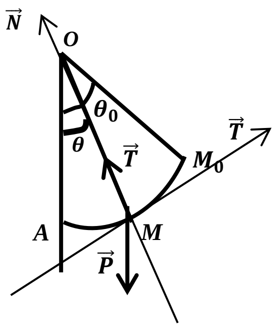
- au point C : $E(C) = E_C(C) + E_{PP}(C)$

$$E(C) = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + mgz = m\left(\tfrac{v_C^2}{2} - gh\right)\quad car\ \ z = -h$$

$$E(C) = 7{,}35\left(\frac{14{,}62^2}{2} - 10\times 1{,}80\right) = 653J$$

On remarque que $E(A) = E(C) = 653J = cste$, l'énergie mécanique du système se conserve, cette conservation est due à l'absence de l'influence de l'aire et les autres frottement divers. D'où le système est conservatif

Solution 14



A.1. a)) Valeur de v_0

La bille est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.

T.E.C : entre A et O :

$$E_C(O) - E_C(A) = W(\vec{P}) + W(\vec{T}) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh$$

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gl(1 - cos\,\theta_0)}$$

$$A.N:\ \ v_0 = \sqrt{4^2 + 20(1 - cos\,60°)} = 5{,}09m.s^{-1}$$

2. a)) Expression de V en f(v_1,g,l,θ_0, θ)

T.E.C : entre A et M

$$E_C(M) - E_C(A) = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = mgh$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2gh}\quad Avec\ h = l\cos\theta - l\cos\theta_0$$

$$soit\ \ v = \sqrt{v_1^2 + 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

b)) Tension du fil au points M

T.C.I : $\vec{P} + \vec{T_1} = m\vec{a}$, *Suivant* $\vec{N}$:

$$-mg\,cos\,\theta + T = ma_n = m\frac{v^2}{l} \Rightarrow T = m\left(g\,cos\,\theta + \frac{v^2}{l}\right)$$

$$\Rightarrow T = m(g\,cos\,\theta + 2g(cos\,\theta - cos\,\theta_0) + \frac{v_1^2}{l}$$

$$D'où\ : T = m\left[g(3\,cos\,\theta - 2cos\,\theta_0) + \tfrac{v_1^2}{l}\right]$$

3. Valeur minimale de la vitesse v_1

Si on veut que la bille fasse un tour complet avec fil tendu, il faut $T \geq 0$ et $\alpha = \pi$, donc

$$T_1 = m\left[g(3\,cos\,\pi - 2cos\,\theta_0) + \tfrac{v_1^2}{l}\right] \geq 0$$

$$g(-3 - 2cos\,\theta_0) + \tfrac{v_1^2}{l} \geq 0\ \Rightarrow v_1^2 \geq gl(3 + 2cos\,\theta_0) \Rightarrow$$

$$v_{1(min)} = \sqrt{gl(3 + 2cos\,\theta_0)}$$

$$A.N : v_{1(min)} = \sqrt{10(3 + 2cos\,60°)} = 6{,}32m.s^{-1}$$

B. 1. Vitesse de la bille à son passage en O

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gl(1 - cos\,\theta_0)}$$

$$v_0 = \sqrt{6{,}25^2 + 20(1 - \cos 60°)} = 7m.s^{-1}$$

2. Equation de la trajectoire

$$A\ t{=}0,\ \vec{v_0}\left|\begin{matrix} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0\end{matrix}\right.\quad ;\quad \overrightarrow{OM_0}\left|\begin{matrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0\end{matrix}\right.$$

La bille est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

T.C.I : $m\vec{g} = m\vec{a}\ \Rightarrow\ \vec{a} = \vec{g}$

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = g \end{vmatrix}$; $\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{vmatrix}$

$y = \frac{g}{2{v_0}^2}x^2$: $y = \frac{10}{2\times7^2}x^2 \Rightarrow y = 0{,}1x^2$

3. Abscisse du point C

Comme C est un point d'impact, alors :

$$y_C = 0{,}1{x_C}^2 = h \Rightarrow x_C = \sqrt{10h} = \sqrt{10\times1} = 3{,}16m$$

C. 1. a)) Tension T du fil

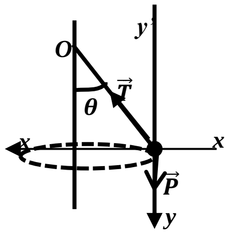
Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil

T.C.I : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

suivant x'x : $Tsin\alpha = ma_n = mr\omega^2$ $avec\ \ r = lsin\theta$,

$T = ml\omega^2 = ml(2\pi N)^2 = 0{,}1\times(2\pi\times1{,}5)^2 = 8{,}88N$

- Valeur de l'angle θ



Suivant y'y : $Tcos\theta - mg = 0 \Rightarrow$

$\cos\theta = \frac{mg}{T} = \frac{0{,}1\times10}{8{,}88} = 0{,}112$

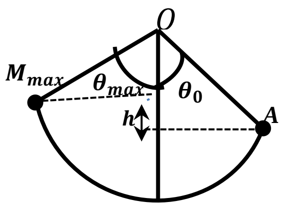
Alors : $\theta = 83{,}57°$

b)) Valeur de N si $\theta_0 = 60°$

$$T = ml(2\pi N)^2 = \frac{mg}{\cos\theta_0} \Rightarrow N = \sqrt{\frac{g}{(2\pi)^2 l\cos\theta_0}}$$

$$N = \sqrt{\frac{10}{(2\pi)^2\cos 60°}} = 0{,}71Hrz$$

2. a)) Valeur de l'angle d'écartement maximal



T.E.C : entre A et M_{max}

$E_C(M_{max}) - E_C(A) = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$

Or au point d'arrêt $E_C(M_{max}) = 0$

$$E_{C1} = mgh = mgl(cos\,\theta_0 - cos\,\theta_{max}) \Rightarrow$$

$$cos\,\theta_0 - cos\,\theta_{max} = \frac{E_{C1}}{mgl} \Rightarrow cos\,\theta_{max} = cos\,\theta_0 - \frac{E_{C1}}{mgl}$$

$$A.N:\ cos\,\theta_{max} = cos\,60° - \frac{0{,}28}{1} = 0{,}22 \Rightarrow \theta_{max} = 77{,}29°$$

b)) Equation horaire du mouvement

Après la rupture du fil, $T = 0$,

$$mg = ma\,,alors\ a = g \Rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2$$

Solutions sur le champ gravitationnel

Solution 1

1. Détermination de la masse de la Terre

$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Longrightarrow M_T = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \times (42164.10^3)^2}{6,67\times10^{-11}\times86164^2} = 6\times10^{24}kg$

2. a)) Calculons la masse du planète de mars

$$M_M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

- Pour le Phobos : $r = 9380km = 9380\times10^3 m$ *et*

$$T = 7h39min = 7\times3600 + 39\times60 = 27,54\times10^3 s$$

$$M_M = \frac{4\pi^2(9380.10^3)^3}{6,67.10^{-11}\times(27,54\times10^3)^2} = 6,52\times10^{23}kg$$

- Pour Deimos : $r = 23460km = 23460\times10^3 m$ *et*

$$T = 30h18min = 30\times3600 + 18\times60 = 109,08\times10^3 s$$

$$M_M = \frac{4\pi^2(23460.10^3)^3}{6,67.10^{-11}\times(109,08\times10^3)^2} = 6,50\times10^{23}kg$$

b)) Pour les deux satellites la masse du planète masse est :

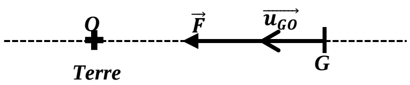
$M_M = 6,5\times10^{23}kg$

3. Valeur de la masse de la Lune

$$M_L = \frac{4\pi^2(2040.10^3)^3}{6,67.10^{-11}\times(8240)^2} = 7,50\times10^{22}kg$$

Solution 2

1. a)) Loi de l'attraction gravitationnelle



$\vec{F} = G\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{u_{GO}} = G\frac{mM_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_{GO}}$

b)) Expression de F en fonction de m , g_0, R et h

$F = G\frac{mM_T}{(R+h)^2}$ *Or au sol* $GM_T = g_0R^2 \Rightarrow F = \frac{mg_0R^2}{(R+h)^2}$

c)) Application numérique pour h $=h_H$ = 600 km

$$F = \frac{12\times10^3\times9,8\times(6380.10^3)^2}{(6380.10^3+600.10^3)^2} = 9,82\times10^4 N$$

2. a)) Montrons que le mouvement est circulaire uniforme

En appliquant le théorème de centre d'inertie :

$$\vec{F} = G\frac{mM_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_{GO}} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = G\frac{M_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_{GO}}$$

Alors le vecteur accélération est radial (porté par le rayon GO) et centripète (même sens que $\overrightarrow{GO}$), il n'y a donc pas d'accélération tangentielle : $a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow v = cste$ *:*

Donc le mouvement est uniforme

Par ailleurs l'orbite du satellite est circulaire, alors son mouvement est circulaire uniforme.

b)) Expression de la vitesse v

$a = \frac{v^2}{R+h} = \frac{GM_T}{(R+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R+h}}$ *, Or au sol* $GM_T = g_0R^2$

$$v = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}} = 6380\times10^3\sqrt{\frac{9,8}{6380\times10^3+600\times10^3}}$$

$v = 7,56\times10^3 m.s^{-1}$

b)) Valeur de la période de révolution T

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R+h)}{R}\times\sqrt{\frac{R+h}{g_0}} = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}$$

$$T = \frac{2\pi}{6380\times10^3}\sqrt{\frac{(6380\times10^3+600\times10^3)^3}{9,8}}$$

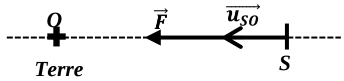
$T = 5,80\times10^3 s$

Solution 3

1. a)) La trajectoire du satellite est définie dans le référentiel géocentrique (lié à la terre).

b)) Montrons que le mouvement est circulaire uniforme

$\vec{F} = -G\frac{mM_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_{SO}}$



En appliquant le théorème de centre d'inertie *:*

$$\vec{F} = -G\frac{mM_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_{SO}} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = G\frac{M_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_{SO}}$$

Alors le vecteur accélération est radial (porté par le rayon SO) et centripète (même sens que $\overrightarrow{SO}$), il n'y a donc pas d'accélération tangentielle : $a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow v = cste$ M.U

Par ailleurs l'orbite du satellite est circulaire, alors son mouvement est circulaire uniforme

c)) Expression de v en fonction de R, g_0 *et* z

T.C.I : $\vec{F} = m\vec{g} = G\frac{mM_T}{(R+z)^2}\overrightarrow{u_{SO}} \Longrightarrow \vec{g} = G\frac{mM_T}{(R+z)^2}\overrightarrow{u_{SO}}$

$g = G\frac{mM_T}{(R+z)^2}$ *or au sol* $z = 0$ *,* $g_0 = \frac{GM_T}{R^2} \Longrightarrow GM_T = g_0R^2$

$M.C.U : a = \frac{v^2}{R+z} = \frac{GM_T}{(R+Z)^2}$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R+Z}} = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R+Z}}$

2. a)) Un satellite géostationnaire est un satellite qui reste fixe à un point de la terre et dont sa période propre est celle de la Terre.

b)) Expression du rayon de l'orbite en fonction g_o, R_T *et* ω_T

$v = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R+Z}} = R_T\sqrt{\frac{g_0}{r}} = r\omega_T \Rightarrow {R_T}^2\frac{g_0}{r} = r^2{\omega_T}^2$

soit $r^3 = \frac{g_{0}{R_T}^2}{{\omega_T}^2}$

$r = \sqrt[3]{\frac{g_0{R_T}^2}{{\omega_T}^2}} = \sqrt[3]{\frac{9,8\times(6380\times10^3)^2}{(7,29\times10^{-5})^2}} = 4,2183\times10^7 m$

c)) Un tel satellite est utilisé comme relais de télécommunication (pour transmettre des informations).

II. 1. Vitesse du satellite et son énergie cinétique

$$v = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R+Z}} \quad et \quad E_C = \frac{1}{2}mv^2 où$$

$$v = 6380.10^3.\sqrt{\frac{9,8}{6380\times10^3+705\times10^3}} = 7,50\times10^3 m.s^{-1}$$

$$E_C = \frac{1}{2}\times 2000\times(7,50\times10^3)^2 = 5,625\times10^{10}J$$

2. Calculons l'énergie potentielle du satellite

$$E = E_C + E_P$$

$$E_P = -\frac{G.M_T.m_{Sat}}{r} = -\frac{mg_0R^2{}_T}{R_T+z}$$

$$E_P = -\frac{2\times10^3\times9,8\times(6380\times10^3)^2}{6380\times10^3+705\times10^3} = -1,126\times10^{11}J$$

$$E = 5,625\times10^{10} - 1,126\times10^{11} = -5,63\times10^{10}J$$

3. a)) Valeur de l'énergie mécanique minimale

$$E_m = E_C + E_P = 0 \Longrightarrow E_C = -E_P = \frac{mg_0R^2{}_T}{R_T} \quad car\ au\ sol\ z = 0$$

$$E_{min} = E_C = \frac{2\times10^3\times9,8\times6380\times10^3}{6380\times10^3} = 1,25\times10^{11}J$$

b)) Vitesse de libération de ce satellite

$$E_{min} = E_C = \frac{1}{2}m_Sv_L{}^2 \Longrightarrow v_L = \sqrt{\frac{2E_m}{m_S}}$$

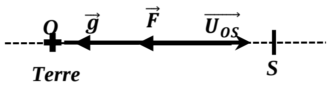
$$v_L = \sqrt{\frac{2\times1,25\times10^{11}}{2000}} = 1,118\times10^4 m.s^{-1}$$

Or pour $R_T = 6400km$:

$$v_l = 11,2km.s^{-1} \approx V_L = 11,18km.s^{-1}$$

Solution 4

I. 1. a)) Schéma



b)) Expression de g (h) en fonction de G ,M, R, h

$$\vec{F} = -G\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{U_{OS}} = -G\frac{mM_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}} = m\overrightarrow{g(h)}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{g(h)} = -G\frac{M_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}}$$

Au sol : $h = 0 \Longrightarrow g_0 = \frac{GM_T}{R_T{}^2} \Longrightarrow GM_T = g_0R_T{}^2$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{g(h)} = -g_0\frac{R_T{}^2}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}} \Longrightarrow g(h) = g_0\frac{R_T{}^2}{(R+h)^2}$$

c)) Montrons que le mouvement du satellite est uniforme

En appliquant le théorème de centre d'inertie :

$$\vec{F} = G\frac{mM_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_{OS}} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = G\frac{M_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_{OS}}$$

Alors le vecteur accélération est radial (porté par le rayon OS) et centripète (même sens que $\overrightarrow{SO}$), il n'y a donc pas d'accélération tangentielle : $a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow v = cste$:

Donc le mouvement est uniforme.

3. Expression de la vitesse v et de la période T et de la vitesse angulaire ω

M.C.U : $a = \frac{v^2}{R_T+h} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}$

$$Or\ au\ sol :\ GM_T = g_0R_T{}^2 \Longrightarrow v = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_T+h)}{R_T}\times\sqrt{\frac{R_T+h}{g_0}} = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = R_T\sqrt{\frac{g_0}{(R_T+h)^3}}$$

III. 1. Application numérique

$$v = 6380\times10^3\sqrt{\frac{9,8}{6380\times10^3+7,8\times10^5}}$$

$$v = 7,46\times10^3 m.s^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{6380\times10^3}\sqrt{\frac{(6380\times10^3+7,8\times10^5)^3}{9,8}}$$

$$T = 6,027\times10^3 s$$

$$\omega = 6380\times10^3\sqrt{\frac{9,8}{(6380\times10^3+7,8\times10^5)^3}} = 1,042\times10^{-3}rad.s^{-1}$$

2. Temps qui sépare deux passages successif du satellite

Les équations horaires du mouvement

$$\begin{cases}\text{Pour le satellite S : } \theta_S = \omega_S t - 2\pi \\ \text{Pour la terre : } \theta_T = \omega_T t\end{cases} \Longrightarrow \theta_S = \theta_T$$

$$\Longrightarrow \omega_S t - 2\pi = \omega_T t$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega_S-\omega_T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_S}-\frac{2\pi}{T_0}} = \frac{T_S\times T_0}{T_S-T_0}$$

$$t = \frac{6,027\times10^3\times8,6\times10^4}{8,6\times10^4-6,027\times10^3} = 6,48\times10^3 s$$

III. 1. Un satellite géostationnaire est un satellite dont son orbite est dans le plan équatorial, celui-ci tourne dans le même sens que la terre, il apparait immobile à un observateur terrestre. C'est donc un engin qui a la même vitesse de rotation que celle de la terre.

2. Calcul de l'altitude h d'un satellite géostationnaire

$$T_0 = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}} \Longrightarrow \frac{T_0{}^2R_T{}^2}{4\pi^2} = \frac{(R_T+h)^3}{g_0}$$

$$\Longrightarrow R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T_0{}^2R_T{}^2g_0}{4\pi^2}} \Longrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{T_0{}^2R_T{}^2g_0}{4\pi^2}} - R_T$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(8,6\times10^4)^2(6380\times10^3)^2\times9,8}{4\pi^2}} - 6380\times10^3$$

$$h = 3,55\times10^7 m$$

IV. 1. Relation entre h_{n+1} *et* h_n

Si la réduction d'altitude à la fin de chaque tour est supposée égale au millième de l'altitude au début en début de tour , alors :

$$\Delta h = \frac{h_0}{10^3} \Rightarrow h_{n+1} = h_n - \frac{h_n}{10^3} = h_n\left(1 - \frac{1}{1000}\right)$$

$Soit: \ h_n = 0{,}999h_n$

2. <u>Relation entre</u> h_n *et* h_0

$h_{n+1} = 0{,}999h_n$, alors l'altitude se réduit géométriquement, donc $h_n = (0{,}99)^n h_0$

3. <u>Nombre de tours effectués si $h_n = 100km$</u>

$$h_n = (0{,}99)^n h_0 \Rightarrow \ln\left(\frac{h_n}{h_0}\right) = \ln(0{,}99)^n = n\ln(0{,}999)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{h_n}{h_0}\right)}{\ln(0{,}999)} \quad A.N: \ n = \frac{\ln\left(\frac{400}{780}\right)}{\ln(0{,}999)} = 6{,}67 \times 10^2 tours$$

<u>Solution 5</u>

1. <u>Expression de l'énergie potentielle</u>

La force entre la terre et le satellite s'écrit : $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.

F est une force qui dérive d'un potentiel, donc :

$$W = \int \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -\int_r^\infty \frac{GMm}{r^2}\vec{u}.\overrightarrow{dl} = -GMm\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{GMm}{r}$$

$$W = -\Delta E_{PP} = E_P(r) - E_P(\infty) \quad , en\ posant\ E_P(\infty) = 0$$

$$\Rightarrow E_P(r) = -\frac{GMm}{r}$$

2. <u>Expression de l'énergie totale en fonction de M, G, m, r</u>

$$Comme: \ F = \frac{GMm}{r^2} = ma_n = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow mv^2 = \frac{GMm}{r}$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

$$E_T = E_C + E_P = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

3. <u>Montrons que</u> $\omega^2 r^3 = GM$.

$$F = \frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2$$

$$\Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = mr\omega^2 \Rightarrow \omega^2 r^3 = GM$$

4. Si le satellite ne bouge pas, alors il a même période que la terre : $T = 24h = 8{,}64 \times 10^4 s$

$$F = \frac{GMm}{r^2} = mr\omega^2 = mr\frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow r = (R+h) = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24} \times 86400^2}{4\pi^2}}$$

$$r = 4{,}2 \times 10^7 m \Rightarrow r = R + h \Rightarrow h = r - R$$

$$h = 4{,}2 \times 10^7 m - 6380 \times 10^3 = 3{,}56 \times 10^7 m$$

$$v = \frac{2\pi}{T}r = \frac{2\pi \times 4{,}2 \times 10^7}{8{,}64 \times 10^4} = 3{,}054 \times 10^3 m.s^{-1}$$

$$E_T = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = -\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24} \times 68}{2 \times 4{,}2 \times 10^7}$$

$E_T = -3{,}22 \times 10^8 J$

5. <u>Vitesse de libération du satellite</u>

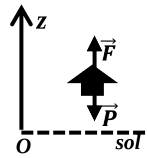
$$\Delta E_m = E_{mf} - E_{mi} = -E_{mi} = -\left(\frac{1}{2}m{v_l}^2 - \frac{GMm}{R}\right) = 0$$

$$soit \ \ v_l = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{6380 \times 10^3}}$$

$v_l = 1{,}12 \times 10^4 m.s^{-1}$

<u>Solution 6</u>

I. 1. <u>Bilan des forces appliquées</u>



La fusée est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la force de poussée $\vec{F}$.

2. <u>Accélération de la fusée au décollage</u>

T.C.I : $\vec{F} + \vec{P} = m\vec{a}$, Suivant Oz *:*

$$-mg + F = ma \ \Rightarrow a = \frac{F - mg}{m}$$

Or , pour que la fusée décolle, il faut que

$$F > P \Rightarrow F - mg > 0 \Rightarrow a > 0$$

alors la fusée a un M.U.A

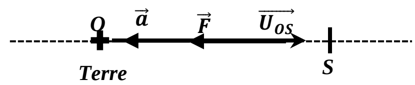
$$a = \frac{3{,}24 \times 10^7 - 2{,}041 \times 10^6 \times 9{,}8}{2{,}041 \times 10^6} = 5{,}14 m.s^{-2}$$

3. <u>Distance parcourue par la fusée à t = 2s</u> :

$$z = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 5{,}14 \times 2^2 = 10{,}28m$$

II. 1. <u>Représentation du vecteur accélération</u> :

Le vecteur accélération est centripète et radial



2. a)) Montrons que $g(h) = g_0\frac{{R_T}^2}{(R+h)^2}$

$$\vec{F} = -G\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{U_{OS}} = -G\frac{mM_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}} = m\overrightarrow{g(h)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{g(h)} = -G\frac{M_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}}$$

Au sol : $h = 0 \Rightarrow g_0 = \frac{GM_T}{{R_T}^2} \Rightarrow GM_T = g_0{R_T}^2$

$$\Rightarrow \overrightarrow{g(h)} = -g_0\frac{{R_T}^2}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}} \Rightarrow g(h) = g_0\frac{{R_T}^2}{(R+h)^2}$$

b)) <u>Application numérique</u> : h=296km

$$g(h) = \frac{9{,}8 \times (6380 \times 10^3)^2}{(6380 \times 10^3 + 296 \times 10^3)^2} = 8{,}95 m.s^{-2}$$

3. <u>Montrons que</u> $v = \sqrt{g(h).(R_T + h)}$

$$F = \frac{GMm}{r^2} = ma_n = mg(h) = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{rg(h)} = \sqrt{g(h) \times (R_T + h)}$$

$$A.N: v = \sqrt{8{,}95(6380 + 296) \times 10^3} = 7{,}73 \times 10^3 m.s^{-1}$$

III. 1. <u>Calculons le travail du poids du satellite</u>

$$W(\vec{P}) = -\Delta E_P = mg_0{R_T}^2\left(\frac{1}{R_T + h_2} - \frac{1}{R_T + h_1}\right)$$

$avec\ h_1 = 54{,}86km\ et\ h_2 = 11{,}58km$

$W(\vec{P}) = -69{,}68.10^3.9{,}8(6380.10^3)^2\left(\frac{10^{-3}}{6380+11{,}58} - \frac{10^{-3}}{6380+54{,}86}\right)$

$W(\vec{P}) = 2{,}92 \times 10^{10}J$

2. Calculons le travail de la force de frottement de l'air

T.E.C : $\Delta E_C = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{f})$

$\Rightarrow W(\vec{f}) = \frac{m}{2}({v_2}^2 - {v_1}^2) - W(\vec{P})$

$$W(\vec{f}) = \frac{m}{2}({v_2}^2 - {v_1}^2) - W(\vec{P})$$

$$W(\vec{f}) = \frac{69{,}68 \times 10^3}{2}(223{,}5^2 - 1475^2) - 2{,}92.10^{10}$$

$W(\vec{f}) = -1{,}032 \times 10^{11}J$,

$$or\ W(\vec{f}) = -f.\Delta h \Rightarrow f = -\frac{W(\vec{f})}{\Delta h} = -\frac{W(\vec{f})}{h_1 - h_2}$$

$$A.N:\ f = \frac{1{,}032 \times 10^{11}}{(54{,}86 - 11{,}58) \times 10^3} = 2{,}38 \times 10^6 N$$

Solution 7

1. Expression de G(h) en fonction

$M_T\ , R_T\ , h\ et\ K\ \ puis\ en\ fonction\ \ \ de\ R_T\ , h\ et\ G_0$

La force exercée entre le satellite et la terre :

$\vec{F} = -K\frac{mM_T}{r^2}\vec{u}$

$$\vec{F} = -K\frac{mM_T}{r^2}\vec{u} = -K\frac{mM_T}{(R_T+h)^2}\vec{u} = m\overrightarrow{G(h)}$$

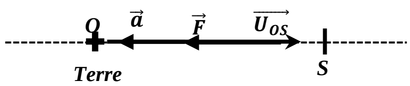
$$\Rightarrow \overrightarrow{G(h)} = -K\frac{M_T}{(R+h)^2}\vec{u}$$

Au sol : $h = 0 \Rightarrow G_0 = \frac{KM_T}{{R_T}^2} \Rightarrow KM_T = g_0{R_T}^2$

$$\overrightarrow{G(h)} = -g_0\frac{{R_T}^2}{(R_T+h)^2}\vec{u} \Rightarrow G(h) = g_0\frac{{R_T}^2}{(R_T+h)^2}$$

2. Montrons que le mouvement du satellite est uniforme

En appliquant le théorème de centre d'inertie :



$$\vec{F} = -G\frac{mM_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_{OS}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -G\frac{M_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{u_{OS}}$$

Alors le vecteur accélération est radial (porté par le rayon SO) et centripète (même sens que $\overrightarrow{SO}$), il n'y a donc pas d'accélération tangentielle : $a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cste$:

D'où le mouvement est uniforme.

3. Expression de v et T

$M.C.U : a = \frac{v^2}{R_T+h} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}$,

$$Or\ au\ sol\ \ GM_T = g_0{R_T}^2 \Rightarrow v_S = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}$$

$$T_S = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_T+h)}{R_T} \times \sqrt{\frac{R_T+h}{g_0}} = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}}$$

4. Application numérique

$$v = 6400 \times 10^3\sqrt{\frac{9{,}8}{6400 \times 10^3 + 2 \times 10^5}} = 7{,}80 \times 10^3 m.s^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{6400 \times 10^3}\sqrt{\frac{(6400 \times 10^3 + 2 \times 10^5)^3}{9{,}8}} = 5{,}32 \times 10^3 s$$

5. a)) Le METEOSAT 8 est géostationnaire si et seulement si son orbite est dans le plan équatorial, celui-ci tourne dans le même sens que la terre et il apparait immobile à un observateur terrestre.

C'est donc un engin qui a la même vitesse de rotation et même période $T_0 = 86400s$ que celle de la terre.

b)) En déduisons le rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire

$$T_0 = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}} \Rightarrow \frac{{T_0}^2{R_T}^2}{4\pi^2} = \frac{(R_T+h)^3}{g_0}$$

$$\Rightarrow R_T + h = \sqrt[3]{\frac{{T_0}^2{R_T}^2 g_0}{4\pi^2}} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{{T_0}^2{R_T}^2 g_0}{4\pi^2}} - R_T$$

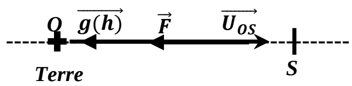
$$h = \sqrt[3]{\frac{(8{,}64 \times 10^4)^2(6400 \times 10^3)^2 \times 9{,}8}{4\pi^2}} - 6400 \times 10^3$$

$h = 3{,}57 \times 10^7 m$

Solution 8

1. Caractéristique de la force gravitationnelle

$\vec{F} = -G\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{U_{OS}}$



La force $\vec{F}$ est centripète et radiale.

Son intensité est donnée par : $F = G\frac{mM_T}{r^2}$

2. Expression du vecteur champ Gravitationnel

$$\vec{F} = -G\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{U_{OS}} = -G\frac{mM_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}} = m\overrightarrow{g(h)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{g(h)} = -G\frac{M_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}}$$

3. Nature du mouvement du satellite

En appliquant le théorème de centre d'inertie :

$$\vec{F} = G\frac{mM_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{SO}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = G\frac{M_T}{(R+h)^2}\overrightarrow{U_{SO}}$$

Alors le vecteur accélération est radial et centripète, donc:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cste$$

D'où le mouvement est circulaire et uniforme.

4. Expression de v et de T en fonction de G, M et r

$$F = \frac{GMm}{r^2} = ma_n = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow mv^2 = \frac{GMm}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad et\ T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Montrons que $\frac{T^2}{r^3} = cste$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \times \frac{r^3}{GM} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cste$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = cste \quad (Loi\ de\ Kepler)$$

5. Détermination de la masse du planète P

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G}$$

$ave\ 185500km\ et\ T = 22{,}6h = 81{,}36 \times 10^3 s$

$$A.N : M = \frac{4\pi^2 \times (185500 \times 10^3)^3}{(81{,}36 \times 10^3)^2 \times 6{,}67 \times 10^{-11}} = 5{,}70 \times 10^{26} kg$$

6. Calculons le rayon r' de l'orbite du planète P'

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{T'^2}{r'^3} = cste \Rightarrow r' = \sqrt[3]{\frac{T'^2 r^3}{T^2}}$$

$$r' = \sqrt[3]{\frac{(108{,}4 \times 3600)^2 \times (185500 \times 10^3)^3}{(81{,}36 \times 10^3)^2}} = 5{,}275 \times 10^8 m$$

Solution 9

1. Expression de g en fonction de $R_T, g_0\ et\ h$

$$F = G\frac{mM_T}{r^2} = G\frac{mM_T}{(R+h)^2} = mg(h) \Rightarrow g(h) = G\frac{M_T}{(R+h)^2}$$

$$Au\ sol : h = 0 \Rightarrow g_0 = \frac{GM_T}{{R_T}^2} \Rightarrow GM_T = g_0{R_T}^2$$

$$\Rightarrow g(h) = g_0\frac{{R_T}^2}{(R+h)^2}$$

2. Expression de la vitesse v et de la période T

Le satellite évolue dans le champ gravitationnel uniforme $\vec{G}$, donc son mouvement est nécessairement circulaire uniforme.

$$F = mg(h) = \frac{mg_0{R_T}^2}{(R_T+h)^2} = m\frac{v^2}{R_T+h} \Rightarrow v = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_T+h)}{R_T} \times \sqrt{\frac{R_T+h}{g_0}} = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}}$$

$$A.N: v = 6400 \times 10^3\sqrt{\frac{9{,}8}{6400 \times 10^3 + 4 \times 10^5}}$$

$$= 7{,}68 \times 10^3 m.s^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{6400 \times 10^3}\sqrt{\frac{(6400 \times 10^3 + 4 \times 10^5)^3}{9{,}8}} = 5{,}56 \times 10^3 s$$

Expression de l'énergie cinétique

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m{R_T}^2 g_0}{2(R_T+h)}$$

$$E_C = \frac{1020 \times (6400 \times 10^3)^2 \times 9{,}8}{2(6400 \times 10^3 + 4 \times 10^5)} = 3 \times 10^{10} J$$

3. Justification du signe (-)

La force entre la terre et le satellite s'écrit : $\vec{F} = -\frac{GM_T m_S}{r^2}\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.

F est une force qui dérive d'un potentiel, donc :

$$W = \int \vec{F}.\vec{dl} = -\int_r^\infty \frac{GM_T m_S}{r^2}\vec{u}.\vec{dl} = -GM_T m_S\int_r^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$W = -\frac{GM_T m_S}{r}$$

$$W = -\Delta E_P = E_P(r) - E_P(\infty) \quad , en\ posant\ E_P(\infty) = 0$$

$$\Rightarrow E_P(r) = -\frac{GM_T m_S}{r}$$

$$r = R_T + h\ \ et\ \ GM_T = g_0{R_T}^2 \Rightarrow E_P(h) = -\frac{m_S g_0{R_T}^2}{R_T+h}$$

b)) Expression de l'énergie mécanique

$$E = E_C + E_P = \frac{m_S{R_T}^2 g_0}{2(R_T+h)} - \frac{m_S g_0{R_T}^2}{R_T+h} = -\frac{m_S{R_T}^2 g_0}{2(R_T+h)}$$

$$E = \frac{1}{2}E_P = -E_C \Rightarrow E = -E_C = \frac{1}{2}E_P$$

4. a)) Nouvelle énergie cinétique

$$E = -E_C \Rightarrow \Delta E = -\Delta E_C = -(E_C - E_{C0})$$

$$\Rightarrow E_C = E_{C_0} - \Delta E$$

$$Or\ E_C = \frac{m{R_T}^2 g_0}{2(R_T+h)} \quad au\ sol\ \ h = 0 \Rightarrow E_{C_0} = \frac{mR_T g_0}{2}$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{mR_T g_0}{2} - \Delta E$$

$$A.N: E_C = \frac{1020 \times 6400.10^3 \times 9{,}8}{2} - 5 \times 10^8 = 3{,}148 \times 10^{10} J$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 3{,}148 \times 10^{10}}{1020}}$$

$$v = 7{,}856 \times 10^3 m.s^{-1}$$

b)) Calculons sa nouvelle énergie potentielle

$$E = -E_C = \tfrac{1}{2}E_P \Rightarrow E_P = -2E_C$$

$$E_P = -2 \times 3{,}148 \times 10^{10} = -6{,}296 \times 10^{10} J$$

Valeur de l'altitude h correspondant

$$E_P(h) = -\Longrightarrow R_T + h = -\frac{m_S g_0{R_T}^2}{E_P(h)}$$

$$\Rightarrow h = -\frac{m_S g_0{R_T}^2}{E_P(h)} - R_T$$

$$h = -\frac{1020 \times 9{,}8 \times (6400 \times 10^3)^2}{-6{,}296 \times 10^{10}} - 6400 \times 10^3$$

$$h = 1{,}031 \times 10^5 m = 103{,}1km$$

Solution 10

1. a)) Expression de la vitesse v en fonction de g_o, de R et de r

La force exercée entre la terre et le satellite s'écrit :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}$$

$M.C.U : F = \frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Longrightarrow mv^2 = \frac{GMm}{r}$

$$\Longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad or\ au\ sol: GM = g_0R^2$$

$D'où : \ v = \sqrt{\frac{g_0R^2}{r}} = R\sqrt{\frac{g_0}{r}}$

b)) Expression de la période T :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{r^3}{g_0}}$$

$$A.N:\ T = \frac{2\pi}{6400 \times 10^3}\sqrt{\frac{(8 \times 10^5)^3}{9,8}} = 7,096 \times 10^3 s$$

2. a)) Montrer que W= $mg_oR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$.

La force entre la terre et le satellite s'écrit : $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.

$\vec{F}$ est une force qui dérive d'un potentiel, donc :

$$W = \int \vec{F}\,.\overrightarrow{drr} = -\int_R^r \frac{GMm}{r^2}\vec{u}.\overrightarrow{dr}$$

$$W = -GMm\int_R^r \frac{dr}{r^2} = -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_R^r = -GMm\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)$$

$$W = -GMm\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) = mg_0R^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \quad (cfd)$$

b)) Déduisons l'expression de l'énergie potentielle

$W = -\Delta E_P = E_P(R) - E_P(r) = -E_P(r)$

$\Longrightarrow E_P(r) = mg_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right), \quad car\ au\ sol\ E_P(R) = 0$

4. Expression de l'énergie cinétique

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2\ or\ v = R\sqrt{\frac{g_0}{r}} \ \Longrightarrow\ E_C = \frac{mR^2g_0}{2r}$$

Expression de l'énergie mécanique totale

$$E = E_C + E_P = \frac{mR^2g_0}{2r} + mg_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

$$= mg_0R^2\left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) = mg_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right)$$

5. Expression de dv

$$v = R\sqrt{\frac{g_0}{r}} = Rg_0^{\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow dv = Rg_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}\right)dr$$

$$dv = -\frac{1}{2}Rg_0^{\frac{1}{2}}r^{-\frac{3}{2}}dr$$

Montrons que $dv = -\frac{\pi}{T}dr$

$$T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{r^3}{g_0}} = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{Rg_0^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow TRg_0^{\frac{1}{2}} = 2\pi r^{\frac{3}{2}}$$

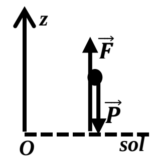
$$\Longrightarrow \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi}{TRg_0^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow r^{-\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{TRg_0^{\frac{1}{2}}}$$

$$dv = -\frac{1}{2}Rg_0^{\frac{1}{2}}r^{-\frac{3}{2}}dr = -\frac{1}{2}Rg_0^{\frac{1}{2}} \times \frac{2\pi}{TRg_0^{\frac{1}{2}}}dr = -\frac{\pi}{T}dr$$

$$\Longrightarrow dv = -\frac{\pi}{T}dr$$

Solution 11

I.1.a)) Bilan des forces appliquées



La fusée Ariane dans le référentiel terrestre supposé galiléen est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la force de poussée $\vec{F}$.

b)) Expression de l'accélération a

$T.C.I : \vec{F} + \vec{P} = m\vec{a}$,

Suivant Oz : $-mg + F = ma \ \Rightarrow a = \frac{F}{m} - g$

2.a)) Application numérique :

$$a_1 = \frac{F}{m_1} - g \Longrightarrow a_1 = \frac{2445 \times 10^3}{208 \times 10^3} - 9,8 = 1,95 m.s^{-2}$$

b)) Valeur de la masse m_2

$$m_2 = m_1 - m(N_2O_4)\ emporté$$

$$m_2 = 208 - 147,5 = 60,5t = 60,5 \times 10^3 kg$$

Valeur de l'accélération a_2 :

$$a_2 = \frac{F}{m_2} - g = \frac{2445 \times 10^3}{60,5 \times 10^3} - 9,8 = 30,6 m.s^{-2}$$

La somme des forces est constante mais la masse de la fusée varie donc la valeur de l'accélération change au cours du temps.

Le mouvement n'est pas uniformément accéléré.

3. a)) Unité de $v_e = \frac{\Delta t}{\Delta m}F$:

Analyse dimensionnelle: On exprime l'intensité d'une force en Newtons en utilisant les unités S.I. :

avec la force poids P = mg donc Newtons.

$[V_e] = s.kg^{-1}.N = s.kg^{-1}.(kg.m.s^{-2}) = m.s^{-1}$

Calcul de v_e :

en $\Delta t = 145$ secondes la fusée subit une variation de masse $|\Delta m| = 147,5$ tonnes.

$$v_e = \frac{\Delta t}{\Delta m}F = \frac{145}{147,5 \times 10^3} \times 2445 \times 10^3 = 2,40 \times 10^3 m.s^{-1}$$

b)) $\frac{\Delta t}{\Delta m}$ est négatif puisque $\Delta m < 0$ (perte de masse),

donc $\vec{v_e}$ est orienté vers le bas, opposé à la force de poussée $\vec{F}$.

Ceci est logique, les molécules de gaz sont éjectées de la fusée, elles s'éloignent de celle-ci.

c)) D'après la 3ème loi de Newton, principe des actions réciproques: les moteurs exercent sur les gaz une force verticale vers le bas, alors les gaz exercent sur la fusée une force verticale vers le haut de même valeur.

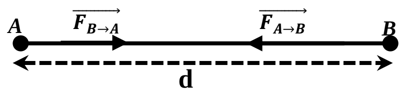
II. 1. a)) Caractéristiques du vecteur accélération pour un mouvement circulaire uniforme

Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{r}\vec{N}$

or pour un mouvement uniforme $\frac{dv}{dt} = 0$, alors $\vec{a} = a_n\vec{N}$, d'où le vecteur accélération est centripète et radial.

b)) Enoncée la de loi de l'attraction universelle

Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 placées à une distance r l'une de l'autre exercent des forces d'attraction directement opposées, dirigés suivant la droite (OS) d'intensité proportionnelles aux produits de leur masse et inversement proportionnelle au carré de leur distance :



$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} = -G\frac{m_1 m_2}{d^2}\vec{u}_{AB}$$

2. a)) Expression de g(h)

$$\overrightarrow{F_S} = -G\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{U_{OS}} = -G\frac{mM_T}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}} = m\overrightarrow{g(h)}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{g(h)} = -G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}}$$

$$Au\ sol : h = 0 \Longrightarrow g_0 = \frac{GM_T}{{R_T}^2} \Longrightarrow GM_T = g_0{R_T}^2$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{g(h)} = -g_0\frac{{R_T}^2}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{U_{OS}}$$

$$soit\quad g(h) = g_0\frac{{R_T}^2}{(R+h)^2}$$

b)) Expression de la vitesse v et de la période T

Le système satellite dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen) subit la force d'attraction de la Terre.

La deuxième loi de Newton conduit à $\vec{F_S} = m_S\vec{a}$, Par projection suivant l'axe radial orienté positivement du satellite vers le centre de la Terre, il vient:

$$m_S g(h) = m_S a \Longrightarrow a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T+h}$$

$$\Longrightarrow g(h) = g_0\frac{{R_T}^2}{(R_T+h)^2} \Longrightarrow v_S = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}$$

Période de révolution T_S

$$T_S = \frac{2\pi(R_T+h)}{v_S} = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}}$$

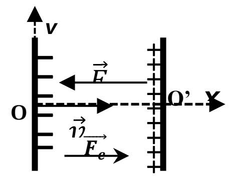
c)) Application numérique

$$v = 6400\times10^3\sqrt{\frac{9{,}8}{6400\times10^3+2\times10^5}} = 7{,}80\times10^3 m.s^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{6400\times10^3}\sqrt{\frac{(6400\times10^3+2\times10^5)^3}{9{,}8}} = 5{,}32\times10^3 s$$

Solutions sur le champ électrostatique

Solution 1



1. a)) *Comme q=-e<0, alors* $\vec{E}$ est de sens opposé avec le vecteur vitesse $\vec{v}$.

b)) Valeur de E :

$$E = \frac{U}{d} = \frac{800}{0{,}04} = 2.10^4 V.m^{-1}$$

2. a)) $\vec{F_e} = q\vec{E} = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{F_e}$ est de sens opposé avec $\vec{E}$.

b)) Caractéristique de $\vec{a}$

L'électron est soumis à la force électrique $\vec{F_e} = q\vec{E}$

T.C.I : $\vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

- Direction : horizontal
- sens : suivant Ox
- Intensité : $a = \frac{e}{m}E = \frac{1{,}6.10^{-19}\times 2.10^4}{9{,}1.10^{-31}} = 3{,}15.10^{15} m.s^{-2}$

3. Energie cinétique en O'

T.E.C : entre O et O'

$$E'_C = W(\vec{F_e}) = |q|U = eU = 1{,}6.10^{-19} \times 800 = 1{,}28.10^{-16} J$$

$$Or\ 1eV = 1{,}6 \times 10^{-19} J \Rightarrow E'_C = \frac{1{,}28.10^{-16}}{1{,}6.10^{-19}} = 800eV$$

- *vitesse de l'électron en O'*

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}28.10^{-16}}{9{,}1.10^{-31}}}$$

$$= 1{,}67 \times 10^7 m.s^1$$

4. a)) Equation horaire du mouvement

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 3{,}5.10^{15} t^2 = 1{,}75 \times 10^{15} t^2$$

b)) Durée du passage

Au point O', $x = d = 0{,}04 = 1{,}75 \times 10^{15} t^2$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{0{,}04}{1{,}75\times10^{15}}} = 4{,}78 \times 10^{-9} s$$

c)) Déduisons la vitesse en O'

$$v = at = 3{,}5 \times 10^{15} \times 4{,}78 \times 10^{-9} = 1{,}67 \times 10^7 m.s^{-1}$$

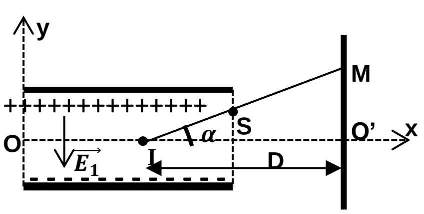
Solution 2

1. Valeur de la tension accélératrice U

$$T.E.C: \frac{1}{2}mv^2 = |q|U \Rightarrow U = \frac{mv^2}{2|q|}$$

$$A.N:\ U = \frac{9{,}1 \times 10^{-31} \times (16.10^6)^2}{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19}} = 728V$$

2. a)) Equation de la trajectoire



T.C.I : $\vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

$$\vec{E}\left|\begin{matrix} E_x = 0 \\ E_y = -E \end{matrix}\right. ; \vec{a}\left|\begin{matrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{eE}{m} \end{matrix}\right. ; \overrightarrow{OM}\left|\begin{matrix} x = v_0 t \\ y = \frac{eE}{2m}t^2 \end{matrix}\right. \Rightarrow y = \frac{eE}{2mv_0^2}x^2$$

b)) Condition d'émergence

Si on veut que le faisceau ne rencontre pas l'une des armatures du condensateur, il faut que $y_S < \frac{d}{2}$. $S\left|\begin{matrix} x_S = l \\ y_S = \frac{eE}{2mv_0^2}l^2 = \frac{eU_1}{2mdv_0^2}l^2 \end{matrix}\right.$

$$y_S < \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{eU_1}{2mdv_0^2}l^2 < \frac{d}{2} \Longrightarrow U_1 < \frac{md^2v_0^2}{el^2}$$

c)) Montrons que la déviation verticale du faisceau est proportionnelle à U_1.

$tan\alpha = \frac{y_M}{IO'} \Rightarrow y_M = IO' \tan\alpha = D\tan\alpha$, *Avec*

$$\tan\alpha = \frac{y_S}{l/2} = \frac{2y_S}{l} = \frac{2}{l} \times \frac{eU_1}{2mdv_0^2}l^2 = \frac{eU_1 l}{mdv_0^2}$$

$\Longrightarrow y_M = D \times \frac{eU_1 l}{mdv_0^2} = kU_1$ *, Où* $k = \frac{Del}{mdv_0^2}$ *, alors* y_M *est proportionnelle à* U_1.

d)) Valeur de la distance D

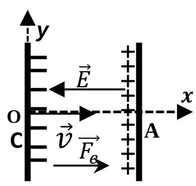
$$y_M = U_1 k \Rightarrow \frac{U_1}{y_M} = \frac{mdv_0^2}{elD} = \frac{1}{k} = s \Rightarrow elDs = mdv_0^2$$

$$\Longrightarrow D = \frac{mdv_0^2}{els} = \frac{9{,}1.10^{-31} \times 0{,}02 \times (16.10^6)^2}{1{,}6.10^{-19} \times 0{,}08 \times 10} = 36{,}4cm$$

Solution 3

1. a)) Equation de la trajectoire

L'électron est soumis à la force électrique $\vec{F_e} = q\vec{E}$



T.C.I : $\vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

$$\vec{E}\left|\begin{matrix} E_x = -E \\ E_y = 0 \end{matrix}\right. ; \vec{a}\left|\begin{matrix} a_x = \frac{eE}{m} \\ a_y = 0 \end{matrix}\right. ; \vec{v_0}\left|\begin{matrix} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{matrix}\right. \ et\ \overrightarrow{OM}\left|\begin{matrix} x = \frac{eE}{2m}t^2 + v_0 t \\ y = 0 \end{matrix}\right.$$

y = 0, alors la trajectoire est une droite mais son mouvement est uniformément accéléré suivant Ox.

b)) Vitesse de l'électron en A

$$T.E.C:\ \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = eU \Rightarrow v_A = \sqrt{v_C^2 + \frac{2eU}{m}}$$

$$A.N: v_A = \sqrt{(1{,}5.10^5)^2 + \frac{2\times1{,}6\times10^{-19}\times800}{9{,}1.10^{-31}}} = 1{,}67 \times 10^7 m.s^1$$

c)) Nombre d'électron capté en 1s

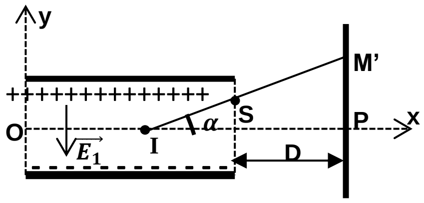
$$Q = It = ne \Rightarrow n = \frac{It}{e} = \frac{7 \times 10^{-3}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 4{,}37 \times 10^{16} électrons$$

2. a)) Vitesse en O

Entre A et O, il ne règne aucune champ, donc E=0, alors

$$E_C(O) = E_C(A) \Rightarrow v_0 = v_A = 1{,}67 \times 10^7 m.s^1$$

b)) Equation de la trajectoire



$T.C.I : \vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

$\vec{E_1}\begin{vmatrix} E_{1x} = 0 \\ E_{1y} = -E \end{vmatrix} ; \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{eE}{m} \end{vmatrix} ; \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_0 t \\ y = \frac{eE}{2m}t^2 \end{vmatrix}$

$\Longrightarrow y = \dfrac{eE}{2m{v_0}^2}x^2 = \dfrac{eU_1}{2md{v_0}^2}x^2$

$A.N: y = \dfrac{1{,}6.10^{-19} \times 100}{2 \times 9{,}1.10^{-31} \times 4.10^{-2} \times (1{,}67.10^7)^2}x^2 = 0{,}788x^2$

Alors la trajectoire des électrons à l'intérieur du condensateur est un arc de parabole.

3. a)) Coordonnées de S

$S\begin{vmatrix} x_S = l = 0{,}1 \\ y_S = 0{,}788{x_S}^2 = 0{,}788 \times 0{,}1^2 = 7{,}88 \times 10^{-3} \end{vmatrix}$

b)) Equation de la trajectoire au delà de S

Au-delà de S, les électrons suivent une droite (T) : $y = ax+b$

où $a = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=l} = 2 \times 0{,}788l = 2 \times 0{,}0788 \times 0{,}1 = 0{,}1576$

$\Rightarrow (T): y = 0{,}1576x + b$

$Or\ S\epsilon\ (T) \Rightarrow\ y_S = 0{,}1576x_S + b\ \Rightarrow b = y_S - 0{,}1576x_S$

$b = y_S - 0{,}1576x_S = 7{,}88 \times 10^{-3} - 0{,}1576 \times 0{,}1$

$= -7{,}88 \times 10^{-3}$

$(T): y = 0{,}1576x - 7{,}88 \times 10^{-3}$

c)) Montrons que $I(5 ; 0) \in (T)$

$y = 0{,}1576 \times 5 \times 10^{-2} - 7{,}88 \times 10^{-3} = 0$, *Alors* $I \in (T)$

- Valeur de la déviation verticale $y_{M'}$

$\tan\alpha = \frac{y_{M'}}{IP}\ \Rightarrow\ y_{M'} = IP\tan\alpha,\ où\ \tan\alpha = 0{,}1576$

$y_{M'} = IP\tan\alpha = \left(\dfrac{l}{2} + D\right)\tan\alpha = (5.10^{-2} + 0{,}5) \times 0{,}1576$

$y_{M'} = 8{,}67 \times 10^{-2}m = 8{,}67cm$

Solution 4

1. Les protons portent une charge +e>0,

alors $\vec{v}$ a même sens que $\vec{E}$. *donc :* $V_D - V_C < 0$

$T.E.C : \frac{1}{2}m{v_0}^2 = eU\ \Rightarrow\ v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$

$A.N: v_0 = \sqrt{\dfrac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 10^3}{1{,}67.10^{-27}}} = 4{,}37 \times 10^5 m.s^{-1}$

2. Signe de $V_A - V_B$

Si le faisceau des protons passent par le point O', cela signifie qu'ils dévient vers le bas.

Donc la plaque A(+) et B(-) . *Par conséquent :* $V_D - V_C > 0$

3. Equation de la trajectoire

- *Condition initiale :* $\vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \end{vmatrix}$ *et* $\overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}$

$T.C.I : \vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a}\ \Rightarrow\ \vec{a} = \frac{e}{m}\vec{E}$

$\vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = -E \end{vmatrix} ; \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{eE}{m} \end{vmatrix} ; \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = (v_0\cos\alpha)t \\ y = -\frac{eE}{2m}t^2 + (v_0\sin\alpha)t \end{vmatrix}$

$\Rightarrow y = -\dfrac{eE}{2m{v_0}^2cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha\ ,\ or\ E = \dfrac{U}{d}$

$y = -\dfrac{eU}{2md{v_0}^2cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$

Alors la trajectoire est une parabole .

4. Valeur de U'

$O'(L; 0)$, est un point de la trajectoire, alors :

$0 = -\dfrac{eU'}{2md{v_0}^2cos^2\alpha}L^2 + L\,tan\,\alpha\ \Rightarrow U' = \dfrac{2md{v_0}^2cos^2\alpha\,tan\,\alpha}{eL}$

$\Longrightarrow U' = \dfrac{md{v_0}^2 2cos\alpha \times sin\,\alpha}{eL} = \dfrac{md{v_0}^2\,sin\,2\alpha}{eL}$

$A.N: U' = \dfrac{1{,}67.10^{-27} \times 0{,}07 \times (4{,}37.10^5)^2 \times \sin 60°}{1{,}6 \times 10^{-19} \times 0{,}2} = 604V$

5. Distance minimale de passage des protons

Au point de la sortie : $S\begin{vmatrix} x_S = L \\ y_S = D_{min} \end{vmatrix}$

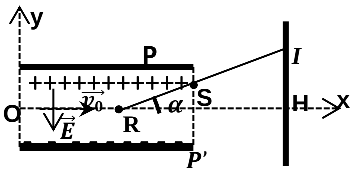
$y_S = -\dfrac{eU'}{2md{v_0}^2cos^2\alpha}L^2 + L\tan\alpha$

$y_S = -\dfrac{1{,}6.10^{-19}.604.0{,}2^2}{2 \times 2{,}67.10^{-27}.0{,}07.(4{,}37.10^5)^2cos^2 30°} + 0{,}2\tan 30°$

$D_{min} = y_S = 3{,}2 \times 10^{-5}m$

Solution 5

1. a)) Voir figure



b)) Valeur du champ E :

$E = \frac{U}{d} = \frac{500}{0{,}04} = 1{,}25 \times 10^4 V.m^{-1}\ et\ \ \vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = -E \end{vmatrix}$

2. a)) Coordonnées de $\vec{a}$

$T.C.I : \vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a}\ \Rightarrow\ \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}\ ;\ \ \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{eE}{m} \end{vmatrix}$

c)) Coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ et position $\overrightarrow{OM}$;

$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0 \\ v_y = \frac{eE}{m}t \end{vmatrix}\ et\ \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_0 t \\ y = \frac{eE}{2m}t^2 \end{vmatrix}\ \ \Rightarrow y = \frac{eE}{2m{v_0}^2}x^2$

$A.N:\ y = \dfrac{1{,}6.10^{-19} \times 1{,}25.10^4}{2 \times 9{,}1.10^{-31} \times (10^7)^2}x^2 \Rightarrow y = 11x^2$

3. a)) Coordonnées de S

$S\begin{vmatrix} x_S = l \\ y_S = \dfrac{eE}{2m{v_0}^2}l^2 = \dfrac{eU}{2md{v_0}^2}l^2 = Uk\ Où: k = \dfrac{el^2}{2md{v_0}^2} = cte \end{vmatrix}$

$y_S = kU$, *alors* y_S *est proportionnelle à* U

b)) Coordonnées de $\overrightarrow{v_S}$

$$\overrightarrow{v_S}\left|\begin{array}{l} v_{sx} = v_0 \\ v_{sy} = \dfrac{eE}{m}t_S \end{array}\right. \text{ où } x_S = v_0 t_S = l \Rightarrow t_S = \frac{l}{v_0} \Rightarrow \overrightarrow{v_S}\left|\begin{array}{l} v_{sx} = v_0 \\ v_{sy} = \dfrac{eEl}{mv_0} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow v_S = \sqrt{{v_0}^2 + \left(\frac{eEl}{mv_0}\right)^2}$$

- *Valeur de l'angle α* $\tan\alpha = \frac{y_S}{l/2} = \frac{2y_S}{l} = \frac{2}{l}\times\frac{eE}{2m{v_0}^2}l^2 = \frac{eEl}{m{v_0}^2}$

c)) Valeur numérique de t_S, α, y_S, v_S

$$t_S = \frac{l}{v_0} = \frac{0{,}08}{10^7} = 8\times 10^{-9}s \ \ et$$

$$\tan\alpha = \frac{1{,}6.10^{-19}\times 1{,}25.10^4\times 0{,}08}{9{,}1.10^{-31}\times(10^7)^2} = 1{,}758 \Rightarrow \alpha = 60{,}37°$$

$$y_S = \frac{1{,}6.10^{-19}\times 1{,}25.10^4\times 0{,}08^2}{2\times 9{,}1.10^{-31}\times(10^7)^2} = 7{,}04\times 10^{-2}m = 7{,}04cm$$

$$v_S = \sqrt{(10^7)^2 + \left(\frac{1{,}6.10^{-19}\times 1{,}25.10^4\times 0{,}08}{9{,}1.10^{-31}\times 10^7}\right)^2} = 2{,}02\times 10^7 m.s^{-1}$$

4. a)) Entre S et I, le mouvement des électrons est rectiligne uniforme car au-delà de S, le champ $\vec{E} = \vec{0}$.

b)) Expression de IH en fonction de l, m, *U*, *l*, *L*, *d*, v_0

$\tan\alpha = \frac{IH}{I'H} \Rightarrow IH = I'H\tan\alpha$ *Avec :* $I'H = \left(L - \frac{l}{2}\right)$ *et* $\tan\alpha = \frac{eEl}{m{v_0}^2}$

$$IH = I'H\tan\alpha = \frac{eUl}{md{v_0}^2}\left(L - \frac{l}{2}\right)$$

c)) Valeur numérique de IH *:*

$$A.N: IH = \frac{1{,}6.10^{-19}\times 1{,}25.10^4\times 0{,}08}{9{,}1.10^{-31}\times(10^7)^2}(0{,}3 - 0{,}04) = 0{,}45m$$

Solution 6

1. Vitesse de la bille après une chute de hauteur h

La bille est soumis à son poids $\vec{P}$

T.E.C :entre le début et la fin

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 9{,}8\times 0{,}5} = 3{,}13m/s$$

2. a)) Signe de la charge q

La bille est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la force électrostatique $\vec{F_e} = q\vec{E}$.

T.C.I : $m\vec{g} + q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} + \frac{q}{m}\vec{E} \Rightarrow$

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = \dfrac{q}{m}E > 0 \\ a_y = g \end{array}\right. \Rightarrow q > 0$$

b)) Equation de la trajectoire

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{qE}{2m}t^2 \\ y = \dfrac{1}{2}gt^2 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{mg}{qE} \Rightarrow y = \frac{mg}{qE}x$$

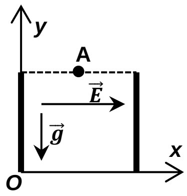
$A.N$: $y = \frac{5.10^{-3}\times 9{,}8}{4.10^{-7}\times 10^5}x = 1{,}225x$ *; la trajectoire est une droite.*

c)) Valeur de la distance d

Comme B est un point d'impact, alors *:*

$$y_B = 1{,}225x_B \Rightarrow h = 1{,}225d = 0{,}5 \Rightarrow d = 0{,}41m$$

3. a)) Equation de la trajectoire



$$\overrightarrow{OM_0}\left|\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{d}{2} \\ y_0 = l \end{array}\right. ; \ \vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = \dfrac{q}{m}E \\ a_y = -g \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{qE}{2m}t^2 + \dfrac{d}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + l \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow t^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)\frac{2m}{qE} \Longrightarrow y = -\frac{mg}{qE}\left(x - \frac{d}{2}\right) + l$$

$$y = -\frac{mg}{qE}x + \left(\frac{mgd}{2qE} + l\right)$$

$$A.N: y = -\frac{5.10^{-3}\times 9{,}8}{4.10^{-7}\times 10^5}x + \left(\frac{5.10^{-3}\times 9{,}8\times 0{,}41}{2\times 4.10^{-7}\times 10^5} + 0{,}05\right)$$

$$\Longrightarrow y = -1{,}225x + 0{,}75$$

b)) Durée mise par la bille pour passer sur l'axe Ox

Si la bille passe sur l'axe (Ox), alors

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + l = 0 \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 0{,}5}{9{,}8}} = 0{,}32s$$

c)) Valeur de U

Si la bille arrive en B, alors y=0 et x=d

$$0 = -\frac{mg}{qE}\left(d - \frac{d}{2}\right) + l \Rightarrow \frac{mgd}{2qE} = l \Rightarrow E = \frac{U}{d} = \frac{mgd}{2ql}$$

$$\Longrightarrow U = \frac{mgd^2}{2ql}$$

$$A.N: U = \frac{5.10^{-3}\times 9{,}8\times 0{,}41^2}{2\times 4.10^{-7}\times 0{,}5} = 2{,}06\times 10^4 V$$

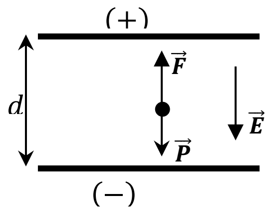
Solution 7

1.Valeur de E et F

$$On\ a : E = \frac{U_{AB}}{d} = \frac{10^5}{5\times 10^{-2}} = 2\times\frac{10^6 V}{m}$$

$$F = |q|E = 10^{-12}\times 2\times 10^6 = 2\times 10^{-6}N$$

2. Schéma : le champ électrique est dirigé vers la plaque négative.



4. $On\ a : P = mg = 0{,}1\times 10^{-6}\times 10 = 10^{-6}N$

Le bilan vectoriel est : $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ donc la goutte d'huile n'est pas en équilibre. Puisque F > P la bille se met en mouvement dans la direction de la force électrique.

Cette dernière est opposée au champ électrique puisque q<0.

La goutte d'huile va donc vers le haut.

Solution 8

I.1. En appliquant le Théorème de centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad or\ v = cte \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

D'où l'ensemble des forces subies par la goutte est égale au vecteur nulle.

2. Expression de la masse m et de son poids P

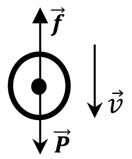
La goutte est supposée sphérique de rayon r, alors son volume

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad et \quad \rho = \frac{m}{V} \Longrightarrow m = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

Son poids : $P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$

II. 1. En absence du champ électrique, la gouttelette est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la force de frottement $\vec{f}$.

2. Représentation des forces



3. Expression de r

A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{f} = \vec{0}$

Suivant $\vec{v}$: $P - f_1 = 0$

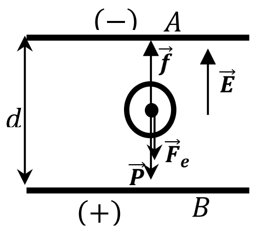
$$P = f_1 \Longrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r v_1 \Longrightarrow r^2 = \frac{9\eta v_1}{2\rho g} \Rightarrow r = 3\sqrt{\frac{\eta v_1}{2\rho g}}$$

III. 1. Schéma et légende

On a : $V_B - V_A > 0 \Longrightarrow B(+) et\ A(-)$

D'autre part le mouvement de la gouttelette reste verticale et ascendant, et $v_2 > v_1 \ alors\ f_2 > f_1 = P \Longrightarrow f_2 > P$

alors la force électrique doit se diriger vers le bas, pour qu'on ait la condition d'équilibre.



2. Sens de de la charge q

On a : $\vec{F}_e = q\vec{E}$, :

$\vec{F}_e\ s'oppose\ à\ \vec{E},$ alors $q < 0$

3.Expression de la charge q

A l'équilibre $\vec{P} + \vec{F}_e + \vec{f} = \vec{0}$

Suivant la vitesse $\vec{v}$:

$$P + F_e - f = 0$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - qE = 6\pi\eta r v_2 \Longrightarrow -qE = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g + 6\pi\eta r v_2$$

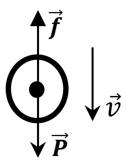
$$\Longrightarrow qE = \frac{4}{3}\pi r.r^2 \rho g - 6\pi\eta r v_2 = \frac{4}{3}\pi r.\frac{9\eta v_1}{2\rho g}.\rho g - 6\pi\eta r v_2$$

$$\Longrightarrow qE = 6\pi\eta r v_1 - 6\pi\eta r v_2 \Rightarrow q = -\frac{6\pi\eta r}{E}(v_2 - v_1)$$

Solution 9

1. Vitesse limite atteinte par la gouttelette

En absence du champ électrique, la gouttelette est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la force de frottement $\vec{f}$.



La goutte est supposée sphérique de rayon r, alors son volume est : $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad et$

$\rho = \frac{m}{V} \Longrightarrow m = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

Son poids : $P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$

A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{f} = \vec{0}$

Suivant $\vec{v}$: $P - f = 0 \Rightarrow P = f$

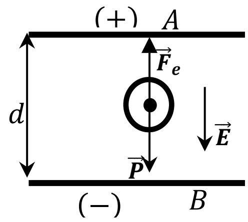
$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r v_{limite} \Longrightarrow v_{Limite} = \frac{2r^2}{9\eta}\rho g$$

$$A.N:\ v_{Limite} = \frac{2(1{,}6.10^{-6})^2}{9 \times 1{,}8.10^{-5}} 880 \times 10^3 \times 9{,}81 = 0{,}27 m.s^{-1}$$

2. Valeur de la charge portée par la gouttelette

La gouttelette s'immobilise alors : $\vec{f} = \vec{0}$

Pour avoir l'équilibre la force électrique doit se diriger vers le haut



A l'équilibre $\vec{P} + \vec{F}_e = \vec{0}$

Suivant la vitesse $\vec{v}$:

$$P - F_e = 0 \Longrightarrow F_e = -qE = P \Longrightarrow q = -\frac{P}{E} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g\ \frac{d}{U}$$

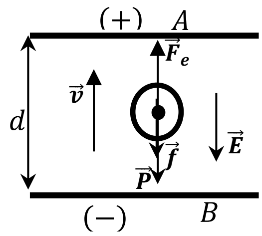
$$A.N: q = -\frac{4}{3}\pi(1{,}6.10^{-6})^3 \times 880 \times 10^3 \times 9{,}81 \times \frac{0{,}12}{3950}$$

$$q = -2{,}81 \times 10^{-9} C$$

3. Valeur de la nouvelle charge q

La gouttelette remonte avec une vitesse

$$v = \frac{d}{v} = \frac{10^{-3}}{5{,}8} = 1{,}72 \times 10^{-4} m.s^{-1}$$



A l'équilibre $\vec{P} + \vec{F}_e + \vec{f} = \vec{0}$

Suivant la vitesse $\vec{v}$: $-P + F_e - f = 0$

$$-\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - qE - 6\pi\eta r v = 0 \Longrightarrow qE = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - 6\pi\eta r v$$

$$Or\ v_{Limite} = \frac{2r^2}{9\eta}\rho g \Longrightarrow qE = -6\pi\eta r v_{Limite} - 6\pi\eta r v_2$$

$$\Longrightarrow q = -\frac{6\pi\eta r}{E}(v_{Limite} + v) = -\frac{6\pi\eta r d}{U}(v_{Limite} + v)$$

$$A.N:\ q = -\frac{6\pi \times 1{,}8.10^{-5} \times 1{,}6.10^{-6} \times 0{,}12}{3950}(0{,}27 + 1{,}72.10^{-4})$$

$$q = -4{,}45 \times 10^{-15} C$$

Solution 10

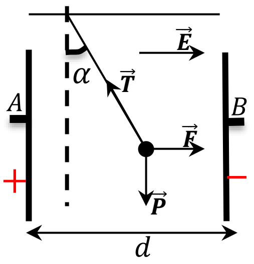
1. Valeur de la tension U_{AB}

$E = \frac{U_{AB}}{d}$ $soit$ $U_{AB} = Ed = 2.10^5 \times 0{,}2 = 4 \times 10^4 V$

2. Puisque le fil est incliné vers la plaque négative, on en déduit que la sphère est chargée positivement.

3. Valeur du poids : $P = mg = 4.10^{-4} \times 10 = 4 \times 10^{-3} N$

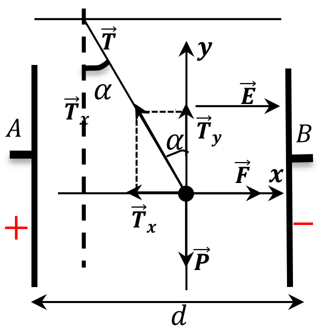
4. Schéma de l'ensemble



La bille est soumise à trois forces : son poids, la force électrique et la tension du fil.

On a : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$ c'est la condition d'équilibre.

5. Calcul de T et F



A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$

Projections dans la base (Ox ,Oy)

$\begin{cases} F - T_x = 0 \\ T_y - P = 0 \end{cases}$ Or $\sin\alpha = \frac{T_x}{T} \Longrightarrow T_x = T\sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{T_y}{T} \Longrightarrow T_x = T\cos\alpha$

Suivant Ox : $F - T\sin\alpha = 0$

Suivant Oy : $T\cos\alpha - P = 0 \Longrightarrow T = \frac{P}{\cos\alpha}$

$$F - \frac{P}{\cos\alpha}\sin\alpha = 0 \Longrightarrow F = P\tan\alpha$$

$$T = \frac{4 \times 10^{-3}}{\cos 20°} = 4{,}26 \times 10^{-3} N$$

$$F = 4.10^{-3}\tan 20° = 1{,}45 \times 10^{-3} N$$

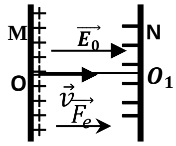
6. Valeur de la charge q

$$F = |q|E \Longrightarrow |q| = \frac{F}{E} = \frac{1{,}45 \times 10^{-3}}{2 \times 10^5} = 7{,}25 \times 10^{-9} C$$

Et comme $q > 0$ alors $q = 7{,}25 \times 10^{-9} C$

Solutions sur le Champ magnétique

Solution 01



1. a)) Signe de U_0

Ions positifs accélérés de la plaque positive (M) à la plaque négative (N) donc

$$V_M > V_N \;\Rightarrow V_M - V_N > 0 \;\Rightarrow\; U_0 > 0$$

b)) Expression de v_1 en fonction de m_1, e, U_0

$$T.E.C : \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = eU_0 \;\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_1}}\;, Or\;\; m_1 = \frac{M_1}{N}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2eNU_0}{M_1}} = \sqrt{\frac{2\times 1{,}6.10^{-19}\times 6{,}02.10^{23}\times 2.10^4}{20.10^{-3}}}$$

$$v_1 = 4{,}39.10^5 m.s^{-1}$$

c)) Montrons qu'en O_1, $m_1{v_1}^2 = m_2{v_2}^2$

T.E.C : entre O et O_1

$$E_C(O_1) = eU_0 = cste \;\Rightarrow E_{C1} = E_{C2} = E_C(O_1) = eU_0 = cste$$

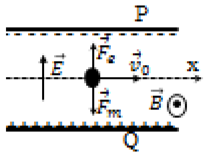
Alors : $E_{C1} = E_{C2} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 \Rightarrow m_1{v_1}^2 = m_2{v_2}^2$

- Déduction de v_2 :

$$m_1{v_1}^2 = m_2{v_2}^2 \Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{m_1}{m_2} \;\Rightarrow\; v_2 = v_1\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = v_1\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}$$

$$v_2 = 4{,}39.10^5\sqrt{\frac{20.10^{-3}}{22.10^{-3}}} = 4{,}18\times 10^5 m.s^{-1}$$

2. a)) Représentation de $\vec{E}$ et $\vec{B}$On : $U = V_Q - V_P > 0$



Dans cette région les particules sont soumises à la force électrostatique $\vec{F_e}$ et à la force magnétique $\vec{F_m}$. Ces deux forces s'opposent, alors : $\vec{F_e} + \vec{F_m} = \vec{0} \;\Rightarrow \vec{F_m} = -\vec{F_e}$

En utilisant la règle de trois doigts de la mains droit, $\vec{B}$ est sortant.

b)) Voir figure précédente

c)) Expression de U en fonction de v_1 ,d , B

On a : $\vec{F_m} = -\vec{F_e} \Rightarrow F_m = F_e \Rightarrow\; |q|v_1B = |q|E$

$$\Rightarrow v_1B = E = \frac{U}{d} \;\Rightarrow U = Bv_1d$$

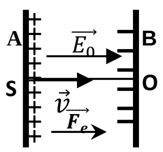
$$A.N : U = 0{,}1\times 4{,}39.10^5\times 0{,}05 = 2{,}2\times 10^3 V$$

d)) Les ions $^{22}Ne^+$ ont une vitesse $v_2 = 4{,}18\times 10^5 m.s^{-1}$.

Comme $v_2 > v_1 = v_0$, alors la force magnétique F_m est supérieure que la force électriqueF_e , les ions $^{22}Ne^+$ seront déviés vers le bas (vers la plaque Q).

Solution 02

1. Représentation de $\vec{E_0}$,et déduction de du signe de U_0



Ions positifs accélérés de la plaque positive (A) à la plaque négative (B) donc

$$V_A > V_B \;\Rightarrow V_A - V_B > 0 \;\Rightarrow\; U_0 > 0$$

2. a)) Montrons que les ions arrivent en O avec une même E_C

Les ions sont soumis à la force électrostatique $\vec{F_e} = q\vec{E}$.

T.E.C : entre S et O

$$E_C(O) = eU_0 = cste \;\Rightarrow E_{C1} = E_{C2} = E_C(O_1) = eU_0 = cste$$

$E_{C1} = E_{C2} = E_{C3} = eU_0 = cste$, alors les ions arrivent en O avec une même énergie cinétique.

b)) Déduisons que $m_1{v_1}^2 = m_2{v_2}^2 = m_3{v_3}^2$

On a : $E_{C1} = E_{C2} = E_{C3} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 = \frac{1}{2}m_3{v_3}^2$

$$soit\;\; m_1{v_1}^2 = m_2{v_2}^2 = m_3{v_3}^2$$

c)) Calcul de v_2

$$E_{C2} = \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 = eU_0 \;\Rightarrow\; v_2 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_2}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\times 1{,}6.10^{-19}\times 5.10^4}{66{,}4.10^{-27}}} = 4{,}90\times 10^5 m.s^{-1}$$

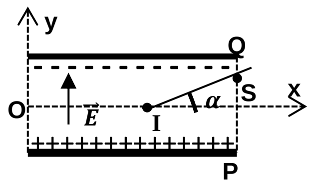
3. a)) Equation cartésienne de la trajectoire des ions

T.C.I : $\vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

$$\vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E \end{vmatrix} ;\; \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{eE}{m} \end{vmatrix} ;\; \vec{OM}\begin{vmatrix} x = v_0t \\ y = \frac{eE}{2m}t^2 \end{vmatrix} \;\Rightarrow y = \frac{eE}{2m{v_0}^2}x^2$$

- pour les ions $^{39}K^+$:

$$y = \frac{eE}{2m_1{v_1}^2}x^2$$



-pour les ions $^{40}K^+$:

$$y = \frac{eE}{2m_2{v_2}^2}$$

-pour les ions $^{41}K^+$:

$$y = \frac{eE}{2m_3{v_3}^2}$$

Les ions $^{39}K^+$, $^{40}K^+$ et $^{41}K^+$ ont une trajectoire parabolique à l'intérieur du condensateur.

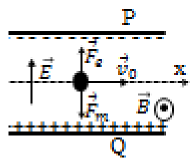
b)) Calcul de la déviation angulaire de l'isotope $^{40}K^+$

On a : $\tan\alpha = \frac{y_S}{l/2} = \frac{2y_S}{l}$ *or* $S\begin{vmatrix} x_S = l \\ y_S = \frac{eE}{2m{v_2}^2}l^2 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow\; \tan\alpha = \frac{y_S}{l/2} = \frac{2y_S}{l} = \frac{2}{l}\times\frac{eE}{2m{v_2}^2}l^2 = \frac{eEl}{m{v_2}^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{1{,}6.10^{-19}\times 2.10^4\times 0{,}02}{66{,}4.10^{-27}\times(4{,},90.10^5)^2} = 4\times 10^{-3} \Rightarrow\; \alpha = 0{,}23°$$

4. a)) Sens de $\vec{B}$



En utilisant la règle de trois doigts de la main droite , le vecteur champ $\vec{B}$ est sortant.

b)) Valeur B

Comme le mouvement est rectiligne uniforme, alors :

On a : $\vec{F_m} = -\vec{F_e} \Rightarrow F_m = F_e \Rightarrow\; |q|v_2B = |q|E$

$$\Rightarrow v_2B = E = \frac{U}{d} \;\Rightarrow U = Bv_2d \;\Rightarrow B = \frac{U}{dv_2}$$

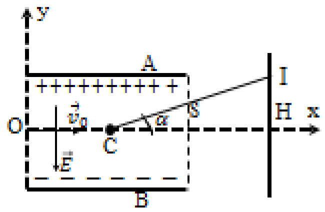
$$B = \frac{1000}{0{,}05 \times 4{,}90.10^5} = 0{,}04T = 40mT$$

c))*On a :* $m_1 < m_2 < m_3 \Longrightarrow v_1 > v_2 > v_3$

Les ions $39K^+$ seront déviés vers le bas (vers la plaque Q) car $v_1 > v_2$ donc la force magnétique supérieur à la force électrique et les ions $41K^+$ seront déviés vers le haut (vers la plaque P) car $v_3 < v_2$ donc la force électrique supérieure à la force magnétique.

Solution 04

I. 1. Représentation de $\vec{E}$ et sa norme



Comme $U = V_A - V_B = 100 > 0 \Rightarrow A(+)\ et\ B(-)$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{100}{0{,}04} = 2{,}5 \times 10^3 V.m^{-1}$$

2. a)) Equation cartésienne de la trajectoire

$T.C.I : \vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

$$\vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E \end{vmatrix} ; \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{eE}{m} \end{vmatrix} ; \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_0 t \\ y = \frac{eE}{2m}t^2 \end{vmatrix} \Rightarrow y = \frac{eE}{2m{v_0}^2}x^2$$

$$A.N:\ y = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 2{,}5.10^4}{2 \times 9{,}1.10^{-31} \times (10^7)^2}x^2 \Rightarrow y = 2{,}2x^2$$

- Coordonnées de S

$$S\begin{vmatrix} x_S = l = 0{,}1 \\ y_S = 2{,}2{x_S}^2 = 2{,}2 \times 0{,}1^2 = 2{,}2 \times 10^{-2} \end{vmatrix}$$

- Coordonnées de $\vec{v_S}$

$$\vec{v_S}\begin{vmatrix} v_{Sx} = v_0 \\ v_{Sy} = \frac{eE}{m}t_S \end{vmatrix} \text{où } x_S = v_0 t_S = l \Rightarrow t_S = \frac{l}{v_0}$$

$$\vec{v_S}\begin{vmatrix} v_{Sx} = v_0 = 10^7 m.s^{-1} \\ v_{Sy} = \frac{eEl}{mv_0} = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 2{,}5.10^3 \times 0{,}1}{9{,}1.10^{-31} \times 10^7} = 4{,}4 \times 10^6 m.s^{-1} \end{vmatrix}$$

$$v_S = \sqrt{{v_{Sx}}^2 + {v_{Sy}}^2} = \sqrt{(10^7)^2 + (4{,}4.10^6)^2} = 1{,}092.10^7 m.s^{-1}$$

b)) Equation de la trajectoire au-delà de S

Au-delà de S, E=0 et a=0, alors le mouvement des électrons au-delà de S est rectiligne uniforme.

Les électrons suivent une droite $(T) : y = ax+b$

$$\text{où } a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = 2 \times 2{,}2l = 2 \times 2{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}44$$

$\Rightarrow (T): y = 0{,}44x + b$

$Or\ S\epsilon\ (T) \Rightarrow y_S = 0{,}44x_S + b \Rightarrow b = y_S - 0{,}44x_S$

$b = y_S - 0{,}44x_S = 2{,}2 \times 10^{-2} - 0{,}44 \times 0{,}1 = -2{,}2 \times 10^{-2}$

$(T): y = 0{,}44x - 2{,}2 \times 10^{-2}$

3. a)) Valeur de la déviation angulaire α

$$\tan\alpha = 0{,}44 \Rightarrow \alpha = 23{,}75°$$

b)) Coordonnées du point I

$\tan\alpha = \frac{y_I}{D} \Rightarrow y_I = D\tan\alpha = 0{,}5 \times 0{,}44 = 0{,}22m$

$x_I = \frac{l}{2} + D = 5 + 50 = 55cm = 0{,}55m \Rightarrow I(\,0{,}55m\,;0{,}22m)$

c)) Durée totale mise par les ions entre O et I

$On\ a : t_{OI} = t_{OS} + t_{SI}\ ,\ avec\ t_{OS} = \frac{l}{v_0} = \frac{0{,}1}{10^7} = 10^{-8}s$

- Comme au-delà de S, le mouvement est rectiligne uniforme, alors

$v = v_S = cste \Rightarrow v = \frac{SI}{t_{SI}} \Rightarrow t_{SI} = \frac{SI}{v}\ ,avec\ SI = \sqrt{{x_{SI}}^2 + {y_{SI}}^2}$

$$Or\ S\begin{vmatrix} x_S = 0{,}1 \\ y_S = 0{,}022 \end{vmatrix}\ et\ I\begin{vmatrix} x_I = 0{,}55 \\ y_I = 0{,}22 \end{vmatrix}$$

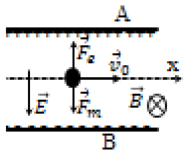
$$SI = \sqrt{{x_{SI}}^2 + {y_{SI}}^2} = \sqrt{(0{,}55 - 0{,}1)^2 + (0{,}22 - 0{,}022)^2} = 0{,}49m$$

$$t_{SI} = \frac{SI}{v} = \frac{0{,}49}{1{,}092.10^7} = 4{,}49 \times 10^{-8}s$$

$d'où : t_{OI} = t_{OS} + t_{SI} = 10^{-8} + 4{,}49.10^{-8} = 5{,}49 \times 10^{-8}s$

II. 1. Sens de $\vec{B}$

En utilisant la règle de trois doigts de la main droite le vecteur champ $\vec{B}$ est entrant.



2. Condition de passage

Si on veut que les particules passent en O', il faut que le mouvement de ses particules soient rectiligne uniforme :

$\vec{F_m} + \vec{F_e} = \vec{0} \Rightarrow F_m = F_e \Rightarrow |q|v_0 B = |q|E \Rightarrow v_0 = \frac{E}{B}$

$$v_0 = \frac{2{,}5.10^3}{3{,}33.10^{-4}} = 7{,}5 \times 10^6 m.s^{-1}$$

Les électrons ayant une vitesse $v = v_0 = 7{,}5 \times 10^6 m.s^{-1}$ peuvent traverser le filtre et ceux qui n'arrivent pas à remplir cette condition ne passeront pas en O' mais ils seront déviés soit vers le haut ou soit vers le bas.

3. Ce dispositif est appelé sélecteur ou Filtre de vitesse.

Solution 05

1. Valeur de v_0

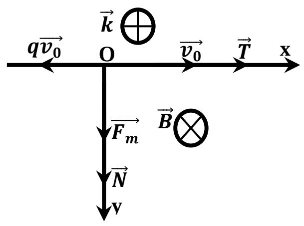
$$T.E.C : \frac{1}{2}m{v_0}^2 = |q|U_0 = eU_0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

$$A.N: v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 285}{9{,}1.10^{-31}}} = 10^7 m.s^{-1}$$

2. a)) Sens de $\vec{B}$

En utilisant la règle de 3 doigts de la main droite le vecteur champ $\vec{B}$ est entrant (voir figure).

- Montrons que le mouvement des particules est plan



Condition initiale

$\vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = 0 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{vmatrix}$

L'électron est soumis à la force magnétique $\vec{F_m} = |q|v_0 B\vec{j}$

$T.C.I : \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$, Or, $F_{mz} = 0 \Rightarrow a_z = 0$, alors le mouvement est uniforme suivant OZ, donc : $z = v_{0z}t + z_0 = 0$, $z = 0$, alors le mouvement est plan

b)) Montrons le mouvement est circulaire uniforme

$T.C.I: \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$

Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$: $\vec{F_m} = |q|v_0 B\vec{N}$ *et*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|v_0 B}{m}\vec{N}$$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{{v_0}^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|v_0 B}{m}\vec{N}$$

Soit $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ le mouvement est uniforme

Par identification *:*

$\frac{{v_0}^2}{R} = \frac{|q|v_0 B}{m} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B} = cte \Rightarrow$le mouvement est circulaire.

D'où le mouvement des particules est circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv_0}{|q|B}$.

c)) Valeur numérique du champ B

$$R = \frac{mv_0}{|q|B} = \frac{mv_0}{eB} \Rightarrow B = \frac{mv_0}{eR} = \frac{m}{eR} \times \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2mU_0}{e}}$$

$$B = \frac{1}{0{,}2}\sqrt{\frac{2 \times 9{,}1.10^{-31} \times 285}{1{,}6.10^{-19}}} = 2{,}84 \times 10^{-4}T$$

d)) Caractéristique du vecteur vitesse en C

- Direction : suivant Ox ; - Sens : même sens que $\overrightarrow{Ox}$ *et*
- Intensité *:* $v_C = v_0 = 10^7 m.s^{-1}$

3. a)) Equation de la trajectoire

- Condition initiale *:* $\vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{vmatrix}$ $, \overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = R \end{vmatrix}$

Au-delà de C , les particules sont soumises à la force électrostatique $\vec{F_e} = q\vec{E}$

$T.C.I : \vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}$, $\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{eE}{m} \end{vmatrix}$

$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0 \\ v_y = -\frac{eE}{m}t \end{vmatrix}$ *et* $\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_0 t \\ y = -\frac{eE}{2m}t^2 + R \end{vmatrix} \Longrightarrow y = -\frac{eE}{2m{v_0}^2}x^2 + R$ *:*

la trajectoire est un parabole

b)) Valeur numérique de E

Si le faisceau d'électron traverse le trou D, alors :

$$y_D = 0 \text{ et } x_D = R$$

$$y_D = - -\frac{eE}{2m{v_0}^2}R^2 + R = 0 \Rightarrow 2m{v_0}^2 = eER$$

$$soit\ E = \frac{2m{v_0}^2}{eR}$$

$$Or, {v_0}^2 = \frac{2eU_0}{m} \Rightarrow E = \frac{2m}{eR} \times \frac{2eU_0}{m} = \frac{4U_0}{R}$$

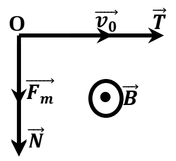
$$E = \frac{4 \times 285}{0{,}2} = 5{,}7 \times 10^3 V.m^{-1}$$

Solution 06

1. Démontrons que le mouvement est circulaire uniforme

L'électron est soumis à la force magnétique $\vec{F_m} = |q|\vec{v_0}\Lambda\vec{B}$

$T.C.I: \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$



Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$

$\vec{F_m} = |q|v_0 B\vec{N}$ *et* $\vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|v_0 B}{m}\vec{N}$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{{v_0}^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|v_0 B}{m}\vec{N}$$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ le mouvement est uniforme

$\frac{{v_0}^2}{R} = \frac{|q|v_0 B}{m} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B} = cte \Rightarrow$ le mouvement est circulaire.

D'où le mouvement des particules est circulaire uniforme de rayon $= \frac{mv_0}{|q|B}$.

2. a)) Démontrons que le mouvement des électrons est R.U

L'électrons est soumis simultanément à la force magnétique $\vec{F_m} = |q|\vec{v_0}\Lambda\vec{B}$ et à la force électrostatique $\vec{F_e} = q\vec{E}$.

T.C.I : $\vec{F_e} + \vec{F_m} = m\vec{a}$, or l'électron est pseudo-isolé, *alors :*

$\vec{F_e} + \vec{F_m} = \vec{0} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cste$; *donc* le mouvement des électrons est nécessairement rectiligne uniforme.

b)) *Sens de* $\vec{E}$: de bas vers le haut.

$\vec{F_m} + \vec{F_e} = \vec{0} \Rightarrow F_m = F_e \Rightarrow |q|v_0 B = |q|E \Rightarrow v_0 = \frac{E}{B} = cste.$

3. a)) *Expression de* e/m

$$v_0 = \frac{E}{B} \text{ et } R = \frac{mv_0}{eB} \Rightarrow v_0 = \frac{ReB}{m} = \frac{E}{B} \Rightarrow e/m = \frac{E}{RB^2}$$

$$^e/_m = \frac{2{,}65.10^4}{0{,}15 \times 10^{-6}} = 1{,}76 \times 10^{11} C.kg^{-1}$$

b)) Valeur de la masse m de l'électron

$$^e/_m = b \Rightarrow m = \frac{e}{b} = \frac{1{,}6.10^{-19}}{1{,}76 \times 10^{11}} = 9{,}1 \times 10^{-31}kg$$

Solution 07

1. a)) Direction et sens de $\vec{E}$.

- direction : horizontale et sens : de la plaque P' vers la plaque P.

b)) Equation de la trajectoire

$T.C.I : \vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}$; $\vec{E}\begin{vmatrix} E_x = -E \\ E_z = 0 \end{vmatrix}$; $\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = \frac{eE}{m} \\ a_z = 0 \end{vmatrix}$

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = \frac{eE}{2m}t^2 \\ z = v_0 t \end{vmatrix} \Rightarrow x = \frac{eE}{2m{v_0}^2}z^2$$

b)) Montrons que $^e/_m = 2{v_o}^2/EL$

Si le faisceau passe en A, alors *:*

$$x_A = \frac{eE}{2mv_0^2} z_A^2 \Rightarrow L = \frac{eE}{2mv_0^2} L^2 \Rightarrow {}^{e}/_{m} = \frac{2v_0^2}{EL}$$

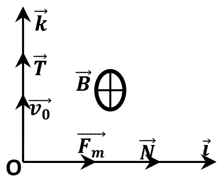
2. a)) Direction et Sens de $\vec{B}$

- direction : perpendiculaire au plan $(q\vec{v_0}, \vec{B})$
- sens : en utilisant la règle de trois doigts de la main droite $\vec{B}$ est un vecteur entrant.

Montrons que la vitesse est constante

L'électron est soumis à la force magnétique $\vec{F_m} = |q|\vec{v_0} \Lambda \vec{B}$

$T.C.I: \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$



Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$ *:*

$$\vec{F_m} = |q|v_0 B\vec{N} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|v_0 B}{m}\vec{N}$$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v_0^2}{R}\vec{N}$$

$$soit\ \vec{a} = \frac{|q|v_0 B}{m}\vec{N} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte$$

b)) Montrons que ${}^{e}/_{m} = {}^{v_0}/_{BL}$

$$on\ a : \frac{v_0^2}{R} = \frac{|q|v_0 B}{m} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B},$$

or le point $A(L\,;0\,;L)$ est un point de la trajectoire , alors *:*

$$L = R = \frac{mv_0}{eB} \Rightarrow {}^{e}/_{m} = \frac{v_0}{BL}$$

c)) Déduction de v_0

$${}^{e}/_{m} = \frac{v_0}{BL} = \frac{2v_0^2}{EL} \Rightarrow v_0 = \frac{E}{2B} = \frac{4.10^4}{2 \times 1{,}69.10^{-3}}$$

$$v_0 = 1{,}18 \times 10^7 m.s^{-1}$$

- Valeur numérique de ${}^{e}/_{m}$

$${}^{e}/_{m} = \frac{v_0}{BL} = \frac{1{,}18 \times 10^7 m.s^{-1}}{1{,}69.10^{-3} \times 0{,}04} = 1{,}76 \times 10^{11} C.kg^{-1}$$

Solution 08

1. a)) Sens de $\vec{E}$ et $\vec{F_e}$

On a : $q > 0$, alors $\vec{E}$ et $\vec{F_e}$ ont même sens. Sens de $\vec{E}$: de bas vers le haut (de la plaque P_1 vers la plaque P_2).

b)) Expression de v_1 et v_2

T.E.C : entre O_1 *et* O_2

$$E_C(O_2) = |q|U = cste \Rightarrow E_{C1} = E_{C2} = E_C(O_2) = |q|U = cste$$

$$Alors : E_{C1} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = |q|U \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m_1}} \quad et\ v_2 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m_2}}$$

c)) Déduisons que *:* $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$

$$v_1^2 = \frac{2|q|U}{m_1} \quad et\ v_2^2 = \frac{2|q|U}{m_2} \Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

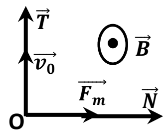
2. a)) Direction et sens de $\vec{B}$

- direction :perpendiculaire au plan $(q\vec{v}, \vec{B})$
- sens : utilisation de la règle de trois doigts la main droite , le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ est sortant.

b)) Démontrons que le mouvement est circulaire uniforme

Les particules sont soumises à la force magnétique $\vec{F_m} = |q|\vec{v_0} \Lambda \vec{B}$

$T.C.I: \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$



Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$

$\vec{F_m} = |q|VB\vec{N}$ *et* $\vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|VB}{m}\vec{N}$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v_0^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N}$$

$\Rightarrow a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ le mouvement est uniforme

On a : $\frac{v_0^2}{R} = \frac{|q|vB}{m} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B} = cte \Rightarrow$ le mouvement est circulaire

Par conséquent le mouvement des particules est circulaire uniforme des rayons : $R_1 = \frac{m_1 v_1}{|q|B}$ *et* $R_2 = \frac{m_2 v_2}{|q|B}$.

c)) Montrons que $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$

$$R_1^2 = \frac{m_1^2 v_1^2}{|q|^2 B^2} = \frac{m_1^2}{|q|^2 B^2} \times \frac{2|q|U}{m_1} = \frac{2m_1 U}{|q|B^2}\ et\ R_2^2 = \frac{2m_2 U}{|q|B^2}$$

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \ :\ A.N: \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{107}{109}} = 0{,}99$$

d)) Expression de R_1 et R_2 en f(U, q, B, m_1 ou m_2)

$$R_1^2 = \frac{2m_1 U}{|q|B^2} \Rightarrow R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1 U}{|q|}} \quad et\ R_2 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2 U}{|q|}}$$

- Valeur numériques de O_2C_1 et O_2C_2

$$O_2C_1 = 2R_1 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2m_1 U}{|q|}} = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2M_1 U}{eN}} \quad et\ O_2C_2 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2M_2 U}{eN}}$$

$$A.N: O_2C_1 = \frac{2}{1}\sqrt{\frac{2 \times 107.10^{-3} \times 6.10^4}{1{,}6.10^{-19} \times 6.10^{23}}} = 0{,}7314m$$

$$O_2C_2 = \frac{2}{1}\sqrt{\frac{2 \times 109.10^{-3} \times 6.10^4}{1{,}6.10^{-19} \times 6.10^{23}}} = 0{,}7382m$$

- Valeur de de la distance C_1C_2

$$C_1C_2 = O_2C_2 - O_2C_1 = 0{,}7382 - 0{,}7314 = 0{,}0068m = 6{,}8mm$$

3. a)) Temps mis par chaque ions pour atteindre leurs pts d'impact

$T = \frac{\theta}{\omega}$, *avec* $\theta = \pi rad$ (pour une demi-circonférence)

$$R_1 = \frac{m_1 v_1}{eB} \quad et\ v_1 = R_1\omega_1 = \frac{m_1 v_1}{eB}\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{eB}{m_1}$$

$$T_1 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi m_1}{eB} = \frac{\pi M_1}{eBN} \quad et\ T_2 = \frac{\pi M_2}{eBN}$$

$$A.N: T_1 = \frac{\pi \times 107.10^{-3}}{1{,}6.10^{-19} \times 6.10^{23}} = 3{,}50 \times 10^{-6}s$$

$$T_2 = \frac{\pi \times 109.10^{-3}}{1{,}6.10^{-19} \times 6.10^{23}} = 3{,}56 \times 10^{-6}s$$

b)) Composition isotopique d'argent

La composition isotopique représente le pourcentage de ceux deux isotopes d'argent dans l'argent naturel.

$$On : n_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2}100 \quad et\ n_2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2}100$$

$$n_1 = \frac{61{,}62.10^{-6}}{61{,}62.10^{-6} + 58{,}38.10^{-6}}100 = 0{,}5135 = 51{,}35\%$$

$$n_2 = \frac{58{,}38.10^{-6}}{61{,}62.10^{-6} + 58{,}38.10^{-6}} 100 = 0{,}4865 = 48{,}65\%$$

Masse molaire atomique de l'argent naturel

$M(Ag) = n_1 M(^{107}Ag) + n_2 M(^{109}Ag)$

$M(Ag) = 0{,}5134 \times 107 + 0{,}4866 \times 109$

$M(Ag) = 107{,}97 g.mol^{-1}$

<u>Solution 09</u>

1. a)) <u>Caractéristique de $\vec{F_e}$</u>

On a : $q > 0$, alors $\vec{E}$ et $\vec{F_e}$ ont même sens. Sens de $\vec{E}$: de bas vers le haut (de la plaque $P_1(+)$ vers la plaque P_2 (-)).

Par conséquent la plaque P_1 est chargées positivement.

- direction : verticale -sens : du bas vers le haut
- intensité :

$$F_e = |q|E = 2e\frac{U_0}{d} = 2 \times 1{,}6.10^{-19} \times \frac{10^3}{0{,}1} = 3{,}2.10^{-15}N$$

b)) <u>Valeur de l'accélération a_1</u>

$T.C.I : \vec{F_e} = m\vec{a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{F_e}{m} = \frac{3{,}2\times10^{-15}}{4\times1{,}67.10^{-27}} = 4{,}79 \times 10^{11} m.s^{-2}$

- <u>Lois horaires du mouvement</u>

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 = 2{,}4 \times 10^{11}t^2 \quad et \quad v_1(t) = a_1t = 4{,}79 \times 10^{11}t$$

c)) <u>Calcul de la durée t_1</u>

$x_1(t) = 2{,}4 \times 10^{11}t^2$,

$$au\ point\ O_2, x_1 = d \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{0{,}1}{2{,}4.10^{11}}} = 6{,}45 \times 10^{-7}s$$

- <u>vitesse en</u> O_2 : $à\ t = t_1$

$v_1(t) = 4{,}79 \times 10^{11}t_1 = 4{,}79 \times 10^{11} \times 6{,}45 \times 10^{-7}$

$$soit\ v_1 = 3 \times 10^5 m.s^{-1}$$

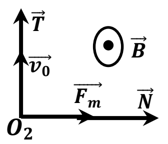
2. a)) <u>Sen de $\vec{B}$</u>

Utilisation de 3doigts de la main droite, le vecteur champ $\vec{B}$ est sortant (voir figure).

b)) <u>Démontrons que le mouvement est circulaire uniforme</u>

Les particules sont soumises à la force magnétique $\vec{F_m} = |q|\vec{v_0}\Lambda\vec{B}$

$T.C.I: \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$



Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$

$\vec{F_m} = |q|VB\vec{N}$ et $\vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|VB}{m}\vec{N}$

$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{{v_0}^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ le mouvement est uniforme

$On\ a: \frac{{v_0}^2}{R} = \frac{|q|vB}{m} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B} = cte \Rightarrow$ le mouvement est circulaire

D'où le mouvement des particules est circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{mv}{2eB}$

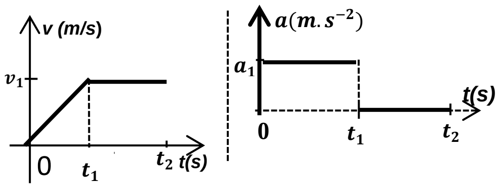
$$A.N:\ R = \frac{4 \times 1{,}67.10^{-27} \times 3.10^5}{2 \times 1{,}6.10^{-19} \times 0{,}2} = 3{,}13 \times 10^{-2}m$$

- Pour un mouvement circulaire uniforme $a_2 = 0$ $(car\ \frac{dv}{dt} = 0)$

- durée t_2 : $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$, $avec\ \omega = \frac{|q|B}{m} = \frac{2eB}{m} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi m}{2eB}$

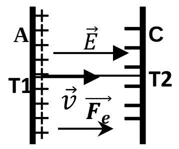
$$A.N:\ t_2 = \frac{4 \times 1{,}67.10^{-27}\pi}{2 \times 1{,}6.10^{-19} \times 0{,}2} = 3{,}28 \times 10^{-7}s$$

3. <u>Représentation graphique de a(t) et v(t) de la trajectoire</u>



<u>Solution 10</u>

1. a)) <u>Schéma représentatif</u>



a)) <u>Montrons que les ions arrivent en T_2 avec</u> <u>une même E.C</u>

Les ions sont soumis à la force électrostatique $\vec{F_e} = q\vec{E}$.

T.E.C : entre T_1 et T_2

$E_C(T_2) = eU = cste \Rightarrow E_{C1} = E_{C2} = E_C(T_2) = eU = cste$

$E_{C1} = E_{C2} = eU = cste$, alors les ions arrivent en T_2 avec une même énergie cinétique.

b)) <u>Vitesse des particules isotopes en T_2</u>

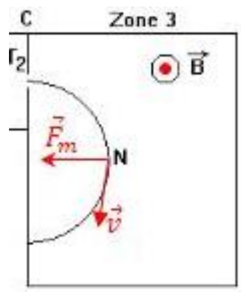
$T.E.C : entre\ T_1\ et\ T_2$

$E_C(T_2) = |q|U = ecste \Rightarrow E_{C1} = E_{C2} = E_C(O_2) = |q|U = cste$

$$E_{C1} = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = eU \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}} = \sqrt{\frac{2eU}{39m_0}} \quad (^{39}K^+)$$

$$et\ v_2 = \sqrt{\frac{2eU}{xm_0}} \quad (^{x}K^+)$$

2. a)) et b))



c)) <u>Expression des rayons de la</u> <u>trajectoire R_1 et R_2</u>

Comme le mouvement des particules est circulaire uniforme , alors le rayon de la courbure est donné par $R_1 = \frac{m_1v_1}{|q|B}$

$${R_1}^2 = \frac{{m_1}^2{v_1}^2}{|q|^2B^2} = \frac{{m_1}^2}{|q|^2B^2} \times \frac{2|q|U}{m_1} = \frac{2m_1U}{|q|B^2} = \frac{2m_1U}{eB^2} = \frac{78m_0U}{eB^2}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{78m_0U}{e}} \quad et\ R_2 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2xm_0U}{e}}$$

d)) Application numérique

$$R_1 = \frac{1}{0,1}\sqrt{\frac{78 \times 1,67 \times 10^{-27} \times 10^3}{1,6 \times 10^{-19}}} = 0,285m = 28,5cm$$

3. a)) Points d'impact des isotopes

L'abondance naturelle est le pourcentage en nombre d'atomes, pour un élément donné, de chacun des isotopes par rapport à l'ensemble des isotopes (naturels) trouvés sur une planète.

Comme l'isotope $^{39}K^+$ est le plus abondant que l'isotope $^{x}K^+$, alors $m_1 < m_2$ et $R_1 < R_2$. Or le point I_1 est plus lumineux que le point I_2 , alors le point d'impact de l'isotope $^{39}K^+$ est I_1 et celui de $^{x}K^+$ est I_2.

b)) Expression des rayons des courbures

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{78m_0U}{e} \times \frac{e}{2xm_0U}} = \sqrt{\frac{78}{2x}} = \sqrt{\frac{39}{x}}$$

c)) Détermination de la valeur de x

$$On\ a:\ I_1I_2 = d = 2(R_2 - R_1)\ soit\ R_2 = \frac{d}{2} + R_1$$

$$R_2 = \frac{1,5}{2} + 28,5 = 29,25cm$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{39}{x}} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{x}{39}} \Rightarrow \frac{x}{39} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \Rightarrow x = 39\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

$$x = 39\left(\frac{29,75}{28,5}\right)^2 = 41\ :\ il\ s'agit de\ l'isotope\ ^{41}K^+$$

Solution 11

1. a)) Démontrons que le mouvement de la particule est plan

- *Condition initiale*

$$\vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0\cos\alpha_0 \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha_0 \\ v_{0z} = 0 \end{vmatrix}\ ,\overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{vmatrix}$$

La particule est soumise à la force $\vec{F_e} = q\vec{E}$

$$T.C.I: q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} \Rightarrow \vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = -E \\ E_z = 0 \end{vmatrix},\ \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{q}{m}E \\ a_z = 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0\cos\alpha_0 \\ v_y = -\frac{q}{m}E + v_0\sin\alpha_0 \\ v_z = 0 \end{vmatrix}\ et\ \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = (v_0\cos\alpha_0)t \\ y = -\frac{qE}{2m}t^2 + (v_0\sin\alpha_0)t \\ z = 0 \end{vmatrix}$$

Comme z = 0, alors le mouvement de la particule est plan et a eu lieu dans le plan (Ox, Oy).

b)) Equation de la trajectoire

On a : $x = (v_0\cos\alpha_0)t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha_0}$, alors :

$$y = -\frac{qE}{2{v_0}^2\cos^2\alpha_0}x^2 + x\tan\alpha_0$$

- Démontrons qu'en S : $v_S = v_O$ et $|\alpha_S| = |\alpha_O|$

$T.E.C: entre\ O\ et\ S$

$$E_C(S) - E_C(O) = W(\vec{F_e}) = \vec{F_e}.\overrightarrow{OS} = 0\ car\ \vec{F_e} \perp \overrightarrow{OS} \Rightarrow$$

$$E_C(S) - E_C(O) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m{v_S}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = 0 \Rightarrow v_S = v_O = cste$$

- *Suivant Ox :* $v_{Ox} = v_0\cos\alpha_0$ *et* $v_{Sx} = v_0\cos\alpha_S$

$$\Longrightarrow v_0\cos\alpha_0 = v_0\cos\alpha_S \Rightarrow \cos\alpha_S = \cos\alpha_0 \Rightarrow |\alpha_S| = |\alpha_O|$$

2. a)) Expression de E'_C en S en f (q,E, D et α_0)

$$En\ S,\ y_S = 0\ et\ x_S = D \Rightarrow y_S = -\frac{qE}{2m{v_0}^2\cos^2\alpha_0}D^2 + D\tan\alpha_0 = 0$$

$$qED = m{v_0}^2 \times 2\cos^2\alpha_0\tan\alpha_0 = m{v_0}^2 \times 2\cos^2\alpha_0\frac{\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0} \Rightarrow$$

$$qED = m{v_0}^2 \times 2\cos\alpha_0\sin\alpha_0 = m{v_0}^2\sin 2\alpha_0 \Rightarrow$$

$$m{v_0}^2 = \frac{qED}{\sin 2\alpha_0} \Rightarrow E'_C = \frac{1}{2}m{v_S}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{qED}{2\sin 2\alpha_0}$$

$$soit\ E'_C = \frac{qED}{2\sin 2\alpha_0}$$

Pour les ions $40Ca^{2+}$, q = 2e, alors :

$$E'_C = \frac{2eED}{2\sin 2\alpha_0} = \frac{eED}{\sin 2\alpha_0}$$

$$E'_C = \frac{1,6.10^{-19} \times 10^4 \times 0,05}{\sin 30°} = 1,6 \times 10^{-16}J$$

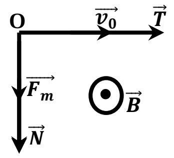
b)) Valeur de la tension U

$$T.E.C: E'_C = W(\vec{F_e}) = |q|U = 2eU \Rightarrow U = \frac{E'_C}{2e}$$

$$U = \frac{1,6 \times 10^{-16}}{2 \times 1,6.10^{-19}} = 500V$$

4. Expression de R en f(E'_C , m, q et B)

La particule de masse m est soumise à la force magnétique $\vec{F_m} = |q|\vec{v_0}\Lambda\vec{B}$.



$$T.C.I: \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$$

Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$

$$\vec{F_m} = |q|v_0B\vec{N}\ \ et\ \ \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N}$$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{{v_0}^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N}$$

$soit\ \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ le mouvement est uniforme

$On\ a: \frac{{v_0}^2}{R} = \frac{|q|v_0B}{m} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B} = cte \Rightarrow$ le mouvement circulaire.

Par conséquent le mouvement des particules est circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv_0}{|q|B}$.

$$On\ a:\ R = \frac{mv_0}{|q|B}\ \ or\ \ E'_C = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2{E_C}'}{m}} \Rightarrow$$

$$R = \frac{mv_0}{|q|B} = \frac{m}{|q|B}\sqrt{\frac{2{E_C}'}{m}} = \frac{\sqrt{2m{E_C}'}}{|q|B}$$

$$Pour\ les\ ions\ 40Ca^{2+} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2m{E_C}'}}{2eB}$$

$$A.N: R = \frac{\sqrt{2 \times 40 \times 1,6.10^{-27} \times 1,6.10^{-16}}}{2 \times 1,6.10^{-19} \times 0,116} = 39,38 \times 10^{-2}m$$

- Calcul de la distance S'A

$$S'A = 2R = 2 \times 39,38 \times 10^{-2} = 78,76 \times 10^{-2}m$$

5. Masse atomique molaire de xCa^{2+}

$$L' = S'A = 2R' = 1,049L = 1,049 \times 2R \Rightarrow 2R' = 1,049 \times 2R$$

$\frac{R'}{R}=1{,}049$ or $\left(\frac{R'}{R}\right)^2=\frac{m'}{m}=\frac{M'}{M}\Rightarrow M'=M\left(\frac{R'}{R}\right)^2$

$M'=40(1{,}049)^2=44g.mol^{-1}\Rightarrow x=44$

Il s'agit de l'isotope $^{44}Ca^{2+}$

Solution 12

1. a)) Montrons que l'énergie cinétique est constante en O

La particule est soumise à la force électrostatique $\overrightarrow{F_e}$

T.E.C : entre O et S

$E_C(S)=|q|U=eU=cste$

$E'_C=1{,}6.10^{-19}\times 1200=1{,}92\times 10^{-16}J$

b)) Expression de v_1 et v_2

$E_{C1}=\frac{1}{2}m_1{v_1}^2=eU\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{2eU}{m_1}}$ et $v_2=\sqrt{\frac{2eU}{m_2}}$

c)) Déduisons que $\frac{V_1}{V_2}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$:

$${v_1}^2=\frac{2|q|U}{m_1}\ \text{ et }\ {v_2}^2=\frac{2|q|U}{m_2}\Rightarrow\frac{{v_1}^2}{{v_2}^2}=\frac{m_2}{m_1}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

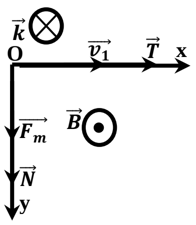
2. a)) Sens de $\vec{B}$

En Utilisant la règle de trois doigts de la main droite, le vecteur champ $\vec{B}$ est sortant.

b)) - Montrons que le mouvement est plan

- Condition initiale

$\vec{v_0}\begin{vmatrix}v_{0x}=v_0\\v_{0y}=0\\v_{0z}=0\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix}x_0=0\\y_0=0\\z_0=0\end{vmatrix}$



L'électron est soumis à la force magnétique $\overrightarrow{F_m}=|q|v_0B\vec{j}$

T.C.I : $\overrightarrow{F_m}=m\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=\frac{\overrightarrow{F_m}}{m}$

Or, $F_{mz}=0\Rightarrow a_z=0\Rightarrow$ le mouvement est uniforme suivant OZ, donc : $z=v_{0z}t+z_0=0$; $z=0\Rightarrow$ le mouvement est plan et a eu lieu dans le plan (Ox,Oy).

- Montrons que le mouvement est circulaire uniforme

La particule de masse m est soumise à la force magnétique $\overrightarrow{F_m}=|q|\overrightarrow{v_0}\Lambda\vec{B}$.

$T.C.I$: $\overrightarrow{F_m}=m\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=\frac{\overrightarrow{F_m}}{m}$

Dans la base de Frenet $(\vec{T},\vec{N})$: $\overrightarrow{F_m}=|q|vB\vec{N}$ et $\vec{a}=\frac{\overrightarrow{F_m}}{m}=\frac{|q|Vb}{m}\vec{N}$

$\vec{a}=a_T\vec{T}+a_N\vec{N}=\frac{dv}{dt}\vec{T}+\frac{v^2}{R}\vec{N}=\frac{|q|vB}{m}\vec{N}\Rightarrow\frac{dv}{dt}=0\Rightarrow v=cte$

Alors le mouvement est uniforme

Par identification : $\frac{v^2}{R}=\frac{|q|vB}{m}\Rightarrow R=\frac{mv}{|q|B}=cte\Rightarrow$ le mouvement est circulaire.

D'où le mouvement des particules est circulaire uniforme de rayon $R=\frac{mv}{Eb}$.

c)) Expression de R_1 et R_2 en fonction de m_1 ou m_2, e, U, B

$${R_1}^2=\frac{{m_1}^2{v_1}^2}{|q|^2B^2}=\frac{{m_1}^2}{|q|^2B^2}\times\frac{2|q|U}{m_1}=\frac{2m_1U}{|q|B^2}=\frac{2m_1U}{eB^2}$$

$$\Rightarrow R_1=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{e}}\ \text{ et }\ R_2=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U}{e}}$$

- Relation entre R_1, R_2, m_1, m_2

$$\frac{R_1}{R_2}=\sqrt{\frac{2m_1U}{e}\times\frac{e}{2m_2U}}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

d)) Calcul de la distance MP

$MP=OP-OM=2R_2-2R_1=2(R_2-R_1)$

$$soit\ MP=2\left(\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U}{e}}-\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{e}}\right)=\frac{2}{B}\sqrt{\frac{2U}{e}}\left(\sqrt{m_2}-\sqrt{m_1}\right)$$

$$MP=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{8U}{e}}\left(\sqrt{m_2}-\sqrt{m_1}\right)$$

$$MP=\frac{1}{0{,}125}\sqrt{\frac{8.1200}{1{,}6.10^{-19}}}\left(\sqrt{11.1{,}67.10^{-27}}-\sqrt{10.1{,}67.10^{-27}}\right)$$

$MP=1{,}236\times 10^{-3}m$

3. Composition isotopique du bore

$On\ a:\ \frac{n_2}{n_1}=\frac{i_2}{n_1}=4{,}32\Rightarrow n_2=4{,}32n_1$

$or\ \ n_1+n_2=1\Rightarrow n_1=1-n_2$

$soit\ \ n_1=4{,}32(1-n_2)\Rightarrow n_2=\frac{4{,}32}{5{,}32}=0{,}812=81{,}20\%$

$et\ n_1=1-0{,}812=0{,}188=18{,}80\%$

D'où le bore naturel est composé de 81,20% du bore 10 et 18,80% du bore 11.

Masse molaire atomique du bore naturel

$M(Br)=n_1M(^{10}Br)+n_2M(^{11}Br)=0{,}188\times 10+0{,}812\times 11$

$M(Br)=10{,}812g.mol^{-1}$

Solution 13

1. a)) Signe de U suivant le signe de q

Comme les plaques sont parallèles, alors :

- si $q>0\Rightarrow\vec{E}$ et $\overrightarrow{F_e}$ ont même sens.

Les Ions positifs sont accélérés de la plaque positive M(+) vers la plaque négative N(-): $U=V_M-V_N>0$

- *si* $q<0\Rightarrow\vec{E}$ et $\overrightarrow{F_e}$ ont même sens

Les Ions négatifs sont accélérés de la plaque négative M(-) vers la plaque positive N(+):: $U=V_M-V_N<0$

b)) Expression de v en fonction de q, U et m

La particule est soumise à la force électrostatique $\overrightarrow{F_e}$

T.E.C : entre M et N

$$E_C(S)=\frac{1}{2}mv^2=|q|U\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2|q|U}{m}}\Rightarrow v_E=v=\sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$$

2. a)) <u>Démontrons que le mouvement est circulaire uniforme</u>

- Sens de la force magnétique $\overrightarrow{F_m}$

En utilisant la règle de 3doigts de la main droite $\overrightarrow{F_m}$: de bas vers le haut.

- $T.C.I : \overrightarrow{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\overrightarrow{F_m}}{m}$

Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$

$\overrightarrow{F_m} = |q|vB\vec{N}$ *et* $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{F_m}}{m} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N}$

$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ le mouvement est uniforme

Par identification : $\frac{v^2}{R} = \frac{|q|vB}{m} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B} = cte \Rightarrow M.C$

D'où le mouvement des particules est C.U de rayon $R = \frac{mv}{|q|B}$

b)) <u>Expression de U en fonction de q, m, B, *R*</u>

$$R = \frac{mv}{|q|B} \Rightarrow R^2 = \frac{m^2v^2}{q^2B^2} = \frac{m^2}{q^2B^2} \times \frac{2qU}{m} = \frac{2mU}{qB^2} \Rightarrow U = \frac{qB^2R^2}{2m}$$

3. a)) <u>Valeur numérique de U pour les ions Sr^{2+}</u>

$$U = \frac{qB^2R^2}{2m} \text{ , avec } q = 2e \Rightarrow U = \frac{eB^2R^2}{m}$$

$$A.N : U = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 0{,}160^2 \times 0{,}70^2}{87{,}6 \times 1{,}67 \times 10^{-27}} = 1{,}38 \times 10^4 V$$

b)) <u>Encadrement de nombre de masse des isotopes</u>

$$Ui = \frac{eB^2R^2}{mi} \Rightarrow mi = \frac{(RB)^2e}{Ui}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{(RB)^2e}{U_1} \quad et \quad m_2 = \frac{(RB)^2e}{U_2}$$

avec : $U_1 = 13930V$ *et* $U_1 = 14440V$

$$A.N : m_1 = \frac{(0{,}70 \times 0{,}160)^2 \times 1{,}6.10^{-19}}{13930} = 1{,}44 \times 10^{-25} kg$$

$$m_1 = \frac{1{,}44 \times 10^{-25}}{1{,}67 \times 10^{-27}} = 86{,}8u$$

$$m_2 = \frac{(0{,}70 \times 0{,}160)^2 \times 1{,}6.10^{-19}}{14440} = 1{,}40 \times 10^{-25} kg$$

$$m_2 = \frac{1{,}40 \times 10^{-25}}{1{,}67 \times 10^{-27}} = 83{,}8u$$

$Or\ m = 87{,}6u \Rightarrow m_2 < m < m_1 \Rightarrow 83{,}8u < Au < 86{,}8u$

d'où: $84 < A < 87$, où A est la masse molaire atomique

<u>Solution 14</u>

1. a)) <u>Caractéristique de la force électrostatique $\overrightarrow{F_e}$</u>

$\overrightarrow{F_e} = q\vec{E} = e\vec{E}$, alors $\overrightarrow{F_e}$ et $\vec{E}$ ont même sens.

-direction : perpendiculaire aux plaques

- Sens : du bas vers le haut

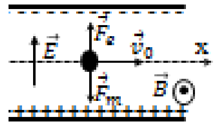
- intensité : $F_e = eE = 1{,}6.10^{-19} \times 1{,}2 \times 10^4 = 1{,}92 \times 10^{-15}N$

b)) <u>Caractéristique de la force magnétique $\overrightarrow{F_m}$</u>

- direction : perpendiculaire au plan ($q\vec{v}, \vec{B}$)

- sens : du haut vers le bas et intensité : $F = qvB$ car $\vec{v} \perp \vec{B}$

Sens de $\vec{B}$: $\vec{B}$ est un vecteur sortant (voir figure ci-dessous)



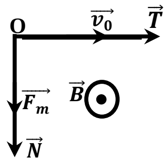
c)) Si on veut que les ions passent en O_2 sans subir aucune déviation, il faut le mouvement de ses ions soient rectiligne uniforme : $\overrightarrow{F_m} + \overrightarrow{F_e} = \vec{0} \Rightarrow F_m = F_e \Rightarrow qv_0 = qE \Rightarrow v_0 = \frac{E}{B}$

$$A.N: \ v_0 = \frac{1{,}2 \times 10^4}{0{,}2} = 6 \times 10^4 m.s^{-1}$$

d)) Les ions ayant une vitesse $v > v_0$ seront déviés vers le bas et les ions ayant une vitesse $v < v_0$ seront déviés vers le haut.

2. a)) <u>Montrons que le mouvement est circulaire uniforme</u>

La particule de masse m est soumise à la force magnétique $\overrightarrow{F_m}$



$T.C.I: \overrightarrow{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\overrightarrow{F_m}}{m}$

Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$:

$\overrightarrow{F_m} = |q|vB\vec{N}$ et $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{F_m}}{m} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N}$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte$$

le mouvement est uniforme.

Par identification : $\frac{v^2}{R} = \frac{|q|vB}{m} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B} = cte \Rightarrow M.C$

D'où le mouvement des particules est C. U de rayon $R = \frac{mv}{eB}$

<u>Calcul de R_1 et R_2</u>

$$R_1 = \frac{m_1v_0}{eB} \quad et \quad R_2 = \frac{m_2v_0}{eB}$$

$$A.N: \ R_1 = \frac{10^{-26} \times 6 \times 10^4}{1{,}6 \times 10^{-19} \times 0{,}2} = 1{,}875 \times 10^{-2}m$$

$$R_2 = \frac{1{,}76.10^{-26} \times 6 \times 10^4}{1{,}6 \times 10^{-19} \times 0{,}2} = 2{,}194 \times 10^{-2}m$$

b)) <u>Calcul de O_2C_1 et O_2C_2</u>

$$O_2C_1 = 2R_1 = 2 \times 1{,}875 \times 10^{-2} = 3{,}75 \times 10^{-2}m$$

$$O_2C_2 = 2R_2 = 2 \times 2{,}194 \times 10^{-2} = 4{,}388 \times 10^{-2}m$$

c)) <u>Détermination de pourcentage du lithium ${}^6Li^+$ et celui du lithium ${}^7Li^+$ dans le lithium naturel</u>

La composition isotopique représente le pourcentage de ceux deux isotopes de Lithium dans Lithium naturel.

$$On : \ n_1 = \frac{q_1}{q_1 + q_2} \quad et \ n_2 = \frac{q_2}{q_1 + q_2}$$

$$n_1 = \frac{6{,}60.10^{-8}}{6{,}60.10^{-8} + 8{,}14.10^{-7}} = 0{,}075 = 7{,}5\%$$

$$n_2 = \frac{8{,}14.10^{-8}}{6{,}60.10^{-8} + 8{,}14.10^{-7}} = 0{,}925 = 92{,}5\%$$

Dans Lithium naturel, il y a 7,5% de lithium 6 et 92,5% de ${}^7Li$.

Détermination de la mase molaire de lithium naturel

$$M(Li) = n_1M({}^6Li) + n_2M({}^7Li) = 0{,}0749 \times 6 + 0{,}9251 \times 7$$

$$M(Li) = 6{,}925 g.mol^{-1}$$

Solution 15

I. 1. Montrons que $E_{C1} = E_{C2} = cste$

La particule est soumise à la force électrostatique $\vec{F_e} = q\vec{E}$

T.E.C : $E_C(S) = |q|U = 2eU = cste \Rightarrow E_{C1} = E_{C2} = 2eU = cste$

2. Expression de v_1/v_2 en fonction de a et b

$$E_{C1} = E_{C2} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1} = \frac{bu}{au} = \frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{70}{68}} = 1{,}015$$

3. Valeur de U pour

$$v_1 = 10^5 m.s^{-1} \quad et \ \ E_{C1} = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = 2eU \Rightarrow U = \frac{m_1{v_1}^2}{4e}$$

$$U = \frac{68 \times 1{,}67.10^{-27} \times 10^{10}}{4 \times 1{,}6.10^{-19}} = 1{,}76 \times 10^3 V$$

$$\frac{v_1}{v_2} = 1{,}015 \quad \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{1{,}015} = \frac{10^5}{1{,}015} = 9{,}85 \times 10^4 m.s^{-1}$$

II. Valeur numérique du champ magnétique B

Dans cette domaine, la particule est soumise simultanément à la force électrostatique $\vec{F_e}$ et à la force magnétique $\vec{F_m}$.

Le principe d'inertie donne :

$$\vec{F_e} + \vec{F_e} = \vec{0} \Rightarrow F_e = F_m \Rightarrow |q|v_1B = |q|E$$

$$\Rightarrow B = \frac{E}{v_1} = \frac{4.10^3}{10^5} = 0{,}04T$$

III. 1. Montrons que le mouvement est plan

Le mouvement particules dans le champ $\vec{B}$ est plan, circulaire et uniforme de rayon $R_1 = \frac{m_1v_1}{2eB'}$ (à démontrer)

2. Valeur numérique de B'

On a : $R_1 = \frac{m_1v_1}{2eB'} \Rightarrow B' = \frac{m_1v_1}{2eR_1}$ avec $R_1 = \frac{OP_1}{2} = 1m$

$$A.N: B' = \frac{68 \times 1{,}67.10^{-27} \times 10^5}{2 \times 1{,}6.10^{-19}} = 3{,}55 \times 10^{-2}T$$

3. Détermination de $\frac{OP_1}{OP_2}$ en $f(a,b)$

$$\left(\frac{OP_1}{OP_2}\right)^2 = \left(\frac{2R_1}{2R_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{m_1}{m_2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{OP_1}{OP_2} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

- Détermination de P_1P_2

$$P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = OP_1\left(\frac{OP_2}{OP_1} - 1\right) = OP_1\left(\frac{1}{\frac{OP_1}{OP_2}} - 1\right)$$

$$P_1P_2 = OP_1\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1\right) = 2(1{,}015 - 1) = 0{,}03m$$

Solution 16

1. a)) –Signe de U_0

Les particules sont chargés positivement, alors $\vec{E}$ et $\vec{F_e}$ ont même sens. Alors les ions positifs sont accélérés de de la plaque positive $P_1(+)$ vers la plaque négative P_2 (-) donc $U_0 = V_{P1} - V_{P2} > 0$.

- Valeur de la vitesse v_1 des ions $68Zn^{2+}$

T.E.C : $\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = |q|U_0 = 2eU_0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{4eU_0}{m_1}}$

$$A.N: v_1 = \sqrt{\frac{4 \times 1{,}6.10^{-19} \times 5000}{68 \times 1{,}67.10^{-27}}} = 1{,}68 \times 10^5 m.s^{-1}$$

b)) Relation entre v_1, v_1, m_1 et m_2

T.E.C : entre O_1 et O_2

$E_C(O_2) = 2eU_0 = cste \Rightarrow E_{C1} = E_{C2} = E_C(O_2) = 2eU_0 = cste$

Alors : $E_{C1} = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 = 2eU_0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{4eU_0}{m_1}}$ et $v_2 = \sqrt{\frac{4eU_0}{m_2}}$

c)) Déduisons que $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$

$${v_1}^2 = \frac{4eU_0}{m_1} \quad et \ \ {v_2}^2 = \frac{4eU_0}{m_2} \Rightarrow \frac{{v_1}^2}{{v_2}^2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

- Valeur numérique de x

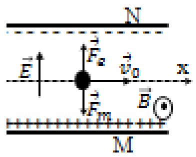
$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{68u}{xu}} = \sqrt{\frac{68}{x}} \Rightarrow x = 68\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{68}{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}$$

$$x = \frac{68}{1{,}03^2} = 64$$

2. a)) Sens de $\vec{B}$

Si on veut que les ions traversent le dispositif en ligne droite, alors son mouvement est nécessairement uniforme car la particule est pseudo-isolé. $\vec{F_m} + \vec{F_e} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F_m} = -\vec{F_e}$

Utilisation de la règle de 3doigts de la main droite le vecteur champ $\vec{B}$ est sortant.



b)) Expression et valeur numérique de B

$$F_m = F_e \Rightarrow qv_1B = qE \Rightarrow B = \frac{E}{v_1} = \frac{U}{dv_1}$$

$$B = \frac{1{,}68.10^3}{0{,}2 \times 1{,}68.10^5} = 0{,}05T = 50mT$$

c)) On a $v_2 = 1{,}03v_1 \Rightarrow v_2 > v_1 \Longrightarrow F_m > F_e$, alors les ions xZn^{2+} seront déviés vers la plaque M.

Alors les ions xZn^{2+} ne seront pas déviés vers la plaque N.

d)) Valeur numérique de B'

$$B' = \frac{E}{v_2} = \frac{U}{1{,}03v_1d} = \frac{1{,}68.10^3}{01{,}03 \times 1{,}68.10^5 \times 0{,}2} = 4{,}85 \times 10^{-2}\ T$$

3. a)) Sens de $\vec{B_0}$

Utilisation de la règle de 3 doigts de la main droite, le vecteur champ magnétique $\vec{B_0}$ est entrant.

b)) Expression du rayon de la trajectoire

Le mouvement des ions dans le spectrographe de masse est circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv}{|q|B_0}$

c)) Expression de $R_1 - R_2$ en fonction de R_1 et x.

$$R_1{}^2 = \frac{m_1{}^2 v_1{}^2}{|q|^2 B^2} = \frac{m_1{}^2}{|q|^2 B^2} \times \frac{2|q|U}{m_1} = \frac{2m_1 U}{|q|B^2} \ et\ R_2{}^2 = \frac{2m_2 U}{|q|B^2}$$

$$\frac{R_1{}^2}{R_2{}^2} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \Longrightarrow R_2 = R_1\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = R_1\sqrt{\frac{x}{68}}$$

$$R_1 - R_2 = R_1 - R_1\sqrt{\frac{x}{68}} = R_1\left(1 - \sqrt{\frac{x}{68}}\right)$$

d)) Expression de x en fonction de a et R_1

$$II' = a = 2R_1 - 2R_2 = 2(R_1 - R_2) = 2R_1\left(1 - \sqrt{\frac{x}{68}}\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{a}{2R_1} = 1 - \sqrt{\frac{x}{68}} \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{68}} = 1 - \frac{a}{2R_1} \Rightarrow x = 68\left(1 - \frac{a}{2R_1}\right)^2$$

- Valeur numérique de x

$$R_1 = \frac{m_1 v_1}{2eB_0} \ \Longrightarrow x = 68\left(1 - \frac{aeB_0}{m_1 v_1}\right)^2$$

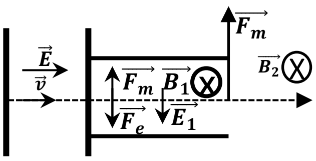
$$x = 68\left(1 - \frac{7{,}20.10^{-3} \times 1{,}6.10^{-19} \times 0{,}5}{68 \times 1{,}67.10^{-27} \times 1{,}68.10^5}\right)^2 = 63{,}9 \ \Longrightarrow x = 64$$

D'où, dans les deux expériences x = 64 = cste

Il s'agit de l'isotope $^{64}Zn^{2+}$

Solution 17

1. Représentation de $\vec{E}, \vec{B_1}, \vec{B_2}$



2. Calcul de v_1 pour les ions $204Pb^{2+}$

Dans le spectrographe de masse, le mouvement des ions est circulaire uniforme de rayon

$$R_1 = \frac{m_1 v_1}{|q|B_2} = \frac{m_1 v_1}{2eB_2} = \frac{D_1}{2} \Longrightarrow v_1 = \frac{eB_2 D}{m_1}$$

$$v_1 = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 0{,}249 \times 0{,}64}{204 \times 1{,}67.10^{-27}} = 7{,}48 \times\times 10^4 m.s^{-1}$$

b)) Valeur de U_1 et U

- Dans le filtre de vitesse, le mouvement des ions est rectiligne uniforme de vitesse

$$v_1 = \frac{E_1}{B_1} = \frac{U_1}{B_1 d} \ \Longrightarrow U_1 = v_1 B_1 d$$

$$U_1 = 7{,}48 \times 10^4 \times 0{,}225 \times 0{,}058 = 9{,}76 \times 10^2 V$$

- Dans l'accélérateur :

$$E_{C1} = \frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 = 2eU \ \Rightarrow U = \frac{m_1 v_1{}^2}{4e}$$

$$U = \frac{204 \times 1{,}67.10^{-27} \times (7{,}48.10^4)^2}{4 \times 1{,}6 \times 10^{-19}} = 2{,}98 \times 10^3 V$$

3. a)) Valeur de U'

$$U' = \frac{m_2 v_1{}^2}{4e} = \frac{206 \times 1{,}67.10^{-27} \times (7{,}48.10^4)^2}{4 \times 1{,}6 \times 10^{-19}} = 3 \times 10^3 V$$

b)) Expression de R_2 en fonction de R_1, m_1, m_2

$$R_1 = \frac{m_1 v_1}{2eB_2} \quad et\ R_2 = \frac{m_2 v_1}{2eB_2} \Longrightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{m_2}{m_1} \Longrightarrow R_2 = R_1\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$$

$$A.N:\ R_2 = 32\left(\frac{206}{204}\right) = 32{,}31cm$$

c)) Distance de deux points d'impact

$$Soit\ a = D_2 - D_1 = 2(R_2 - R_1) = 2(32{,}31 - 32) = 0{,}62cm$$

Solution 18

1. a)) Expression de de v en f(q, m, U)

La particule est soumise à la force électrostatique $\vec{F_e}$

T.E.C : entre S et A : $E_C(A) = \frac{1}{2}mv^2 = |q|U \ \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$

b)) Montrons que $v_1 \neq v_2$

Soit v_1 la vitesse des ions $200Hg^{2+}$et v_2 celle de $202Hg^{2+}$

Par conséquent : $v_1 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m_1}} \quad et \quad v_2 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m_2}}$,

$Or\ m_1 \neq m_2 \ \Longrightarrow v_1 \neq v_2$

2. a)) Sens de $\vec{B}$

En Utilisant la règle de trois doigts de la main droite, le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ est sortant.

b)) Montrons que $v_0 = \frac{E}{B}$

Dans le filtre de vitesse la particule est soumise simultanément à la force électrostatique $\vec{F_e}$ et à la force magnétique $\vec{F_m}$. Puisque la particule est pseudo-isolée, alors :

$$\vec{F_e} + \vec{F_e} = \vec{0} \ \Rightarrow F_e = F_m \Rightarrow |q|v_0 B = |q|E \ \Rightarrow v_0 = \frac{E}{B}$$

Seule les particules ayant une vitesse $v_0 = \frac{E}{B}$ passeront en A'

La trajectoire de la particule est une droite mais son mouvement est rectiligne uniforme de vitesse $v_0 = \frac{E}{B}$ = cste

3. a)) Expression de du rayon R

$$R = \frac{mv_0}{|q|B'} = \frac{m}{|q|B'} \times \frac{E}{B} = \frac{mE}{|q|B'B}$$

b)) Distance de deux points d'impact

$$R_1 = \frac{m_1 E}{|q|B'B} = \frac{m_1 E}{2eB'B} \ \ et\ R_2 = \frac{m_2 E}{2eB'B}$$

$$Soit\ a = D_2 - D_1 = 2(R_2 - R_1) = \frac{2E}{2eB'B}(m_2 - m_1)$$

$$a = \frac{E}{eB'B}(206u - 204u) = \frac{2uE}{eB'B}$$

$$a = \frac{2 \times 1{,}67.10^{-27} \times 6.10^4}{1{,}6.10^{-19} \times 0{,}1 \times 0{,}2} = 6{,}26 \times 10^{-2}m = 6{,}26cm$$

D'où la distance de deux points d'impact est a = 6,26cm.

Solution 19

1. Calcul de U

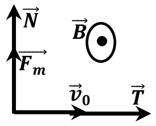
L'électron est soumis à la force électrostatique $\vec{F_e}$

T.E.C : entre C et A :

$E_C(A) = \frac{1}{2}mv_0^2 = |q|U = eU$ $U = \frac{mv_0^2}{2e} = \frac{9,1.10^{-31}\times 10^{14}}{2\times 1,6.10^{-19}} = 2,84 \times 10^2 V$

2. Nature du mouvement dans le champ $\vec{B}$

Dans le champ magnétique $\vec{B}$, les électrons sont soumis à la force magnétique $\vec{F_m} = |q|\vec{v_1}\Lambda\vec{B}$.



$T.C.I: \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$

Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$

$\vec{F_m} = |q|v_0B\vec{N}$ et $\vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N}$

$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{{v_0}^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ le mouvement est uniforme

Par identification : $\frac{{v_0}^2}{R} = \frac{|q|v_0B}{m} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B} = cte \Rightarrow M.C$

D'où le mouvement des électrons dans le champ magnétique $\vec{B}$ est circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv_0}{eB}$.

$$R = \frac{9,1.10^{-31}\times 10^7}{1,6.10^{-19}\times 10^{-3}} = 5,69\times 10^{-2}m$$

3. Calcul de la déviation provoquée par es électrons

$\alpha = \frac{L}{R} = \frac{eBL}{mv_0}$ Or $\tan\alpha = \frac{y_E}{D} \Longrightarrow y_E = D\tan\alpha$

$Or\ pour\ \ \alpha\ \ plus\ petit\ \tan\alpha \sim \alpha \Longrightarrow y_E = \frac{eBLD}{mv_0}$

$y_E = \frac{1,6.10^{-19}\times 10^{-3}\times 50\times 10^{-2}}{9,1.10^{-31}\times 10^7} = 8,79m$

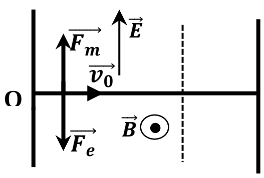
4. Calcul numérique du champ E

Dans le filtre de vitesse l'électron est soumis simultanément à la force électrostatique $\vec{F_e}$ et à la force magnétique $\vec{F_m}$. Puisque la particule est pseudo-isolée, alors :

$\vec{F_e} + \vec{F_e} = \vec{0} \Rightarrow F_e = F_m \Rightarrow |q|v_0B = |q|E \Rightarrow E = v_0B$

$$E = 10^7\times 10^{-3} = 10^4 V$$

- En utilisant la règle de trois doigts de la main droite la force magnétique $\vec{F_m}$ se dirige du bas vers le haut (voir figure).



Solution 20

1..Nature du mouvement des électrons de C vers A

La particule est soumis à la force $\vec{F_e} = q\vec{E}$

T.C.I : $\vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ $avec\ q = -e,$

Projection sur le plan (x,y) :

$\vec{E}\left|\begin{matrix} E_x = -E \\ E_y = 0\end{matrix}\right.$, $\vec{a}\left|\begin{matrix} a_x = -\frac{(-e)E}{m}\ (MRUV) \\ a_y = 0\end{matrix}\right. \Rightarrow a = \frac{eE}{m} > 0$

Alors le mouvement des électrons entre A et C est uniformément accéléré.

b)) Vitesse des électrons en O

T.E.C : entre C et A :

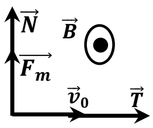
$$E_C(A) = \frac{1}{2}mv_0^2 = |q|U = eEd \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eEd}{m}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\times 1,6\times 10^{-19}\times 5\times 10^4\times 0,1}{9,1\times 10^{-31}}} = 4,2\times 10^7 m.s^{-1}$$

3. Sens du champ magnétique $\vec{B}$ et expression du rayon R

Dans le champ magnétique $\vec{B}$, les électrons sont soumis à la force magnétique $\vec{F_m} = |q|\vec{v_1}\Lambda\vec{B}$.

Si les électrons décrivent l'arc O_1C alors la force magnétique sera orienté vers le haut. Donc en utilisant la règle de 3doigts de la main droites le vecteur champ Magnétique $\vec{B}$ est sortant.



$T.C.I: \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$

Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$

$\vec{F_m} = |q|v_0B\vec{N}$ et $\vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N}$

$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{{v_0}^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ le mouvement est uniforme

Par identification : $\frac{{v_0}^2}{R} = \frac{|q|v_0B}{m} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B} = cte \Rightarrow M.C$

D'où le mouvement des électrons dans le champ magnétique $\vec{B}$ est circulaire uniforme de rayon

$$R = \frac{mv_0}{eB} \Longrightarrow R = \frac{9,1.10^{-31}\times 4,2.10^7}{1,6.10^{-19}\times 2.10^{-3}} = 0,12m = 12cm$$

4. Nature du mouvement des électrons au dehors du champ $\vec{B}$

Au-delà de la région III ,le vecteur champ magnétique $\vec{B} = \vec{0}$ alors son accélération est nul (a=0) : alors le mouvement des électrons au-delà de la région III est rectiligne uniforme.

4. Déflexion magnétique

- Si la longueur de l'arc est confondue à l :

$Alors\ \alpha = \frac{l}{R}$ et $R = \frac{mv_0}{eB} \Longrightarrow \alpha = \frac{eBl}{mv_0}$

-Pour une déviation angulaire très petite :

$$\tan\alpha \sim \alpha = \frac{Y}{D} \Rightarrow Y = D\alpha = \frac{eBl}{mv_0}D$$

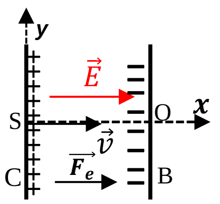
Valeur numérique de la vitesse v_0 pour Y=3,35cm

$Y = \frac{eBl}{mv_0}D \Longrightarrow v_0 = \frac{eBlD}{mY}$

$v_0 = \frac{1,6.10^{-19}\times 2.10^{-3}\times 10^{-2}\times 40.10^{-2}}{9,1.10^{-31}\times 3,35.10^{-2}} = 4,2\times 10^7 m.s^{-1}$

<u>Solution 21</u>

1. a)) <u>Accélération des protons</u>



Les protons sont soumis à la force électrique $\vec{F_e} = q\vec{E} = e\vec{E}$

$T.C.I : \vec{F_e} = e\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{e}{m}\vec{E}$

Projection sur le plan (x,y) :

$$\vec{E}\begin{vmatrix} E_x = E \\ E_y = 0 \end{vmatrix} ; \quad \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = \frac{eE}{m} \\ a_y = 0 \end{vmatrix}$$

$$Donc\ \ a = \frac{eE}{m} \quad or\ E = \frac{U}{d} \quad alors\ \ a = \frac{eU}{md}$$

b)) <u>Lois horaires du mouvement des protons</u>

Conditions initiales : à t=0,

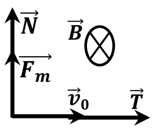
$$\vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \end{vmatrix} \ et\ \ \overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = \frac{eU}{2md}t^2 \\ y = 0 \end{vmatrix}$$

$$soit\ \begin{cases} x = \frac{1}{2}\frac{eU}{md}t^2 \\ v = \frac{eU}{md}t \end{cases}$$

2. a)) Caractéristique de la force magnétique

- Direction : perpendiculaire au plan $(e\vec{v_0}, \vec{B})$
- Sens : Comme le vecteur champ $\vec{B}$ est entrant, alors en utilisant la règle de trois doigts de la mains droite : la force magnétique $\vec{F_m}$ est dirigée vers le haut.
- Intensité : $F_m = ev_0B$

Représentation de la force magnétique



b)) <u>Montrons que le mouvement des protons est C.U</u>

$T.C.I: \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$

Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$:

$$\vec{F_m} = |q|v_0B\vec{N} \ \ et\ \ \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N}$$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{{v_0}^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N}$$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \ \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ le mouvement est uniforme

Par identification : $\frac{{v_0}^2}{R} = \frac{|q|v_0B}{m} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B} = cte \Rightarrow M.C$

D'où le mouvement des électrons dans le champ magnétique $\vec{B}$ est circulaire uniforme de rayon

$$R = \frac{mv_0}{eB} \quad or\ T.E.C: \frac{1}{2}m{v_0}^2 = eU \Longrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$R = \frac{mv_0}{eB} = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

3. a)) <u>Nature du mouvement des protons à la sortie du champ B</u>

Lorsque les protons quittent la région où règne le vecteur champ magnétique $\vec{B}$, alors son accélération s'annule (a=0) puisque dans cette région B=0 (le vide): alors le mouvement des protons au-delà de l'espace l est rectiligne uniforme.

b)) <u>Déflexion magnétique</u>

- Si la longueur de l'arc est confondue à l :

$$Alors\ \alpha = \frac{l}{R} \quad et \quad R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}} \Rightarrow \alpha = Bl\sqrt{\frac{e}{2mU}}$$

-Pour une déviation angulaire très petite: $\tan\alpha \sim \alpha$

$$or\ \tan\alpha = \frac{O'M}{L - \frac{l}{2}} \Rightarrow O'M = \tan\alpha\left(L - \frac{l}{2}\right) = Bl\sqrt{\frac{e}{2mU}}\left(L - \frac{l}{2}\right)$$

$$O'M = Bl\left(L - \frac{l}{2}\right)\sqrt{\frac{e}{2mU}} \quad or\ L \gg l \ \Rightarrow O'M = BlL\sqrt{\frac{e}{2mU}}$$

c)) <u>Valeur minimale de la longueur l</u>

Si on veut que les protons ressortent sur le plan P, alors :

$$O'M \geq 2R\ et\ L = l' \Rightarrow Bl' \times l'\sqrt{\frac{e}{2mU}} \ \geq \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

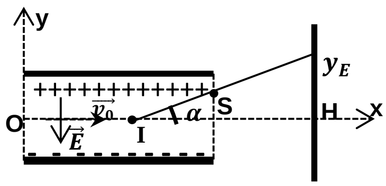
$$\Rightarrow l'^2 \geq \frac{\frac{2}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}}{B\sqrt{\frac{e}{2mU}}} = \frac{2}{B^2}\sqrt{\frac{\frac{2mU}{e}}{\frac{e}{2mU}}} = \frac{2}{B^2}\sqrt{\frac{2mU}{e} \times \frac{2mU}{e}}$$

$$\Rightarrow l'^2 \geq \frac{2}{B^2}\sqrt{\left(\frac{2mU}{e}\right)^2} \Rightarrow l'^2 \geq \frac{2}{B^2}\frac{2mU}{e} \Rightarrow l' \geq \frac{2}{B}\sqrt{\frac{mU}{e}}$$

$$L_1 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{mU}{e}} = \frac{2}{0{,}5}\sqrt{\frac{1{,}67.10^{-27} \times 10^4}{1{,}6 \times 10^{-19}}} = 4 \times 10^{-2}m = 4cm$$

<u>Solution 22</u>

1. a)) <u>Equation de la trajectoire</u>



$T.C.I : \vec{F_e} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

$$\vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = -E \end{vmatrix} ; \quad \vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{eE}{m} \end{vmatrix} \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_0t \\ y = \frac{eE}{2m}t^2 \end{vmatrix} \Rightarrow y = \frac{eE}{2m{v_0}^2}x^2$$

b)) <u>Coordonnées du point de sortie S :</u> $S\begin{vmatrix} x_S = d \\ y_S = \frac{eE}{2m{v_0}^2}d^2 \end{vmatrix}$

c)) <u>Détermination de y_E</u>

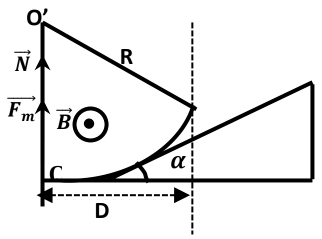
$$\tan\alpha = \frac{y_S}{d/2} = \frac{2y_S}{d} = \frac{2}{d} \times \frac{eE}{2m{v_0}^2}d^2 = \frac{eEd}{m{v_0}^2}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{y_E}{D} \ \Rightarrow y_E = D\tan\alpha = \frac{DeEd}{m{v_0}^2}$$

2. a)) <u>Sens de $\vec{B}$</u>

Utilisation de la règle de trois doigts de la main droite, le vecteur champ $\vec{B}$ est sortant (voir figure ci-dessous).

b)) Montrons que le mouvement est uniforme



$$T.C.I: \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$$

Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$

$\vec{F_m} = |q|v_0 B\vec{N}$ et $\vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|v_0 B}{m}\vec{N}$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{{v_0}^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N}$$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow$ v = cte ⇒ le mouvement est uniforme

c)) Montrons que le mouvement est circulaire:

$$\frac{{v_0}^2}{R} = \frac{|q|v_0B}{m} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B} = \frac{mv_0}{eB} = cte \Rightarrow M.C$$

d)) Déflexion magnétique y_M

$$\alpha = \frac{L}{R} = \frac{eBL}{mv_0} \quad Or \ \tan\alpha = \frac{y_M}{D} \Rightarrow y_M = D\tan\alpha$$

Or pour α plus petit $\tan\alpha \sim \alpha \Rightarrow y_M = \frac{eBdD}{mv_0}$

3. Comparaison de y_E et y_M

$$\frac{y_E}{y_M} = \frac{DeEd}{m{v_0}^2} \times \frac{mv_0}{eBdD} = \frac{E}{Bv_0} \Rightarrow y_E = \frac{E}{Bv_0}y_M$$

Solution 23

1.a)) Expression de l'énergie cinétique en K' :

Comme le mouvement de la particule à l'intérieur de Dee est circulaire uniforme, alors la vitesse au point K' est égale à la vitesse au point K (v_0) : $E_C(K') = \frac{1}{2}m{v_0}^2$.

Principe du cyclotron

La source de particules est située au centre de la chambre d'accélération. Après avoir été ionisées, les particules sont accélérées par un champ électrique de haute fréquence. Simultanément, elles sont soumises à un champ magnétique qui permet de courber leur trajectoire et de les faire ainsi repasser dans la zone accélératrice. Elles suivent alors une trajectoire spiralée, jusqu'à atteindre le bord de la machine.

b)) Expression de R_1 en fonction de m, q, v_0 et B.

A l'intérieur de chaque Dee , le mouvement est circulaire uniforme sur une trajectoire de rayon R tel que : $R = \frac{mv}{|q|B}$

Dans la trajectoire (C_1) on a : $R_1 = \frac{mv_0}{|q|B}$

2. Expression de l'énergie cinétique en L

T.E.C : entre D_1 et D_2

Pour le 2ème passage la particule traverse avec une vitesse v_2

$$E_C(L) - E_C(K') = |q|U \Rightarrow E_C(L) = E_C(K') + |q|U$$

$$or E_C(K') = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \Rightarrow E_C(L) = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + |q|U$$

Expression de v_2

$$E_C(L) = \frac{1}{2}m{v_2}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + |q|U \Rightarrow v_2 = \sqrt{{v_0}^2 + 2\frac{|q|U}{m}}$$

L'intérêt du passage dans la zone (E)

Dans la zone (E) il règne un champ électrique uniforme E, qui permet d'augmenter la vitesse de la particule à chaque fois qu'elle pénètre dans cet intervalle.

3. a)) Expression du rayon R_2 en fonction de m, a, B, U et v_0

Dans la trajectoire (C_2) on a :

$$R_2 = \frac{mv_2}{|q|B} = \frac{m}{|q|B}.\sqrt{{v_0}^2 + 2\frac{|q|U}{m}} = \frac{mv_0}{|q|B}\sqrt{1 + 2\frac{|q|U}{m{v_0}^2}}$$

$$Or \ R_1 = \frac{mv_0}{|q|B} \Rightarrow R_2 = R_1\sqrt{1 + 2\frac{|q|U}{m{v_0}^2}} \Rightarrow R_2 > R_1$$

b)) Durée du demi-tour LL'

La durée du parcours dans un dee vaut une demi-période de rotation T dans le champ magnétique $\vec{B}$; cette rotation s'effectue à vitesse constante v le long d'une trajectoire circulaire de rayon R

$$v_2 = \frac{Longueur\ du\ trajectoire}{Durée\ de\ rotation} = \frac{2\pi R_2}{T} \ soit\ T = \frac{2\pi R_2}{v_2}$$

$$or\ R_2 = \frac{mv_2}{|q|B} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{v_2}.\frac{mv_2}{|q|B} = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

D'où de passage dans un dee est :

$$t_P(LL') = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{|q|B} \Rightarrow t_P(LL') = t_P(KK') = \frac{\pi m}{|q|B}$$

c)) Fréquence de la tension alternative U

$$t_P = \frac{T}{2} = \frac{1}{2N} \Rightarrow N = \frac{1}{2t_P} = \frac{|q|B}{2\pi m}$$

Solution 24

I. 1. Le champ magnétique B qui permet de courber la trajectoire des particules et de les faire ainsi repasser dans la zone accélératrice.

2. Expression de la force magnétique :

La particule est soumis à la force $\vec{F_m} = q\vec{v}\Lambda\vec{B}$ $avec$ $F_m = |q|vB$

Comme la force magnétique $\vec{F}_m$ reste perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}$, alors cette force est perpendiculaire à trajectoire la particule.

Donc cette force ne travaille pas et, selon le théorème de l'énergie cinétique, sous l'action de cette force l'énergie cinétique de la particule ne saurait varier.

3. L'augmentation de la vitesse de la particule dans un accélérateur est due au champ électrique uniforme $\vec{E}$ régnant dans cet accélérateur (Une tension alternative de haute fréquence est appliquée aux électrodes en D, ce qui accélère les particules à chacun de leurs passages de l'une à l'autre).

A chaque demi-tour on doit inverser la polarité des dees afin que les particules puissent être accélérées à nouveau vers le dee supérieur.

II. 1. Energie cinétique de la particule en D'

T.E.C entre D et D' :

$$E_{C1} = \frac{1}{2}m{v_1}^2 = |q|U \ \ soit\ \ v_1 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$$

$A.N: E_{C1} = 3{,}2.10^{-19}.10^5 = 3{,}2.10^{-14}J$

$Or\ 1eV = 1{,}6.10^{-19}J\ \ et\ 1MeV = 1{,}6.10^{-13}J$

$$E_{C1} = \frac{3{,}2.10^{-14}}{1{,}6.10^{-19}} = 2.10^5eV = 0{,}2MeV$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\times 3{,}2.10^{-14}}{0{,}33.10^{-26}}} = 4{,}40.10^6 m.s^{-1}$$

2. a)) Montrons que le mouvement de la particule dans le dee D' est circulaire uniforme

La particule est soumis à la force $\vec{F_m} = q\vec{v}\Lambda\vec{B}$

La force $\vec{F_m}$ est centrale donc $\vec{F_m} = |q|vB\vec{N}$

T.C.I : $\vec{F_m} = m\vec{a}\ \Rightarrow\ \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N}$

Donc l'accélération de la particule est donc centripète :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N} + \frac{dv}{dt}\vec{T} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow v = ste$$

D'où le mouvement est uniforme.

Expression du Rayon R

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{|q|vB}{m} \Longrightarrow R = \frac{mv}{|q|B} = cste$$

Le mouvement est donc circulaire uniforme sur une trajectoire de rayon R_1 tel que : $R_1 = \frac{mv_1}{|q|B}$

b)) Expression du rayon R_1 :

$$R_1 = \frac{mv_1}{|q|B} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{|q|}}$$

$$A.N:\ R_1 = \sqrt{\frac{2\times 0{,}33.10^{-26}\times 10^5}{3{,}2.10^{-19}}} = 4{,}54.10^{-2}m = 4{,}54cm$$

c)) Durée mise par la particule pour effectuer un demi-tour

$$On\ a:\ v_1 = \frac{2\pi R_1}{T}\ soit\ T = \frac{2\pi R_1}{v_1}$$

$$or\ R_1 = \frac{mv_1}{|q|B} \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{v_1}.\frac{mv_1}{|q|B} = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

D'où le temps de passage dans un dee est : $t_P = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{|q|B}$

Ce temps ne dépend pas de la vitesse v_1 acquise par la particule.

D'où à l'intérieur de chaque Dee, la durée de passage de la particule est : $t_P = \frac{\pi m}{|q|B}$

$$t_P = \frac{\pi m}{|q|B} = \frac{\pi\times 0{,}33.10^{-26}}{3{,}2.10^{-19}} = 3{,}24.10^{-8}s$$

d)) Valeur de la fréquence N

$$t_P = \frac{T}{2} = \frac{1}{2N} \Longrightarrow N = \frac{1}{2t_P} = \frac{1}{2\times 3{,}24.10^{-8}} = 1{,}54.10^7 Hz$$

3. a)) Expression de la vitesse v_2 :

T.E.C : entre D' et D

Pour le 2ème passage la particule traverse avec une vitesse v_2

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = |q|U\ \ soit\ {v_2}^2 - {v_1}^2 = \frac{2|q|U}{m}$$

$$Or\ \ {v_1}^2 = \frac{2|q|U}{m} \Longrightarrow {v_2}^2 - {v_1}^2 = {v_1}^2 \Longrightarrow {v_2}^2 = 2{v_1}^2$$

$$E_{C2} = \frac{1}{2}m{v_2}^2 = \frac{1}{2}m.2{v_1}^2 = m{v_1}^2 = m.\frac{2|q|U}{m} = 2|q|U$$

$$Soit\ \ v_2 = v_1\sqrt{2}\ \ et\ \ E_{C2} = 2|q|U$$

b)) Expression du rayon R_2 en fonction de R_1

$$R_2 = \frac{mv_2}{|q|B} = \frac{mv_1}{|q|B}\sqrt{2} = R_1\sqrt{2}\ \ \Longrightarrow R_2 = R_1\sqrt{2}$$

c)) Expression de R_n en fonction de R_1

- Pour le 3ème passage la particule traverse avec une vitesse v_3

$$\frac{1}{2}m{v_3}^2 - \frac{1}{2}m{v_2}^2 = |q|U\ \ soit\ {v_3}^2 - {v_2}^2 = \frac{2|q|U}{m}$$

$${v_2}^2 = 2{v_1}^2 \Longrightarrow {v_3}^2 - 2{v_1}^2 = {v_1}^2 \Longrightarrow {v_3}^2 = 3{v_1}^2$$

- Pour le 4ème passage la particule traverse avec une vitesse v_4

$$\frac{1}{2}m{v_4}^2 - \frac{1}{2}m{v_3}^2 = |q|U\ \ soit\ {v_4}^2 - {v_3}^2 = \frac{2|q|U}{m}$$

$$Or\ \ {v_3}^2 = 3{v_1}^2 \Longrightarrow {v_4}^2 - 3{v_1}^2 = {v_1}^2 \Longrightarrow {v_4}^2 = 4{v_1}^2$$

- Pour le n^{ème} passage la particule traverse avec une vitesse v_n

$${v_n}^2 = n{v_1}^2 \Longrightarrow v_n = v_1\sqrt{n}$$

$$R_n = \frac{mv_n}{qB} = \frac{mv_1}{qB}\sqrt{n} = R_1\sqrt{n}\ \Longrightarrow R_n = R_1\sqrt{n}$$

4. a)) Expression de $v_k\ et\ R_k$

À chaque demi-tour, l'energie cinétique est incrémentée de la valeur qU : $\frac{1}{2}m{v_k}^2 = kqU$, On en déduit :

$$v_k = \sqrt{\frac{2kqU}{m}}\ \ \ et\ R_k = \frac{mv_k}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2kmU}{q}}$$

b)) Expression de l'énergie cinétique E_{Ck} en f(q, B, m et k)

L'énergie cinétique : $E_{Ck} = kqU$

$$et\ \ R_D = \sqrt{\frac{2kmU}{qB^2}}\ \ soit\ \ k = \frac{{R_D}^2B^2q}{2mU} \Longrightarrow E_{Ck} = \frac{{R_D}^2B^2q^2}{2m}$$

$$E_{Ck} = \frac{(0{,}4)^2\times(3{,}2.10^{-19})^2}{2\times 0{,}33.10^{-26}} = 2{,}48.10^{-12}J = 15{,}5MeV$$

Nombre de tours effectués par la particule :

$$R_D = R_1\sqrt{n}\ \ soit\ n = \left(\frac{R_D}{R_1}\right)^2 = \left(\frac{40}{4{,}54}\right)^2 = 77\ demi\ tours$$

$$n' = \frac{n}{2} = \frac{77}{2} = 38{,}5tours$$

Soit 38tours le nombre de tours effectués par le proton.

<u>Solution 25</u>

1. a)) <u>Nature du mouvement du proton entre les deux Dees</u>

Dans l'intervalle étroite, il existe une un champ électrique uniforme E constant pendant la durée courte de la traversée.

La particule est soumise à la force électrique $\vec{F} = q\vec{E} = Cste$

T.C.I : $\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \Longrightarrow a = \frac{q\vec{E}}{m} = cste$

La vitesse initiale étant nulle, alors la particule est animée d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

b)) <u>Valeur de la vitesse v_1</u>

T.E.C entre D_2 et D_2: $E_{C1} = \frac{1}{2}m{v_1}^2 = |q|U \ soit \ v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$

$$A.N:\ v_1 = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6.10^{-19} \times 4.10^3}{1{,}67.10^{-27}}} = 8{,}75.10^5 m.s^{-1}$$

2. a)) <u>Montrons que le mouvement du proton est circulaire uniforme dans D_1</u>

La particule est soumis à la force $\overrightarrow{F_m} = q\vec{v}\Lambda\vec{B}$

La force $\overrightarrow{F_m}$ est centrale donc $\overrightarrow{F_m} = |q|vB\vec{N}$

T.C.I : $\overrightarrow{F_m} = m\vec{a} \ \Rightarrow \ \vec{a} = \frac{\overrightarrow{F_m}}{m} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N}$

Donc l'accélération de la particule est donc centrale :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N} + \frac{dv}{dt}\vec{T} = \frac{|q|vB}{m}\vec{N} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow v = ste$$

D'où le mouvement est uniforme.

Expression du Rayon R

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{|q|vB}{m} \Longrightarrow R = \frac{mv}{|q|B} = cste$$

Le mouvement est donc circulaire uniforme sur une trajectoire de rayon R tel que : $R = \frac{mv}{|q|B}$ soit $R_1 = \frac{mv_1}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$

$$A.N:\ R_1 = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}67.10^{-27} \times 4.10^3}{1{,}6.10^{-19}}} = 9{,}14.10^{-3}m$$

b)) <u>Temps de transit τ</u>

$$On\ a:\ v_1 = \frac{2\pi R_1}{T}\ soit\ T = \frac{2\pi R_1}{v_1}$$

$$or\ R_1 = \frac{mv_1}{|q|B} \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{v_1}.\frac{mv_1}{|q|B} = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

D'où le temps de transit dans un dee est : $\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{eB}$

Ce temps ne dépend pas de la vitesse v_1 acquise par la particule et non modifié par le champ électrique accélérateur.

$$\tau = \frac{\pi \times 1{,}67.10^{-27}}{1{,}6.10^{-19}} = 3{,}28.10^{-8}s$$

3. a)) Vitesse v_2 du proton

Pour le 2ème passage la particule traverse avec une vitesse v_2

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = eU\ \ soit\ {v_2}^2 - {v_1}^2 = \frac{2eU}{m}$$

$$Or\ \ {v_1}^2 = \frac{2|q|U}{m} \Longrightarrow {v_2}^2 = 2{v_1}^2\ soit\ \ v_2 = 2\sqrt{\frac{eU}{m}}\ \ \ et\ \ R_2 = \frac{mv_2}{|q|B}$$

b)) le temps de transit dans D_2 est : $\tau' = \frac{\pi m}{eB}$

$$Donc\ \tau = \tau' = \frac{\pi m}{eB}$$

4. a)) <u>Expression de R_n en fonction de R_1 et n</u>

Pour le nème passage Le proton traverse avec une vitesse v_n

${v_n}^2 = n{v_1}^2 \Longrightarrow v_n = v_1\sqrt{n}$ (à démontrer)

$$R_n = \frac{mv_n}{qB} = \frac{mv_1}{qB}\sqrt{n} = R_1\sqrt{n}\ \Longrightarrow R_n = R_1\sqrt{n}$$

b)) <u>Nombre de tours n' effectuer par le protons</u> :

$$R_n = R_1\sqrt{n}\ \ soit\ n = \left(\frac{R_n}{R_1}\right)^2 = \left(\frac{0{,}14}{9{,}14.10^{-3}}\right)^2 = 234 demi\ tours$$

Soit 117tours et la vitesse v_n correspondant est :

$$v_n = v_1\sqrt{n} = 8{,}75.10^5\sqrt{234} = 1{,}34.10^7 m.s^{-1}$$

c)) <u>Ddp U' appliquer au proton pour lui communiquer cette vitesse</u>

$$T.E.C:\ \ \frac{1}{2}m{v_n}^2 = eU'\ soit\ \ U' = \frac{m{v_n}^2}{2e}$$

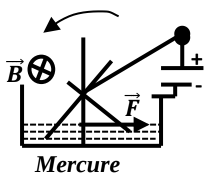
$$A.N:\ U' = \frac{1{,}67.10^{-27} \times (1{,}34.10^7)^2}{2 \times 1{,}6.10^{-19}}$$

Solutions sur La loi de Laplace et Induction Électromagnétique

Solution 1

1. a)) Expliquons pourquoi il y a mouvement de rotation

Lorsqu'on baisse l'interrupteur K, le courant va traverser le rayon plongeant dans champ magnétique uniforme $\vec{B}$, ce qui donne naissance à la force électromagnétique (force de Laplace), perpendiculaire $\vec{B}$ et au rayon considéré. Son sens est vers la droite et puisqu'il existe toujours un rayon qui plonge dans le mercure, si l'un sort du bain du mercure un autre y pénètre : ce qui assure la continuité de ce mouvement, d'où le mouvement de rotation.



b)) Sens du champ magnétique $\vec{B}$

En utilisant la règle de trois doigts de, le vecteur champ $\vec{B}$ est entrant.

c)) Valeur du champ magnétique B

Par définition : $P = M(\vec{F}).\omega$ où

$M(\vec{F}) = F.\frac{R}{2} = IRB.\frac{R}{2} = \frac{1}{2}IBR^2$ et $\omega = 2\pi N$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2}IBR^2 \times 2\pi N = \pi BINR^2 \Rightarrow B = \frac{P}{\pi INR^2}$$

$$A.N : B = \frac{5{,}4 \times 10^{-3} \times 60}{\pi \times 8{,}5 \times 75 \times 0{,}09^2} = 2 \times 10^{-2}T$$

2. a)) En permutant les bornes du générateur, le courant va circuler dans le sens inverse que précédemment, mais puisque le champ magnétique reste toujours perpendiculaire au plan avec le même sens précédemment, alors en utilisant la règle de trois doigts, la force de Laplace est dirigée vers la droite, d'où on a même sens de rotation.

b)) Expression de la puissance de la force de Laplace

Par définition : $P' = M(\vec{F}).\omega$ où

$$M(\vec{F}) = F.\frac{R}{4} = I\frac{R}{2}B.\frac{R}{4} = \frac{1}{8}IBR^2$$

$$\omega = 2\pi N \Rightarrow P' = \frac{1}{8}IBR^2 \times 2\pi N = \frac{1}{4}\pi BINR^2$$

3. a)) Expression de la surface dS pendant un temps dt

Le mouvement est circulaire uniforme, alors la position de la roue est repérée par l'angle $\theta = \omega t = 2\pi Nt$. $\begin{cases} 2\pi = \pi R^2 \\ \theta = S \end{cases}$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}R^2\theta \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}R^2 d\theta = \frac{1}{2}R^2(2\pi N) = \pi NR^2$$

b)) Valeur de la f.é.m. apparait dans chaque rayon.

$e = -\frac{d\Phi}{dt}$ où $\Phi = B.S \Rightarrow d\Phi = BdS$

$$\Rightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = -\pi NR^2B$$

A l'instant t=0s, $e = \pi NR^2B$

$$A.N: \ e = \pi \times \frac{75}{60} \times 0{,}09^2 \times 2 \times 10^{-2} = 6{,}36 \times 10^{-4}V$$

c)) Intensité du courant traversant chaque rayon

$$e = R'i \Rightarrow i = \frac{e}{R'} = \frac{6{,}36 \times 10^{-4}}{0{,}12} = 5{,}3 \times 10^{-3}A = 5{,}3mA$$

Caractéristiques de la force de Laplace

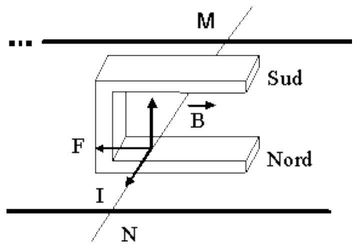
- point d'application : au milieu du rayon entièrement plongé dans le champ magnétique B,
- direction : perpendiculaire au plan formé par $(\vec{B}, \vec{R})$
- sens : de la gauche vers la droite (sens trigonométrique),
- intensité : $F = iRB$

$$F = 5{,}3.10^{-3} \times 9.10^{-2} \times 2.10^{-2} = 9{,}54 \times 10^{-6}N$$

Solution 2

1. Position de l'aimant :

L'aimant doit être placé pôle Sud vers le haut (voir figure).



2. Sens et intensité du courant

Le sens de I est donné par le sens de E de M vers N.(voir schéma)

La tension aux bornes du générateur est nulle (court-circuit) :

$$U = E - rI = 0 \ \ soit \ \ I = \frac{E}{r} = \frac{5}{5} = 1\,A$$

3. Caractéristique de la force de Laplace

- Direction : perpendiculaire au plan formé par (I,B)
- Sens : D'après la règle de trois doigts, la force $\vec{F}$ est dirigée vers la gauche.
- Intensité : $F = B\,I\,d = 0.1 \times 1 \times 4.10^{-2} = 4 \times 10^{-2}\,N$

4. a)) Détermination du flux coupé de la barre

$\Phi = B.S \ avec \ S = d\,x$

(x = longueur du déplacement de la barre)

$\Phi = Bdx = 0{,}1 \times 4 \times 10^{-2} \times 6 \times 10^{-2} = 2{,}4 \times 10^{-4}Wb$

b)) Travail de la force de Laplace :

$$W(\vec{F}) = F.x = 4 \times 10^{-2} \times 6 \times 10^{-2} = 2{,}4 \times 10^{-4}J$$

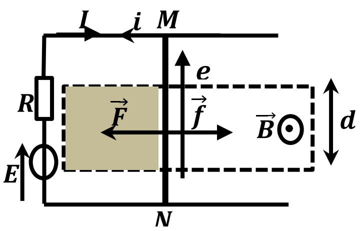
5. Valeur de la f.é.m. induit :

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{2{,}4 \times 10^{-4}}{1.10^{-3}} = -0{,}24V$$

6 . Le circuit barre-rails-générateur étant fermé, la force électromotrice induite engendre un courant qui va s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance, en l' occurrence ici le déplacement de la barre .Donc le courant i induit va être dirigé dans le sens inverse de I ; ainsi le sens de la force $\vec{F}$, force de Laplace engendrée par i , sera opposé au déplacement de la barre et à la force F. On retrouve dans les machines étudiées en terminale ce phénomène appelé « réaction d'induit ».

On peut également ajouter que i , courant induit par le déplacement de MN, crée un champ induit Bi qui s'oppose au champ B_I crée par I. Ces champs sont faibles devant le champ B crée par l'aimant.

On peut également noter qu'en se déplaçant vers la gauche (selon $\vec{F}$) , le flux magnétique diminue (la surface grisée diminue) , la force $\vec{f}$ crée par le courant induit i a , selon la loi de Lenz , tendance au contraire à augmenter le flux en augmentant cette surface en gris.



Solution 3

1. Calcul de la f.é.m. induit e

$e = -\frac{d\Phi}{dt}$ où $d\Phi = BdS,$

dS=surface du rectangle de coté l et vdt (distance parcourue pendant le temps dt de vitesse constante v), donc :

$dS = lvdt \Longrightarrow d\Phi = Bvldt$

$$\Longrightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Bvldt}{dt} = -Bvl \Longrightarrow e = -Bvl$$

$$e = -0{,}02 \times 0{,}8 \times 0{,}1 = -1{,}6 \times 10^{-3}V$$

$$\Longrightarrow |e| = 1{,}6 \times 10^{-3}V$$

2. Sens et intensité du courant induit

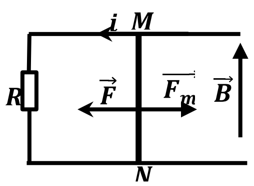
$i = \frac{e}{R} = -\frac{Bvl}{R} < 0 \Longrightarrow$ alors le courant induit circule de N vers M.

$i = \frac{e}{R} = -\frac{1{,}6\times10^{-3}}{1} = -1{,}6 \times 10^{-3}A$

3. Calcul de la puissance électrique P_e :

$$P_e = ei = 1{,}6 \times 10^{-3} \times 1{,}6 \times 10^{-3} = 2{,}56 \times 10^{-6}W$$

4.



a)) Caractéristiques de la force de Laplace

- Point d'application : au milieu du conducteur MN
- Direction : horizontale et perpendiculaire au plan $(\vec{B}, i\vec{l})$
- Sens : de la droite vers la gauche,
- Intensité : $F = ilB$

$$F = 1{,}6 \times 10^{-3} \times 0{,}1 \times 2 \times 10^{-2} = 3{,}2 \times 10^{-6}N$$

b)) Caractéristiques de la force F_m exercée par le manipulateur

- Point d'application : au milieu du conducteur MN
- Direction : horizontale et perpendiculaire au plan $(\vec{B}, i\vec{l})$
- Sens : de la gauche vers la droite,
- Intensité : $\vec{F} + \vec{F_m} = \vec{0} \Longrightarrow F_m = F = 3{,}2 \times 10^{-6}N$

c)) Calcul de la Puissance mécanique

$P_m = F_m . v = 3{,}2 \times 10^{-6} \times 0{,}8 = 2{,}56 \times 10^{-6}W$

On remarque que $P_m = P_e = 2{,}56 \times 10^{-6}W$

Solution 4

1. a)) Existence d'une f.é.m. induit

$\Phi = BS = Blx$ où x (longueur du déplacement de la tige)

tel que : $x = vt \Longrightarrow \Phi = Blvt$, comme le flux varie en fonction du temps t , alors le voltmètre détecte une force électromotrice induite : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Bvldt}{dt} = -Bvl$

b)) Suivant le sens du champ magnétique

$e_{MN} > 0 \Longrightarrow V_M - V_N > 0$

$e = Bvl = 0{,}5 \times 2 \times 10^{-2} \times 0{,}04 = 4 \times 10^{-4}V$

2. a)) Expression des intensités induits i_1 et i_2

Les résistance R_1 et R_2 sont placés parallèlement, alors elles sont parcourues par une même

tension e. $|e| = e_1 = R_1 i_1 \Longrightarrow |i_1| = \frac{e}{R_1}$ $(de\ C\ vers\ D)$ et

$e = e_2 = R_2 i_2 \Longrightarrow |i_2| = \frac{e}{R_2}$(de A vers E)

b)) Relation entre R_1 , R_2 et i

Soit i la résistance du conducteur MN, donc

$$|i| = |i_1| + |i_2| = \frac{e}{R_1} + \frac{e}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}e$$

c)) Calcul de i_1 , i_2 et i

$$|i_1| = \frac{|e|}{R_1} = \frac{4.10^{-4}}{0{,}02} = 0{,}02A \; ; \; |i_2| = \frac{|e|}{R_2} = \frac{4.10^{-4}}{0{,}04} = 0{,}01A \ et$$

$|i| = |i_1| + |i_2| = 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}03A$

Solution5

1. Expression de la f.é.m. induite e

$e = -\frac{d\Phi}{dt}$ où $d\Phi = BdS$

$dS = lvdt \Longrightarrow d\Phi = Bvldt$

$$\Longrightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Bvldt}{dt} = -Bvl \Longrightarrow e = -Bvl$$

$e < 0$ (en sens inverse du sens positif choisi).

2. Valeur de l'intensité i et la vitesse v

$$F = ilB \Longrightarrow i = \frac{F}{lB} \ et \ |e| = iR = Bvl \Longrightarrow v = \frac{iR}{Bl}$$

$$i = \frac{6.10^{-3}}{12.10^{-2} \times 0{,}5} = 0{,}1A \ et \ v = \frac{0{,}1 \times 0{,}12}{0{,}5 \times 12.10^{-2}} = 0{,}2m.s^{-1}$$

3. a)) Calcul de la f.é.m. induit et de l'intensité induit dans chacun des cas suivants

a1)) – On déplace le conducteur vers la droite à la vitesse $v = 0{,}6m.s^{-1}$

$$e = -Bvl = -0{,}5 \times 0{,}6 \times 0{,}12 = -3{,}6 \times 10^{-2}V$$

$et\ i = \frac{e}{R} = -\frac{Bvl}{R} = \frac{-3{,}6\times10^{-2}}{0{,}12} = -0{,}3A$

$i = \frac{e}{R} = -\frac{Bvl}{R} < 0$ (en sens inverse du sens positif choisi, c'est-à-dire de de N vers M)

– On déplace le conducteur vers la gauche à la vitesse $v = 0{,}6m.s^{-1}$

Si on déplace le conducteur vers la gauche, alors :

$$d\Phi = -Bvldt \Longrightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} = Bvl$$

$e = Bvl = 3{,}6\times10^{-2}V\ et\ i = \frac{e}{R} = 0{,}3A$

(le courant induit circule dans le sens positif choisi).

a2)) On déplace le conducteur initialement arrêter d'un M.U.A puis d'un M.U

Phase 1 : MUA :

$$v = at + v_0\ \ or\ \ à\ t = 0, v_0 = 0 \Longrightarrow v = at = 0{,}5t$$

$$e = -Bvl = -0{,}5\times0{,}5t\times0{,}12 = -3\times10^{-2}t\ (V)\ \ et$$

$$i\ = \frac{e}{R} = -\frac{3\times10^{-2}t}{0{,}12} = -0{,}25t\ (A)$$

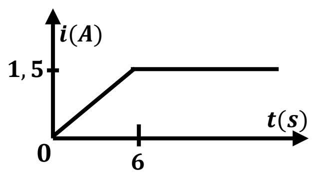
A l'instant t =6s, $|i| = 0{,}25t = 0{,}75\times6 = 1{,}5A$;

la courbe de $i(t) = |i| = i(t)$ est une droite partant de l'origine et passant par le point ($t = 6s$; $|i| = 1{,}5A$).

Phase 2 : MU : à $t = 6s$, $v = 0{,}5\times6 = 3m.s^{-1} = cste$

$$e = -Bvl = -0{,}5\times3\times0{,}12 = -0{,}18V\ \ et$$

$$i = \frac{e}{R} = \frac{-0{,}18}{0{,}12} = -1{,}5A \Longrightarrow |i| = 1{,}5A = cste$$



b)) Quantité d'électricité induit pendant la première phase

Par définition : $|q| = \frac{|\Delta\Phi|}{R}\ \ avec\ \Delta\Phi = B.\Delta S = Blx$

Or pour $t \in [0\,;6s]$, le mouvement est uniformément accéléré, donc :

$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\times0{,}5t^2 = 0{,}25t^2$ à $t\ =\ 6s,$

$$x = 0{,}25\times6^2 = 9m$$

$$|q| = \frac{|\Delta\Phi|}{R} = \frac{Blx}{R} = \frac{0{,}5\times0{,}12\times9}{0{,}12} = 4{,}5C$$

c)) Calcul de la puissance électrique et mécanique du conducteur

A t =6s, $v = 3m.s^{-1}$; $|e| = 0{,}18V\ et\ |i| = 1{,}5A$

$P_e = ei = 0{,}18\times1{,}5 = 0{,}27W$

$P_m = F.v = |i|Bvl = 1{,}5\times0{,}5\times3\times0{,}12 = 0{,}27W$

$\Longrightarrow P_e = P_m$

Conclusion et remarque

La puissance mécanique développée par l'expérimentateur (conducteur) se trouve dans le circuit sous forme électrique, alors le système transforme avec un rendement de 100% , de l'énergie mécanique en énergie électrique.

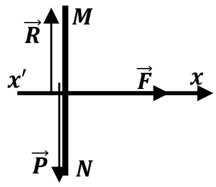
Dans les phénomènes d'induction par déplacement, l'énergie électrique apparait au détriment de l'énergie mécanique.

Solution 6

1. Inventaire des force appliquées à la barre et leurs caractéristiques

Dans la région 1, la barre de masse m est soumise à

- Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, verticale de haut vers le bas et d'intensité $P = mg$;
- La force de Laplace $\vec{F} = I\vec{l}\Lambda\vec{B}$, horizontale et dirigée vers la droite tel que $F = IlB$
- La réaction $\vec{R}$ verticale et dirigé vers le haut d'intensité $R = P = mg.$



b)) Calcul de l'accélération a_1

T.C.I : $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a_1}$, suivant x'x :

$$F = ma_1\ \Longrightarrow IlB = ma_1 \Longrightarrow$$

$$a_1 = \frac{IlB_1}{m} \Longrightarrow\ a_1 = \frac{5\times0{,}1\times6\times10^{-3}}{50\times10^{-3}} = 0{,}06m.s^{-2}$$

c)) Vitesse de la barre à la sortie de la région 1

M.U.A : R.I.T :

$$v_1{}^2 - v_0{}^2 = 2a_1d_1\ otr\ à\ t = 0, v_0 = 0 \Longrightarrow v_1 = \sqrt{2a_1d_1}$$

$$A.N: v_1 = \sqrt{2\times0{,}06\times5\times10^{-2}} = 7{,}75\times10^{-2}m.s^{-1}$$

2. Nature du mouvement de la barre dans la région 2

Dans la région 2, le champ magnétique est nul, or

$$F = IlB_2 = ma_2 = 0\ , car\ B_2 = 0 \Rightarrow\ a_2 = 0$$

D'où : la barre traverse la région 2 avec un mouvement rectiligne uniforme de vitesse

$$v_2 = v_1 = cste \Longrightarrow v_2 = \frac{d_2}{t_2} \Longrightarrow t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{d_2}{v_1}$$

$$A.N: t_2 = \frac{0{,}1}{7{,}75\times10^{-2}} = 1{,}29s$$

3. a)) Valeur de l'accélération a_3

Comme le champ magnétique $\vec{B_3}$ est sortant, alors en utilisant la régle de trois doigts, la force de Laplace est horizontale et dirigée vers la gauche :

$$T.C.I:\ \vec{F} = m\vec{a}_3\ \ , suivant\ x'x:\ -F = ma_3$$

$$\Longrightarrow a_3 = \frac{-F}{m} = -\frac{IlB_3}{m} = -\frac{IlB_1}{m} = -a_1$$

$a_2 = -a_1 = -0{,}06ms^{-2} = cste < 0, alors$ le mouvement de la barre dans la région 3 est uniformément décéléré.

b)) Date de passage à sa position initiale

La durée de passage d'aller et retour est définie par :

$$T = 2durée\ d'aller = 2(t_1 + t_2 + t_3)$$

Dans la région 1 : M.U.A :

$$x = d_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}05}{0{,}06}} = 1{,}29s$$

$$Or \quad t_3 = t_1 \Rightarrow T = 2(2t_1 + t_2) = 2(2 \times 1{,}29 + 1{,}29) = 7{,}74s$$

Solution 7

1. a)) Flux magnétique à travers le circuit OMN

$$\Phi = BS \; avec \; S = \frac{MN \times OP}{2} \; et \; MN = MP + PN$$

$$= OP \tan\alpha + OP \tan\alpha = 2PO \tan\alpha$$

$$S = \frac{MN \times OP}{2} = \frac{2OP \times \tan\alpha \times OP}{2} = OP^2 \tan\alpha \; ,$$

$avec \; OP = x = vt \; (Mvt \; Uniforme).$

$$\Phi = BS = BOP^2 \tan\alpha = B(vt)^2 \tan\alpha = Bv^2t^2 \tan\alpha$$

b)) Expression de la force électromotrice e

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Bv^2t^2 \tan\alpha)$$

$$\Rightarrow e = -Bv^2 \tan\alpha \frac{dt^2}{dt} = -2Bv^2 t \tan\alpha$$

2. a)) Temps mis par la tige pour atteindre la position AC

Suivant Ox, le mouvement est uniforme, donc :

$$Ox = vt \; or \; \cos\alpha = \frac{Ox}{AC} \Rightarrow Ox = AC\cos\alpha = l\cos\alpha$$

$$\Rightarrow l\cos\alpha = vt \Rightarrow t = \frac{l\cos\alpha}{v}$$

Déduisons la valeur absolue de la f.é.m. induite maximale

$$|e_{max}| = 2Bv^2 t \tan\alpha = 2Bv^2 \times \frac{l\cos\alpha}{v}\tan\alpha = 2Bvl\sin\alpha$$

b)) Valeur de la longueur l de chaque rail

$$|e_{max}| = 2Bvl\sin\alpha \Rightarrow l = \frac{|e_{max}|}{2Bv\sin\alpha}$$

$$A.N: \; l = \frac{0{,}5}{2 \times 0{,}5 \times 1 \times 0{,}5} = 1m$$

3. a)) Expression de la résistance totale du circuit

$$R_T = R_{OM} + R_{MN} + R_{NO} = \rho OM + \rho MN + \rho ON$$

$$R_T = \rho(OM + MN + NO) = 3\rho MN$$

$$MN = MP + PN = 2OP\tan\alpha$$

$$\Rightarrow R_T = 3\rho \times 2OP\tan\alpha = 6\rho OP\tan\alpha = 6\rho vt\tan\alpha$$

$$avec \; \tan\alpha = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R_T = 6\rho vt \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\rho vt\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R_T = 2\rho vt\sqrt{3}$$

b)) Déduisons que l'intensité du courant qui traverse le circuit est constante

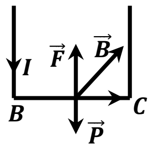
$$|e| = R_T|i| \Rightarrow 2Bv^2 t\tan\alpha = (6\rho vt\tan\alpha)|i|$$

$$\Rightarrow |i| = \frac{Bv}{3\rho} = cste \quad soit : \; |i| = \frac{0{,}5 \times 1}{3 \times 1} = 0{,}17A$$

Solution 8

1. a)) Pour que la force électromagnétique $\vec{F}$ soit verticale, il faut que le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ soi horizontal puisque $\vec{F} \perp \vec{B}$. Le sens de $\vec{B}$ qui crée une force électromagnétique verticale et dirigée vers le haut (déterminée par la règle de trois doits de la main droite), deux position de l'aimant correspondent à cette disposition du champ magnétique $\vec{B}$.

- 1[er] cas : Le plan de l'aimant est horizontal et ses branches sont parallèles à (BC).

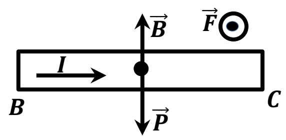


En utilisant la règle de trois doigts, $\vec{F}$ est dirigée vers le haut

On suppose que toute la barre BC est plongée dans le champ magnétique $\vec{B}$.

Alors l'intensité de la force de Laplace est : $F = IlB$

- 2[ème] cas : Le plan de l'aimant est vertical et perpendiculaire à (BC). Alors dans ce cas, seule la position de MN de la barre de longueur d est plongée dans le champ magnétique $\vec{B}$, donc $F = IdB$.



b)) Calcul du poids P de la barre

- Volume d'un cylindre : $V = \pi R^2 h = \pi \frac{D^2}{4} l$

- Masse de la barre : $m = V\mu = \mu\pi \frac{D^2}{4} l$

- Poids de la barre : $P = mg = \mu\pi \frac{D^2}{4} lg$

$$P = 8{,}85.10^3\pi \times \frac{(1{,}5 \times 10^{-3})^2}{4} \times 0{,}1 \times 9{,}8 = 1{,}53 \times 10^{-2}N$$

c)) Valeur de l'intensité minimale du courant

Le système est pseudo-isolé :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow P = F = IlB \Rightarrow I_{min} = \frac{P}{lB}$$

On distingue deux cas :

1[er] cas :

$$I_{min} = \frac{P}{lB} = \frac{1{,}53 \times 10^{-2}}{0{,}1 \times 0{,}05} = 3{,}06A$$

2[ème] cas :

$$I_{min} = \frac{P}{dB} = \frac{1{,}53 \times 10^{-2}}{0{,}04 \times 0{,}05} = 7{,}65A$$

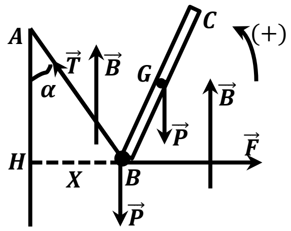
Dans les deux cas, l'intensité minimale cherché est :

$$I_{min} = 3{,}06A$$

2. Pour que la force électromagnétique $\vec{F}$ soit horizontale, il faut que le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ soit vertical.

Si de plus $\vec{B}$ est dirigé vers le haut, la déviation se fait comme l'indique la figure2.

Calcul de X :



La barre est soumise à son poids $\vec{P}$ à la force de Laplace $\vec{F}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil qui rencontre l'axe de rotation.

A l'équilibre : $\sum M(\vec{F}_{ext}) = 0$

$M(\vec{P}) + M(\vec{T}) + M(\vec{F}) = 0 \; or \; M(\vec{T}) = 0 \Longrightarrow M(\vec{F}) = M(\vec{P})$

Avec $M(\vec{F}) = FAH = IdB \times L\cos\alpha = IdBL\cos\alpha$ et

$$M(\vec{P}) = PL\sin\alpha$$

$$\Longrightarrow IdBL\cos\alpha = PL\sin\alpha \Longrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{IdBL}{PL}$$

$$\Longrightarrow \tan\alpha = \frac{IdB}{P} = \frac{0{,}1 \times 0{,}04 \times 5.10^{-2}}{1{,}53 \times 10^{-2}}$$

$$soit\ \tan\alpha = 1{,}3 \times 10^{-2} \Longrightarrow \alpha = 0{,}75°$$

Comme α est plus petit, on en déduit que

$$\tan\alpha \sim \sin\alpha = \frac{HB}{AC} = \frac{X}{L} = \frac{F}{P} \Longrightarrow X = L\tan\alpha = \frac{LIdB}{P}$$

$$A.N:\ X = 1 \times 1{,}3 \times 10^{-2} m = 1{,}3cm$$

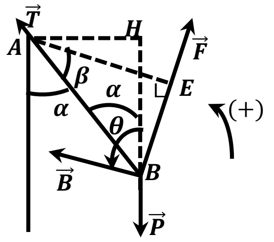
3. BC ne subit aucune action, si la force de Laplace est nulle

Alors $F = IlB\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = k\pi\ \ avec\ k \in IN$

D'où l'angle formé par le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ et $\overrightarrow{BC}$ est

$$k\pi\ \ et\ F = 0$$

4. Expression de tan αen fonction de θ



A l'équilibre $M(\vec{F}) = M(\vec{P})$,

Avec

$M(\vec{F}) = FAE$ où $AE = AB\cos\beta$

et $M(\vec{P}) = PAH = PL\sin\alpha$

Or β se trouve autour des angles alternes internes, donc $\beta = \theta - \alpha$

$AE = AB\cos\beta = L\cos(\theta - \alpha) \Longrightarrow\ M(\vec{F}) = FL\cos(\theta - \alpha)$

$Alors$: $PL\sin\alpha = FL\cos(\theta - \alpha) \Longrightarrow P\sin\alpha = F\cos(\theta - \alpha)$

Remarque : $\cos(a - b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$Alors:\ P\sin\alpha = F\cos(\theta - \alpha) = F\cos\theta\cos\alpha - F\sin\theta\sin\alpha$

$(P + F\sin\theta)\sin\alpha = F\cos\theta\cos\alpha$

$$\Longrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{F\cos\theta}{P + F\sin\theta}$$

Ici $F = IdB$, puisque seule la longueur d est plongée dans le champ magnétique $\vec{B}$.

$$\tan\alpha = \frac{IdB\cos\theta}{P + IdB\sin\theta}$$

5. Montrons que le fil peut se déplacer et calculons l'intensité I

$F = IlB_V\ or$ d'après la question 3,

$$\frac{F}{P} = \frac{X}{L} \Longrightarrow \frac{IlB_V}{P} = \frac{X}{L} \Longrightarrow I = \frac{PX}{B_V Ll}$$

$$Et\ \tan \mathrm{I} = \frac{B_V}{B_H} \Longrightarrow B_V = B_H \tan \mathrm{I}$$

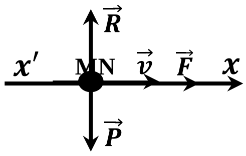
$$\Longrightarrow I = \frac{PX}{B_H Ll\tan \mathrm{I}}\ \ tel\ que\ \mathrm{I} = 64°\ \ et\ B_H = 2.10^{-5}T$$

$$I = \frac{1{,}53 \times 10^{-2} \times 10^{-3}}{2.10^{-5} \times 1 \times 0{,}1 \times \tan 64°} = 3{,}73A$$

Solution 9

1. Inventaire des forces appliquées à tige

La tige MN de masse m est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction $\vec{R}$ et à la force de Laplace $\vec{F}$.



En utilisant la règle de trois doigts , la force électromagnétique $\vec{F}$ est horizontale et dirigée vers la droite.

2. Accélération a de la tige MN

T.C.I : $\vec{F} + \vec{P} = m\vec{a}$, suivant x'x :

$$F = ma \Longrightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{IlB}{m} = \frac{3 \times 0{,}1 \times 0{,}2}{20 \times 10^{-3}} = 3m.s^{-2}$$

Comme a>0, alors le mouvement de la tige MN sur les rails est uniformément accéléré.

3. Équations horaires du mouvement

M.U.A : $v(t) = at + v_0\ et\ x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

or à $t = 0, x_0 = 0\ et\ v_0 = 0$

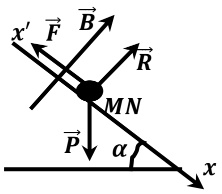
$$Alors:\ v(t) = at = 3t\ \ et\ x(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{3}{2}t^2 = 1{,}5t^2$$

4. Vitesse de la tige à t=0,5s

$A\ t = 0{,}5s\ ;\ \ v = 3t = 3 \times 0{,}5 = 1{,}5m.s^{-1}$

5. Valeur de l'inclinaison α dans les deux cas d'équilibre

a)) $\vec{B}$ est perpendiculaire aux rails



La tige est soumise à son poids $\vec{P}$, à la force électromagnétique $\vec{F}$ et à la réaction de la piste $\vec{R}$ de la piste.

A l'équilibre $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$

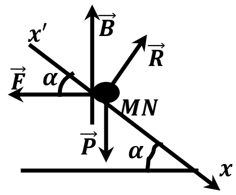
Suivant x'x : $-F + mg\sin\alpha = 0$

$$\Longrightarrow mg\sin\alpha = F = IlB$$

$$\sin\alpha = \frac{IlB}{mg} = \frac{3 \times 0{,}1 \times 0{,}2}{20 \times 10^{-3} \times 10} = 0{,}3$$

$$\Longrightarrow \alpha = 17{,}45°$$

b)) $\vec{B}$ est vertical



Si le champ magnétique est vertical, la force électromagnétique est toujours horizontale.

A l'équilibre $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$

Suivant x'x :

$$-F\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0 \Longrightarrow mg\sin\alpha = IlB\cos\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{IlB}{mg} = 0{,}3 \Longrightarrow \alpha = 16{,}70°$$

Solution 10

1. Calcul de la longueur L

La barre est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la réaction de la piste $\vec{R}$ de la piste.

T.E.C : $\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mgL\sin\alpha \Longrightarrow L = \frac{v^2}{2g\sin\alpha}$

$$A.N: L = \frac{2{,}8^2}{2 \times 9{,}8 \times \sin 20°} = 1{,}17m$$

2. a)) Valeur de l'intensité I_0

$e = -\frac{d\Phi}{dt}$ $or\ \Phi = \vec{B}.\vec{S} = \vec{B}.\vec{n}S = \vec{B}.\vec{n}lx = Blx\cos\alpha$

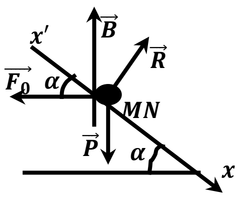
$e = -Bl\cos\alpha\frac{dx}{dt} = -Blv\cos\alpha$

$A\ t = 0, e_{MN} = Bvl\cos\alpha = RI_0 \Longrightarrow I_0 = \frac{Bvl\cos\alpha}{R}$

$A.N: I_0 = \frac{1 \times 2{,}8 \times 0{,}1 \times \cos 20°}{0{,}2} = 1{,}31A$

$I_0\ est\ dirigé\ suivant\ MN$

b)) Caractéristique de la force de Laplace



La tige est soumis à la force

$$\vec{F_0} = I_0\overrightarrow{MN}\wedge\vec{B}$$

En utilisant la règle de 3 doigts de la main droite : $\vec{F_0}$ est horizontale et dirigée vers la gauche.

$F_0 = I_0lB = 1{,}31 \times 0{,}1 \times 1 = 0{,}131N$

c)) Inventaire des forces

A l'instant t=0s, La barre est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, à la force électromagnétique $\vec{F_0}$ et à la réaction de la piste $\vec{R}$.

T.C.I : $\vec{F_0} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$,suivant x'x :

$-F_0\cos\alpha + mg\sin\alpha = ma \Longrightarrow a = g\sin\alpha - \frac{F_0\cos\alpha}{m}$

$A.N: a = 9{,}8\sin 20° - \frac{0{,}131\cos 20°}{20 \times 10^{-3}} = -2{,}76m.s^{-2}$

$a = cste < 0$, alors le mouvement est uniformément décéléré, d'où le vecteur accélération $\vec{a}$ est de sens opposé avec $\vec{v}$.

Explication de la variation de l'intensité du courant quand la barre se déplace

Le mouvement est uniformément varié, i est en fonction de la vitesse. La vitesse décroit , la force électromotrice induite e_{MN} et l'intensité é induit i diminuent de meme que la force électromagnétique $\vec{F}$. L'accélération peut s'annuler et le mouvement devient uniforme et $v = cste$.

3. a)) Valeur de la force F_1

$-F_1\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0\ \ car\ a = 0$

$$\Longrightarrow F_1 = mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = mg\tan\alpha$$

$$A.N: F_1 = 20 \times 10^{-3} \times 9{,}8\tan 20° = 7{,}13 \times 10^{-2}N$$

b)) Valeur de l'intensité I_1 et de la vitesse v_1

$F_1 = I_1lB \Longrightarrow I_1 = \frac{F_1}{lB} = \frac{7{,}13 \times 10^{-2}}{0{,}1} = 0{,}713A$

$I_1 = \frac{Bv_1l\cos\alpha}{R} \Longrightarrow v_1 = \frac{I_1R}{Bl\cos\alpha} = \frac{0{,}713 \times 0{,}2}{0{,}1\cos 20°} = 1{,}52m.s^{-1}$

c)) Puissance dissipée par l'effet joule dans le conducteur

$P_1 = RI_1{}^2 = 0{,}2 \times 0{,}713^2 = 0{,}1W$

Puissance fournie par le pois

$P_m = m\vec{g}.\vec{v}_1 = mgv_1\sin\alpha$

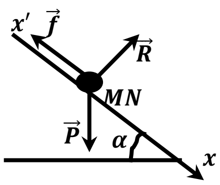
$A.N:\ P_m = 20 \times 10^{-3} \times 9{,}8 \times 1{,}52\sin 20° = 0{,}1W$

La Puissance fournie par le poids est transformée en chaleur par l'effet joule.

Solution 11

1. a)) Intensité de la force de frottement

La barre est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, à la réaction de la piste $\vec{R}$ de la piste et à la force de frottement $\vec{f}$ qui oppose le vecteur vitesse $\vec{v}$.



T.E.C : $\frac{1}{2}mv^2 = mgL\sin\alpha - fL$

$$\Longrightarrow f = \frac{m}{L}\left(-\frac{v^2}{2} + gL\sin\alpha\right)$$

$A.N:\ f = \frac{60\times10^{-3}}{0{,}15}\left(-\frac{1{,}2^2}{2} - 9{,}8 \times 0{,}15\sin 30°\right) = 6 \times 10^{-3}N$ b))

Calcul de l'accélération prise par la barre en son mouvement

T.C.I : $\vec{f} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$,suivant x'x :

$-f + mg\sin\alpha = ma \Longrightarrow a = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$

$$A.N: a = 9{,}8 \times \sin 30° - \frac{6.10^{-3}}{60 \times 10^{-3}} = 4{,}8m.s^{-2}$$

Comme $a = cste > 0$, alors le mouvement de la barre est uniformément accéléré.

c)) Lois horaires de son mouvement

$$\Longrightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 = 2{,}4t^2\ et\ v(t) = at = 4{,}8t$$

$$or\ v = 4{,}8t = 1{,}2 \Longrightarrow t = \frac{1{,}2}{4{,}8} = 0{,}25s$$

2. Valeur de la f.é.m. E du générateur

$A\ t = 0, E = Bvl\ \ car\ le\ champ$ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire aux rails

$E = 1{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}12V\ \ et\ I = \frac{E}{R} = \frac{0{,}12}{1{,}20} = 0{,}1A$

Le courant circule dans le sens positif choisi.

3. a)) Expression de la f.é.m. induite et de l'intensité induite

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}\ or\ \Phi = Blx \Longrightarrow e = -Bl\frac{dx}{dt} = -Bvl$$

($\vec{B}$ est perpendiculaire à la surface considérée).

$i = \frac{e}{R'} = -\frac{Bvl}{R'}$

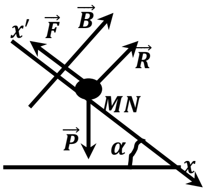
Alors le courant induit a un sens opposé au sens positif choisi.

b)) <u>Caractéristique d la force de Laplace</u>

La tige est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, à la force électromagnétique $\vec{F}$ et à la réaction de la piste $\vec{R}$ de la piste.

En utilisant la règle de trois doigts de la main droite, la force de Laplace $\vec{F}$ est tangentielle à la trajectoire et opposée au vecteur vitesse, on trouve $F = ilB$

<u>Expression de l'accélération a</u>



T.C.I : $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$,suivant x'x :

$-F + mg\sin\alpha = ma \Longrightarrow a$

$$= g\sin\alpha - \frac{ilB}{m}$$

c)) <u>Intensité maximal du courant induit</u>

Si la barre atteint une vitesse limite, alors son mouvement devient uniforme et son accélération s'annule à cet instant :

$$a = g\sin\alpha - \frac{ilB}{m} = 0 \Longrightarrow i_{max} = \frac{mg\sin\alpha}{lB}$$

$$A.N: i_{max} = \frac{60 \times 10^{-3} \times 9{,}8 \times \sin 30°}{0{,}1} = 2{,}94A$$

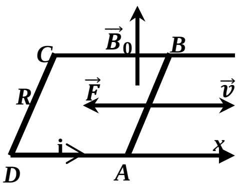
<u>Vitesse limite atteinte par la barre en son mouvement</u>

$$i_{max} = \frac{Bv_l l}{R'} \Longrightarrow v_{limitée} = \frac{R'}{Bl} i_{max} = \frac{0{,}20 \times 2{,}94}{1 \times 0{,}1} = 5{,}88 m.s^{-1}$$

<u>Solution 12</u>

I.1. a)) <u>Expression du flux Φ</u> : $\Phi = BS = Blx$

b)) <u>Champ électromoteur</u>



Dans la barre en mouvement les porteurs de charge sont soumis à la force de Lorentz qui est une force magnétique $\vec{F} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$. Cette force a la même expression dans le référentiel de la barre en mouvement. Il s'agit alors d'une force $\vec{F} = q\,\vec{v_0}\wedge\vec{B} = q\vec{E}_m \Longrightarrow \vec{E}_m = \vec{v}_0\wedge\vec{B}$:

Le champ $\vec{E}_m = \vec{v}_0\wedge\vec{B}$ est le champ électromoteur.

c)) <u>Sens du courant induit</u>

Le courant induit doit être à l'origine d'une force de Laplace $\vec{F} = i\,\overrightarrow{AB}\wedge\vec{B_0}$ qui, selon la loi de modération de Lenz, s'oppose au mouvement de la barre. Cela implique que i est négatif.

Nous pouvons tout aussi constater que le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v}_0\wedge\vec{B}$ est dirigé selon $\overrightarrow{BA}$ et donc i est négatif.

Il est également possible d'argumenter à partir de la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 l\frac{dx}{dt}$.

La vitesse étant positive, e est donc négatif et donc i est négatif ;

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 l\frac{dx}{dt} = -B_0 lv = Ri \Longrightarrow i = -\frac{B_0 lv}{R}$$

d)) <u>Caractéristique de la force de Laplace</u>

En utilisant la règle de trois doigts de la main droite, la force de Laplace $\vec{F}$ est horizontale et dirigée vers la gauche et d'intensité

$$F = |i|lB_0 = \frac{{B_0}^2 l^2 v}{R}$$

2. a)) <u>Équation différentielle liant la vitesse v</u>

T.C.I : $\vec{F} = m\vec{a}$; suivant le déplacement de la barre,

$$-F = ma \Longrightarrow -\frac{{B_0}^2 l^2 v}{R} = m\frac{dv}{dt} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{{B_0}^2 l^2}{mR}v = 0$$

<u>Déduisons l'expression de v(t)</u>

La solution générale de cette équation différentielle linéaire du premier ordre est une solution exponentielle. En posant :

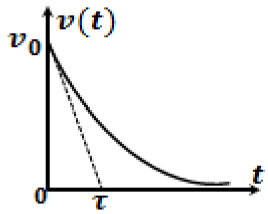
$$\tau = \frac{mR}{{B_0}^2 l^2}$$

Cette Solution générale s'écrit : $v = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$

Il reste à déterminer la constante K. A t=0, $v_0 = Ke^0\ soit\ \ K = v_0$

$$v(t) = v_0 e^{-\left(\frac{{B_0}^2 l^2}{mR}\right)t} = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

b)) <u>Allure de courbe v(t)</u>



c)) <u>Influence de R</u>

La constante de temps τ est proportionnelle à R.

Diminuer R revient à ralentir la vitesse de la barre d'autant plus rapidement.

II. 1. a)) <u>Le flux Φ'</u>

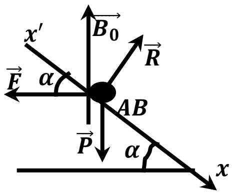
$\Phi' = \vec{B}.\vec{S} = \vec{B}_0.\vec{n}S = \vec{B}_0.\vec{n}lx' = B_0 lx'\cos\alpha$

b)) <u>Intensité du courant induit i'</u>

$$e' = -\frac{d\Phi'}{dt} = -B_0 l\frac{dx'}{dt} = -B_0 lv'^{\cos\alpha} = Ri'$$

$$\Longrightarrow i' = -\frac{B_0 lv'^{\cos\alpha}}{R}$$

2. a)) <u>Inventaire des force appliquées à la barre AB</u>



La barre de masse m est soumise à :

- La force de Laplace $\vec{F}'$ orthogonale à $\vec{B}_0$ et à $\overrightarrow{AB}$: elle est horizontale et dirigée vers la gauche et son point d'application au milieu de AB,

- Son poids $\vec{P}$ verticale et appliquée également au milieu de AB ,

- La réaction $\vec{R}$ appliquée au milieu de AB et incliné d'un angle α par rapport à la verticale.

b)) <u>Expression de la force F'</u>

$$F' = i'lB_0 = \frac{{B_0}^2 l^2 v'^{\cos\alpha}}{R}$$

T.C.I : $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$, suivant x'x :

$$-F\cos\alpha + mg\sin\alpha = ma = m\frac{dv'}{dt}$$

$$\Rightarrow m\frac{dv'}{dt} = mg\sin\alpha - \frac{{B_0}^2 l^2 v'\cos\alpha}{R}$$

c)) <u>Expression de v'(t)</u>

$$\tau' = \frac{mR}{{B_0}^2 l^2\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{dv'}{dt} + \frac{v'}{\tau'} = g\sin\alpha$$

Il apparait immédiatement une solution particulière constante :

$$v'_{part} = \tau' g\sin\alpha$$

La solution générale de cette équation est donc :

$$v' = \tau' g\sin\alpha + Ke^{-\frac{t}{\tau'}}$$

et la constante K et déterminer la condition initiale :

$$v'(0) = 0 = \tau' g\sin\alpha + K \Rightarrow K = -\tau' g\sin\alpha$$

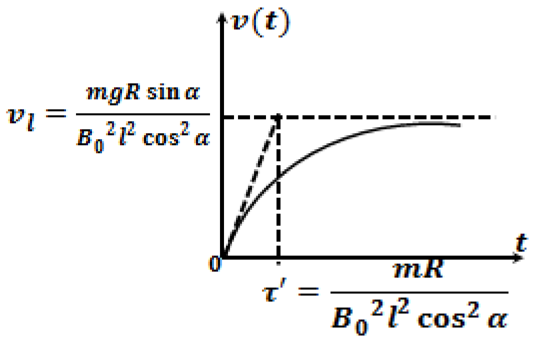
$$v' = \tau' g\sin\alpha - \tau' g\sin\alpha\, e^{-\frac{t}{\tau'}} = \tau' g\sin\alpha\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}\right)$$

$$v' = \frac{mgR\sin\alpha}{{B_0}^2 l^2\cos^2\alpha}\left(1 - exp\left(-\frac{{B_0}^2 l^2\cos^2\alpha}{mR}\right)t\right)$$

<u>Déduisons la vitesse limite atteinte par la barre AB</u>

$$\lim_{t\to\infty} v'(t) = \frac{mgR\sin\alpha}{{B_0}^2 l^2\cos^2\alpha} \Rightarrow v'_{limit\acute{e}e} = \frac{mgR\sin\alpha}{{B_0}^2 l^2\cos^2\alpha}$$

<u>Allure de la courbe v'(t)</u>



<u>Solution 13</u>

1. Le champ magnétique $\vec{B}$ verticale et dirigé vers le bas (du pole nord vers le pole sud)

2. <u>Direction et sens de la force de Laplace</u>

Le courant sort du pole (+) du générateur, donc le courant circule de B vers A.

En utilisant la règle de trois doigts, la force de Laplace $\vec{F}$ est horizontale et dirigée vers la gauche.

3. <u>Valeur de la masse M en équilibre</u>

Le conducteur est en équilibre lorsque la tension $\vec{T}$ du fil est égale et opposé à la force $\vec{F}$. A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

$$\Rightarrow P = T = F \Rightarrow F = P = Mg = IlB \Rightarrow M = \frac{IlB}{g}$$

$$M = \frac{6\times 0{,}06\times 0{,}1}{9{,}8} = 3{,}67\times 10^{-3}kg = 3{,}67g$$

4. a)) <u>Nature du mouvement sur OO'</u>

En permutant les bornes, la force électromagnétique $\vec{F}$ est dirigée vers la droite.

T.C.I : $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Rightarrow F = ma\ car\ \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$,

donc $a = \frac{F}{m} = \frac{IlB}{m} > 0$

Alors le mouvement est uniformément accéléré.

b)) <u>Équation de la vitesse v(t)</u>

$v(t) = at + v_0\ \ or\ à\ t = 0, v_0 = 0$

$$\Rightarrow v(t) = at = \frac{IlB}{m}t = \frac{6\times 0{,}06\times 0{,}1}{0{,}008} = 4{,}5t$$

c)) <u>Equation horaire du mouvement</u> x(t)

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0\ or\ à\ t = 0, v_0 = 0\ et\ x_0 = 0$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{IlB}{2m}t^2 = 2{,}25t^2$$

d)) <u>Vitesse du conducteur en O'</u>

$$v^2 = 2aOO' \Rightarrow v = \sqrt{2aOO'} = \sqrt{2\times 4{,}5\times 0{,}04} = 0{,}6m.s^{-1}$$

e)) <u>Durée d'aller en O et O'</u>

- Temps t_1 d'aller de O en O' :

$$d = 0{,}04 = 2{,}25{t_1}^2\ soit\ t_1 = \sqrt{\frac{0{,}04}{2{,}25}} = 0{,}13s$$

- <u>Temps t_2 pour aller de O' à O''</u>

Au-delà de O' le mouvement est uniforme de $v = 0{,}6m.s^{-1}$

$$v = \frac{O'O''}{t_2}\ soit\ t_2 = \frac{O'O''}{v} = \frac{0{,}1}{0{,}6} = 0{,}17s$$

Soit T la durée d'aller de O à O'' :

$$T = t_1 + t_2 = 0{,}13 + 0{,}17 = 0{,}30s$$

<u>Solution 14</u>

1. a)) <u>Montrons qu'on observe le phénomène d'induction électromagnétique</u>

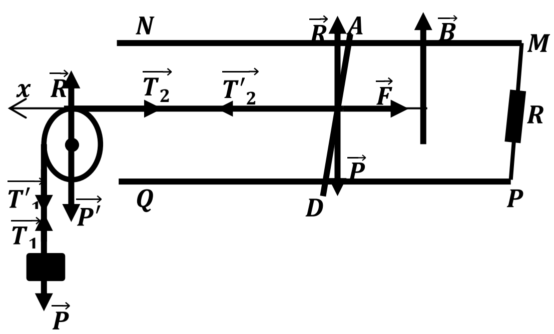
Comme il y a déplacement de l'induit (le courant) et de l'inducteur (la tige) et que le circuit est entièrement plongé dans le champ magnétique uniforme $\vec{B}$, alors le circuit est le siège d'un phénomène d'induction électromagnétique.

b)) <u>Expression de la f.é.m. en fonction de B, v, l</u>

$e = -\frac{d\Phi}{dt}$ avec $\Phi = BS = Blx\ soit\ e = -Bl\frac{dx}{dt} = -Bvl$

$i = \frac{e}{R} = -\frac{Bvl}{R} < 0$, *alors le courant* induit circule en sens inverse du sens positif choisi.

c)) <u>Caractéristique de la force de Laplace</u>



En utilisant la règle de trois doigts de main droite, la force de Laplace $\vec{F}$ est horizontale et dirigée vers la gauche. Soit $F = ilB$.

2. a)) Expression de l'accélération a en f (M, m, v, l, B, g, R)

- La tige est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction $\vec{R}$ et à la force électromagnétique $\vec{F}$ et à la tension du fil $\vec{T_2}$.

T.C.I : $\vec{T}_2 + \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ $suivant\ x'x$:

$$-F + T_2 = ma \Longrightarrow T_2 = F + ma\ (1)$$

- Le solide de masse M est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}_1$ du fil :

T.C.I : $\vec{T}_1 + M\vec{g} = M\vec{a}$, suivant z'z :

$$Mg - T_1 = Ma \Longrightarrow T_1 = Mg - Ma\ (2)$$

- Pour la poulie de masse m' :

R.F.D (en rotation) :

$$T'_1 r - T'_2 r = J_\Delta \ddot{\theta} = \frac{1}{2} m' r^2 \frac{a}{r} \Longrightarrow T'_1 - T'_2 = \frac{m'a}{2}\ (3)$$

$$Or\ T_1 = T'_1\ \ et\ T_2 = T'_2 \Longrightarrow Mg - Ma - F - ma = \frac{m'a}{2}$$

$$a\left(m + M + \frac{m'}{2}\right) = Mg - F = Mg - IlB = Mg - \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

$$car\ |i| = \frac{Blv}{R}$$

$$a = \frac{Mg - \frac{B^2 l^2 v}{R}}{m + M + \frac{m'}{2}} = \frac{MgR - B^2 l^2 v}{R\left(m + M + \frac{m'}{2}\right)} = cste$$

Alors le mouvement est uniformément varié :

Accéléré si a>0 et retardé si a<0.

b)) Expression de la vitesse limite de la tige

Lorsque la tige atteint sa vitesse limite, son accélération s'annule et son mouvement devient uniforme.

$$a = 0 \Leftrightarrow MgR - B^2 l^2 v = 0\ soit\ \ v_{limite} = \frac{MgR}{B^2 l^2} = cste$$

3. a)) Intensité du courant induit

$$|i| = \frac{Bv_l l}{R} = \frac{Bl}{R} \times \frac{MgR}{B^2 l^2} = \frac{Mg}{Bl}$$

b)) Puissance consommée dans le circuit

$$P_e = ei\ or\ e = iR\ soit\ P_e = Ri^2 = \left(\frac{Mg}{Bl}\right)^2 R$$

c)) Puissance développée par le poids

$$P(\vec{P}) = Mgv_l = Mg \times \frac{MgR}{B^2 l^2} = \left(\frac{MgR}{Bl}\right)^2 R$$

On constate que $P_e = P_m = \left(\frac{MgR}{Bl}\right)^2 R$, donc le système transforme, avec un rendement de 100% de l'énergie mécanique en énergie électrique.

D'où : dans les phénomène d'induction, par déplacement de l'énergie électrique apparait au détriment de l'énergie mécanique.

Solution 15

I. 1. Comme le courant induit s'oppose toujours au déplacement de la tige, d'après la loi de Lenz. Alors pour avoir un courant induit positif, il faut orienter le circuit dans le sens opposé du déplacement c'est-à-dire i doit circuler de C vers D.

Comme $i > 0 \Longrightarrow \Phi < 0\ \ et\ \ \frac{d\Phi}{dt} < 0\ soit\ e_m = -\frac{d\Phi}{dt} > 0$

2. Intensité du courant induit

$e = -\frac{d\Phi}{dt}$ avec $\Phi = BS = Blx\ soit\ e = -Bl\frac{dx}{dt} \Longrightarrow e = Blv$

$$i = \frac{e}{R} = \frac{Bvl}{R} = \frac{0,5 \times 4 \times 0,1}{2} = 0,1A$$

3. Puissance de la force de Laplace

$$P_e = ei = i \times iR = Ri^2 = 2 \times 0,1^2 = 0,02W$$

4. Expression de la f.é.m. induit

$$e = Bvl = Bl \times 4\cos 2\pi t = 4Bl\cos(2\pi t) = e_{max}\cos(2\pi t)$$

$$\Longrightarrow e_{max} = 4Bl$$

$$e_{max} = 4 \times 0,5 \times 0,1 = 0,2V\ \ et\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1s$$

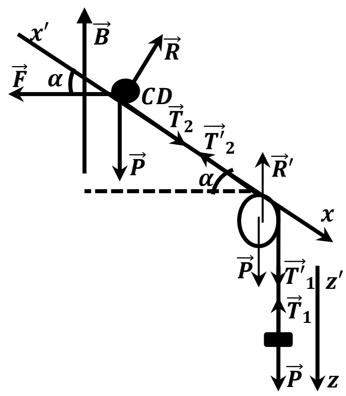
Expression de l'intensité induit

$$i = \frac{e}{R} = \frac{0,2\cos(2\pi t)}{2} = 0,1\cos(2\pi t) = i_{max}\cos(2\pi t)$$

$$soit\ i_{eff} = \frac{i_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{0,1}{\sqrt{2}} = 0,07A$$

II. 1. Valeur de l'accélération a de la tige

- La barre est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction $\vec{R}$ et à la force électromagnétique $\vec{F}$ horizontale et vers la gauche et à la tension du fil $\vec{T_2}$.



T.C.I : $\vec{T}_2 + \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ $suivant\ x'x$:

$$-F\cos\alpha + mg\sin\alpha + T_2 = ma$$

$$\Longrightarrow T_2 = F\cos\alpha - mg\sin\alpha + ma\ (1)$$

- Le solide de masse M est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}_1$ du fil :

T.C.I : $\vec{T}_1 + M\vec{g} = M\vec{a}$, suivant z'z :

$$Mg - T_1 = Ma \Longrightarrow T_1 = Mg - Ma\ \ (2)$$

- Pour la poulie de moment d'inertie :

R.F.D (en rotation) :

$$T'_1 r - T'_2 r = J_\Delta \ddot{\theta} = J_0 \frac{a}{r} \Longrightarrow T'_1 - T'_2 = J_0 \frac{a}{r^2}\ \ \ (3)$$

$Or\ T_1 = T'_1\ \ et\ T_2 = T'_2$

$\Rightarrow Mg - Ma - F\cos\alpha + mg\sin\alpha - ma = J_0\dfrac{a}{r^2}$

$a\left(m + M + \dfrac{J_0}{r^2}\right) = Mg + mg\sin\alpha - \mathrm{F}\cos\alpha$

$$\Rightarrow\ a = \frac{Mg + mg\sin\alpha - F\cos\alpha}{m + M + \frac{J_0}{r^2}}$$

$$soit\ \ a = \frac{(M + m\sin\alpha)g - ilB\cos\alpha}{m + M + \frac{J_0}{r^2}} = cste$$

$$a = \frac{(0{,}1 + 20\times10^{-3}\sin 10°)\times 10 - 0{,}1\times0{,}1\times0{,}5\cos 10°}{20\times10^{-3} + 0{,}1 + \frac{10}{(0{,}05)^2}}$$

$a = 2{,}57\times10^{-4} m.s^{-2}$

Comme $a > 0$, alors le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

Équations horaires du mouvement

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0\ or\ à\ t = 0, x_0 = 0\ et\ v_0 = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2\ et\ v(t) = at$$

$$x(t) = \frac{2{,}57\times10^{-4}}{2}t^2 = 1{,}285\times10^{-4}t^2$$

$\underline{et\ v(t) = 2{,}57\times10^{-4}t}$

2. Distance parcourue par la tige à t = 0,3s

$d = 1{,}285\times10^{-4}t^2 = 1{,}285\times10^{-4}\times0{,}3^2 = 1{,}156\times10^{-5}s$

$v = 2{,}57\times10^{-4}t = 2{,}57\times10^{-4}\times0{,}3 = 7{,}71\times10^{-5}m.s^{-1}$

Nombre de tours effectués par la poulie à t=0,3s

$$\omega^2 = 2\ddot{\theta}\theta = 4\pi\ddot{\theta}n\ soit\ \ \frac{4\pi na}{r} = \frac{v^2}{r^2}$$

$$soit\ n = \frac{v^2}{4\pi ar} = \frac{(7{,}71\times10^{-5})^2}{4\pi\times2{,}57\times10^{-4}\times0{,}05}$$

$n = 3{,}68\times10^{-5} tours.$

3. a)) Moment du freinage :

$$M_f = -Fr = -0{,}74\times0{,}05 = -3{,}7\times10^{-2}N.m$$

b)) Valeur de la décélération angulaire

R.F.D : (en rotation) : $M_f = J_0\ddot{\theta}\ soit\ \ \ddot{\theta} = \frac{M_f}{J_0} < 0$

Alors le mouvement de la poulie après la rupture est circulaire uniformément décéléré.

$$\ddot{\theta} = \frac{M_f}{J_0} = \frac{-3{,}7\times10^{-2}}{10} = -3{,}7\times10^{-3}rad.s^{-2}$$

c)) Nombre de tours effectués par la poulie pendant cette phase

$$\Delta\omega^2 = -\omega^2 = \frac{v^2}{r^2} = 2\ddot{\theta}\theta = 4\pi n\ddot{\theta}$$

$$soit\ \ n = -\frac{v^2}{4\pi r^2\ddot{\theta}} = \frac{(7{,}71\times10^{-5})^2}{4\pi\times0{,}05^2\times3{,}7\times10^{-3}}$$

$soit\ n = 5{,}11\times10^{-5}tour$

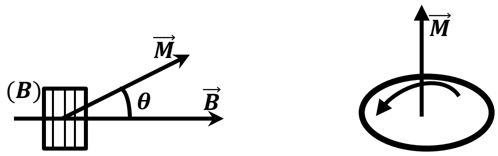
Durée de la phase de freinage

$$\Delta\omega = \ddot{\theta}\Delta t\ soit\ \ \Delta t = \frac{\Delta\omega}{\ddot{\theta}} = \frac{-\omega}{\ddot{\theta}} = -\frac{v}{r\ddot{\theta}}$$

$$\Delta t = -\frac{7{,}71\times10^{-5}}{-0{,}05\times3{,}7\times10^{-3}} = 0{,}42s$$

Solution 16

1. a)) Représentation du vecteur moment magnétique



Le sens du vecteur moment magnétique $\vec{M}$ est donné par le bras gauche de l'observateur Ampère, en regardant l'intérieur du circuit, ou bien, on utilise le fait que le le vecteur $\vec{M}$ sort de la face nord du circuit. Son intensité est défini par :

$$M = NiS = Ni\pi r^2 = Ni\pi\frac{{d_1}^2}{4}$$

$$A.N: M = 10\times6\pi\frac{0{,}05^2}{4} = 0{,}118A.m^2$$

Remarque : Caractéristique du vecteur moment magnétique $\vec{M}$

- Origine : le centre du cadre ;
- direction : normale au cadre ;
- sens : il sort de la face Nord du circuit ;
- intensité : $M = NiS$

b)) Inductance L de la Bobine et l'intensité du camp magnétique B

$\Phi_P = NBS\ \ avec\ \ B = \mu_0\frac{N}{l}i\ \ \Rightarrow\ \ \Phi_P = \mu_0\frac{N^2S}{l}i$

- par définition $\Phi_P = Li\ \ \Rightarrow Li = \mu_0\frac{N^2S}{l}i\ \ \ \Rightarrow L = \mu_0\frac{N^2S}{l}$

$Or\ S = \pi\frac{{d_1}^2}{4}\ \ \Rightarrow\ L = \mu_0\frac{N^2\pi{d_1}^2}{4l}$

$$A.N: L = 4\pi\times10^{-7}\times\frac{10^2\times\pi\times0{,}05^2}{4\times0{,}45} = 5{,}48\times10^{-7}H$$

Valeur du champ magnétique B :

$$B = \mu_0\frac{N}{l}i = 4\pi\times10^{-7}\times\frac{10\times6}{0{,}45} = 1{,}67\times10^{-4}T$$

2. Valeur du flux maximal

Comme le flux est maximal, alors $\vec{S}\ \ et\ \vec{B}$ ont même direction et même sens donc

$mes(\vec{B},\vec{S}) = 0,\ \Phi_{max} = N\vec{B}.\vec{S} = NBS = NB\pi\frac{{d_2}^2}{4}$

Or $\ B = \mu_0\frac{N}{l}I = \mu_0 nI = 4\pi\times10^{-7}\times10^3\times12 = 1{,}5\times10^{-2}T$

$$A.N: \Phi_{max} = 10\times1{,}5\times10^{-2}\times\pi\times\frac{0{,}15^2}{4} = 2{,}65\times10^{-3}Wb$$

3. a)) Expressions littérales du flux , du moment du couple électromagnétique Γ(t), de la force électromotrice inductance dans la bobine e(t) en fonction du temps.

- Expression du flux :$\Phi(t)$

$\Phi = N\vec{B}.\vec{S} = NBS\cos\theta\ \ où\ \theta = mes(\vec{B},\vec{S}) = \omega t = 2\pi Nt$

$\Phi = NBS\cos\omega t\ \ or\ à\ t = 0, \Phi(t = 0) = \Phi_0 = \Phi_{max}$

$\Rightarrow\ \Phi(t) = \Phi_{max}\cos(2\pi nNt)$

$\Phi(t) = 2{,}65 \times 10^{-3}\cos(40\pi t)\,(Wb)$

- <u>Expression de du moment du couple</u>

$\Gamma = \vec{M}\wedge\vec{B} = MB\sin\theta = MB\sin(2\pi nNt)$

$\Gamma = 0{,}118 \times 1{,}67 \times 10^{-4}\sin(40\pi t)$

$\Gamma(t) = 1{,}97 \times 10^{-5}\sin(40\pi t)\,(N.m)$

- <u>Expression de la f.é.m. induite</u> :

$e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = 2{,}65.10^{-3} \times 40\pi \times \sin(40\pi t)$

$e = 0{,}33\sin(40\pi t)\ (V)$

b)) <u>Déduisons les valeurs de $\Phi_{éff}$(t) et de e_{eff}</u>

$\Phi_{eff} = \dfrac{\Phi_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2{,}65 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}} = 1{,}87 \times 10^{-3}Wb\ et$

$e_{eff} = \dfrac{e_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{0{,}33}{\sqrt{2}} = 0{,}23V$

c)) <u>Angles caractérisant la position d'équilibre</u>

Le moment du couple électromagnétique est défini par :

$$\Gamma = \vec{M}\wedge\vec{B} = MB\sin\theta$$

A l'équilibre $\Gamma = MB\sin\theta = 0 \Longrightarrow \sin\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = \pi\ ou\ \theta = 0$

- Pour $\theta = 0$, le flux entrant par la face sud est maximal

$$\Phi = \Phi_{max} = 2{,}65 \times 10^{-3}Wb$$

alors : cette position correspond à l'équilibre stable de la bobine.

- Pour $\theta = \pi$, le flux entrant par la face sud est minimale ($\Phi = -\Phi_{max} = -2{,}65 \times 10^{-3}W$), alors cette position correspond à l'équilibre instable de la bobine.

d)) <u>Application numérique à t=0,5s</u>

$\Phi(t = 0{,}5s) = 2{,}65 \times 10^{-3}\cos(40\pi \times 0{,}5) = 1{,}2 \times 10^{-3}Wb$

$\Gamma(t = 0{,}5s) = 1{,}97 \times 10^{-5}\sin(40\pi \times 0{,}5) = 1{,}75 \times 10^{-5}N.m$

$e(t = 0{,}5s) = 0{,}33\sin(40\pi \times 0{,}5) = 0{,}29V$

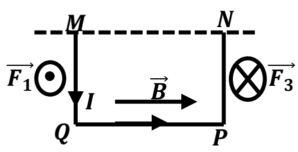
<u>Solution 17</u>

1. <u>Position d'équilibre du plan MNPQ</u>

A l'équilibre le cadre est soumis à son poids $\vec{P}$ verticale et à la réaction $\vec{R}$ de l'axe normale et verticale. Comme ces deux forces sont verticales, alors le plan MNPQ sera dans le plan vertical.

2. a)) <u>$\vec{B}$ est parallèle à $\overrightarrow{QP}$</u>

Le cadre est soumis aux forces électromagnétiques :

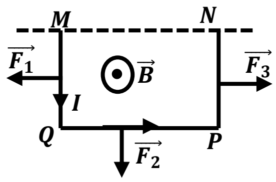


- Sur la face (MQ) : $\vec{F_1} = I\overrightarrow{MQ}\wedge\vec{B}$, donc $\vec{F_1}$ est perpendiculaire au plan sortant.
- Sur la face(QP) : $\vec{F_2} = I\overrightarrow{QP}\wedge\vec{B} = \vec{0}$
- Sur la face (PN) : $\vec{F_3} = I\overrightarrow{PN}\wedge\vec{B}$, donc perpendiculaire au plan entrant.

Or $\vec{F_1} + \vec{F_3} = \vec{0}$, alors le cadre reste dans sa position initiale

Comme les deux forces s'opposent, alors il n'y a pas d'inclinaison par rapport à la verticale.

b)) <u>$\vec{B}$ est perpendiculaire au plan vertical</u>

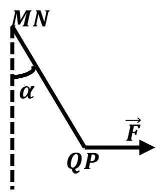


- Sur la face (MQ) : $\vec{F_1} = I\vec{b}\wedge\vec{B}$, est horizontale et dirigée vers la gauche en utilisant la règle de trois doigts.
- Sur la face(QP) : $\vec{F_2} = I\vec{a}\wedge\vec{B}$, est verticale et dirigée vers le bas
- Sur la face (PN) : $\vec{F_3} = I\vec{b}\wedge\vec{B}$, est horizontale et vers la gauche

Comme $\vec{F_1} + \vec{F_3} = \vec{0}$, $\vec{F_1}$ tire le cadre vers le bas.

c)) <u>$\vec{B}$ est vertical de bas vers le haut</u>

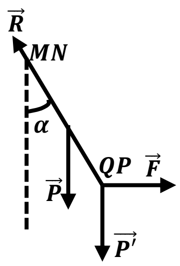
Si le champ magnétique est vertical, donc le coté PQ s'écarte d'un angle α par rapport à la verticale et le cadre se déplace vers l'avant.



3. a)) <u>Caractéristiques des forces de Laplace sur chacun des cotés</u>

- Sur (MQ) et (NP) $\vec{F} = \vec{0}$
- Sur (PQ) : $F' = IbB$

b)) <u>Somme algébrique des moments</u>



$M(\vec{P}) = -mg\dfrac{a}{2}\sin\alpha$

$soit\ \ M(\vec{P}) = -\mu\frac{a^2}{2}g\sin\alpha\ \ car\ m = \mu a$

$M(\vec{P'}) = -m'ga\sin\alpha$

$soit\ M(\vec{P'}) = -\mu abg\sin\alpha\ \ car\ m' = \mu b$

$M(\vec{F}) = Fa\cos\alpha = IBab\cos\alpha$

A l'équilibre : $\sum M(\vec{F}) = 0$

$\Longrightarrow M(\vec{P}) + M(\vec{P'}) + M(\vec{F}) = 0$

$\Longrightarrow -2\mu\dfrac{a^2}{2}g\sin\alpha - \mu abg\sin\alpha + IBab\cos\alpha = 0$

$\mu g(a+b)\sin\alpha = IBb\cos\alpha\ \ soit\ \ \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{IBb}{\mu g(a+b)}$

$\tan\alpha = \dfrac{3 \times 0{,}6 \times 0{,}05}{0{,}05 \times 10(13+5)10^{-2}} = 1 \Longrightarrow \alpha = 45°$

Solution 18

1. a)) Représentation des forces

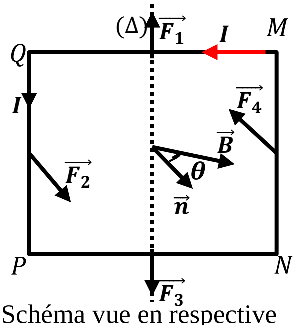


Schéma vue en respective

Chacun des côtés du cadre est soumis à une force de Laplace appliquée en son milieu.

Ces forces ont les propriétés suivantes :

$\vec{F_1} = -\vec{F_3}$ et $\vec{F_2} = -\vec{F_4}$ ce qui implique que l'ensemble des forces n'imprime pas un mouvement de translation de cadre.

$F_2 = F_4 = IaB$

$F_2 = F_4 = 4{,}5.10^{-3} \times 2{,}5 \times 10^{-2} \times 1{,}2.10^{-2} = 1{,}35 \times 10^{-6} N$

Ces deux forces ne sont pas parallèles à l'axe Δ, elles ont donc un effet de rotation du cadre autour de l'axe Δ.

$F_1 = F_3 = IbB$

$F_1 = F_3 = 4{,}5 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-2} \times 1{,}2 \times 10^{-2} = 2{,}16 \times 10^{-6} N$

Ces deux forces sont parallèles à l'axe Δ, elles n'ont donc aucun effet sur la rotation du cadre autour de l'axe Δ.

b)) Position d'équilibre stable du cadre

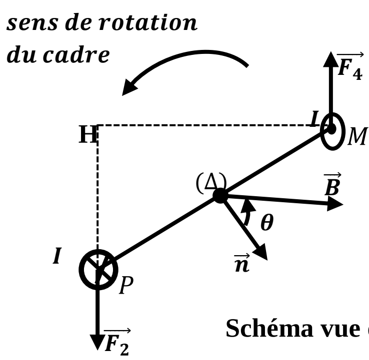


Schéma vue de dessus

D'après la question 1. a)) , le circuit est soumis à un couple formé par $\vec{F_2}$ et $\vec{F_4}$ et dont le module est égale à :

$\Gamma = F_2 MH\ avec\ MH = MP \sin\theta = b \sin\theta \implies \Gamma = IabB \sin\theta$

Un circuit comportant N spires de surface S, parcouru par un courant I, le moment du couple électromagnétique s'écrit :

$$\Gamma = NIabB \sin\theta = NBIS \sin\theta$$

A l'équilibre :$\Gamma = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \implies \theta = \pi\ ou\ \theta = 0$

Pour $\theta = 0$ $(équilibre\ stable)$ et $\theta = \pi$ $(équilibre\ instable)$

$équilibre\ stable$ $équilibre\ instable$

c)) Flux magnétique du circuit

$\Phi = N\vec{B}.\vec{S} = NBS\cos\theta = NBab\cos\theta$

A l'équilibre stable $\theta = 0$

$\implies \Phi = NBab = \Phi_{max} \implies \Phi = \Phi_{max} = NBab$

$\Phi_{max} = 100 \times 1{,}2 \times 10^{-2} \times 2{,}5 \times 10^{-2} \times 4 \times 10^{-2}$

$soit\ \ \Phi_{max} = 1{,}2 \times 10^{-3} Wb = 1{,}2 mWb$

2. a)) Expliquons pourquoi le cadre est le siège d'une f.é.m. induit

Le mouvement du cadre est circulaire uniforme, $\theta = \omega t = 100\pi t$

$\Phi = N\vec{B}.\vec{S} = NBS\cos\theta = NBab\cos\theta = \Phi_{max}\cos(\omega t)$

$soit\ \ \Phi = \Phi_{max}\cos(100\pi t)$

Le flux magnétique varie en fonction du temps, donc le cadre est siège d'une phénomène d'induction électromagnétique de f.é.m.

$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_{max}\omega \sin(\omega t)$

$e = 1{,}2 \times 10^{-3} \times 100\pi \sin(100\pi t) = 0{,}377 \sin(100\pi t)$

$e = e_{max}\sin(100\pi t) = 0{,}377\sin(100\pi t) \implies e_{max} = 0{,}377V$

b)) Expression du couple électromagnétique

$\Gamma = \vec{M}\wedge\vec{B} = MB\sin\theta = NIabB\sin\theta = \Gamma_{max}\sin(\omega t)$

$\implies \Gamma_{max} = NIBab$

$\Gamma_{max} = 100 \times 4{,}5.10^{-3} \times 1{,}2.10^{-2} \times 2{,}5.10^{-2} \times 4.10^{-2}$

$soit\ \ \Gamma_{max} = 5{,}4 \times 10^{-6} N.m$

3. a)) Condition d'équilibre du cadre

A l'équilibre le couple électromagnétique est égal et opposé au couple de rappel $M_r = -C\theta_0$ exercé par le ressort.

$$\implies \Gamma_{max} = -M_r \implies NIBab = C\theta_0$$

b)) En déduisons la constante du torsion C

$NIBab = C\theta_0 \implies C = \dfrac{NIBab}{\theta_0} = \dfrac{\Gamma_{max}}{\theta_0}$

$C = \dfrac{5{,}4 \times 10^{-6}}{\frac{\pi}{6}} = 1{,}031 \times 10^{-5} N.m.rad^{-1}$

Solution 19

1. a)) Détermination de la phase φ

$\theta = \theta_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$ à t=0, $\theta(t=0) = \theta_m$

$$\implies \theta = \theta_m = \theta_m\cos\varphi \implies \cos\varphi = 1 \implies \varphi = 0$$

b)) Vitesse angulaire au passage d'équilibre

T.E.C : $\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}C{\theta_m}^2 \implies \omega = \theta_m\sqrt{\frac{C}{J}}$

$$A.N: \omega = \frac{\pi}{4} \times \sqrt{\frac{10^{-8}}{8 \times 10^{-9}}} = 0{,}88 rad.s^{-1}$$

2. a)) Existence d'une f.é.m. induit

$\Phi = N\vec{B}.\vec{S} = NBS\cos\theta$, comme θ varie en fonction du temps, alors le flux varie également. La variation du flux implique à une existence d'une f.é.m. d'induit

b)) Expression de f.é.m. induit e

$e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = NBS\dot{\theta}\sin\theta = NBab\dot{\theta}\sin\theta$

c)) La f.é.m. induit change de signe si et seulement si sa dérivée par rapport au temps t est nulle :

$$\frac{de}{dt} = NBab\dot{\theta}^2 \cos\theta = 0 \Longrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \; ou \; \theta = -\frac{\pi}{2}$$

d)) <u>Valeur absolue de f.é.m. au passage de sa position d'équilibre</u>

$e = NBab\dot{\theta}\sin\theta$ à l'équilibre

$|\sin\theta| = 1 \Longrightarrow |e| = NBab\theta = \dot{N}Bab\omega$

$A.N: |e| = 100.10^{-2} \times 2{,}5.10^{-2} \times 4.10^{-2} \times 0{,}88 = 8{,}8.10^{-4}V$

<u>Solution 20</u>

1. <u>Valeur de la force électromotrice induite maximale</u>

$e = -\frac{d\Phi}{dt}$ où $\Phi = N\vec{B}.\vec{S} = NBS\cos\theta = NBLl\cos\omega t$

$\Longrightarrow e = NBLl\omega\sin\omega t$

$e = 2\pi fNBLl\sin(2\pi ft) = e_m\sin(2\pi ft) \Longrightarrow e_{max} = 2\pi fNBLl$

$A.N: e_{max} = 2\pi\frac{3000}{60} \times 250 \times 0{,}1 \times 12 \times 10^{-2} \times 6 \times 10^{-2}$

$soit \quad e_{max} = 56{,}54V$

2. <u>Relation entre *i* ,*t*, *R*, *r* et *L*</u>

La loi d'ohm permet d'écrire : $e - L\frac{di}{dt} - ri = Ri$

Si $L = 0 \; et \; r = 0$, alors : $e(t) = u(t) = Ri$ or

$$u(t) = U_m\sin(\omega t) \Longrightarrow i(t) = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R}\sin(\omega t)$$

$$I_{max} = \frac{E_m}{R} = \frac{56{,}54}{100} = 0{,}56A$$

3. <u>Expression du moment du couple électromagnétique</u>

$\Gamma = \vec{M}\wedge\vec{B} = MB\sin\theta = NiSB\sin(\omega t)$

$or \;\; i = I_{max}\sin(\omega t) \Longrightarrow \Gamma = NBSI_{max}sin^2(\omega t)$

<u>Sa valeur moyenne sur une période</u>

$$\Gamma_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T \Gamma dt = \frac{1}{T}\int_0^T NBSI_{max}sin^2(\omega t)\,dt$$

$$\Gamma_{moy} = NBSI_{max}\frac{1}{T}\int_0^T sin^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}NBSI_{max}$$

$$\Gamma_{moy} = \frac{1}{2}NBLlI_{max}$$

$$\Gamma_{moy} = \frac{1}{2} \times 250 \times 0{,}1 \times 12.10^{-2} \times 6.10^{-2} \times 0{,}56 = 0{,}05N.m$$

4. <u>Valeur de la puissance moyenne</u>

Expression de la puissance instantanée qu'il faut fournir au cadre :

$P(t) = u(t).i(t) = U_{max}I_{max}sin^2(\omega t)$

Valeur moyenne de la puissance :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{2}I_{max}U_{max} = \frac{1}{2}I_{max}e_{max}$$

$$A.N: \; P_{moy} = \frac{1}{2} \times 0{,}56 \times 56{,}54 = 15{,}27W$$

Solutions sur l'Auto Induction

Solution 01

1. a)) Caractéristique de $\vec{B}$ au centre du solénoïde

- direction : parallèle à l'axe du solénoïde
- sens : de la face sud vers la face nord
- intensité : $B = \mu_0 \frac{N}{l} i = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{2500\times5}{0,4} = 3,93 \times 10^{-3} T$

b)) Inductance L du solénoïde

$\Phi_P = NBS \;\; avec \;\; B = \mu_0 \frac{N}{l} i \;\; \Rightarrow \;\; \Phi_P = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i$

- par définition $\Phi_P = Li \;\; \Rightarrow Li = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i \;\; \Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$,

$Or \; S = \pi r^2 \;\; \Rightarrow \;\; L = \mu_0 \frac{N^2 \pi r^2}{l}$

$$A.N: L = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{250^2 \times \pi \times 0,02^2}{0,4} = 2,46 \times 10^{-4} H$$

c)) Calcul du flux propre :

$$\Phi_P = Li = 2,46 \times 10^{-4} \times 5 = 1,23 \times 10^{-3} Wb$$

2. a)) Expression du flux en fonction du temps t

$\Phi = N\vec{B}.\vec{S} = NBS \cos\theta \;\; où \; \theta = mes(\vec{B},\; \vec{S}) = \omega t = 2\pi N t \Rightarrow$

$\Phi = NBS \cos \omega t \;\; or \; à \; t = 0, \Phi(t=0) = \Phi_0 = \Phi_{max}$

$\Rightarrow \;\; \Phi(t) = \Phi_{max} \cos \omega t = 1,23 \times 10^{-3} \cos(100\pi t)$

b)) Comme le flux varie en fonction du temps, alors la bobine est le siège d'une f.é.m. d'auto-induction :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 1,23.10^{-3} \times 100\pi \times \sin 100\pi t = 0,39 \sin(100\pi t)$$

c)) Valeur efficace de la f.é.m.

$$e(t) = e_{max} \sin(100\pi t) = 0,39 \sin(100\pi t)$$

$\Rightarrow e_{max} = 0,39V \; et \;\; e_{eff} = \frac{e_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{0,39}{\sqrt{2}} = 0,28V$

Période T : $T = \frac{1}{N} = \frac{1}{50} = 0,02s$

Solution 02

1. a)) Calcul d'inductance L

$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} \;\; or \;\; \frac{N}{l} = n \Rightarrow N = nl \;\; \Rightarrow L = \mu_0 \frac{(nl)^2 S}{l} = \mu_0 n^2 l \pi r^2$

$A.N: L = 4\pi \times 10^{-7} \times 2500^2 \times 0,12 \times \pi \times 0,1^2$

$L = 2,96 \times 10^{-2} H$

b)) Calcul du flux propre

$\Phi_P = Li \;\; or \; B = \mu_0 \frac{N}{l} i \Rightarrow i = \frac{Bl}{\mu_0 N} = \frac{B}{\mu_0 n} \Rightarrow \;\; \Phi_P = \;\; \frac{LB}{\mu_0 n}$

$$A.N: \Phi_P = \frac{2,96.10^{-2} \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 2500} = 9,42 \times 10^{-2} Wb$$

2. a)) Calcul du flux Φ_0

$\Phi = N\vec{B}.\vec{S} = NBS \cos\theta \;\;\; or \;\; à \; t = 0, \theta = 0$

$\Rightarrow \Phi_0 = NBS = LI = \Phi_P = 9,42 \times 10^{-2} Wb$

b)) Expression du flux en fonction du temps t

$$\Phi = N\vec{B}.\vec{S} = NBS \cos\theta \;\; où \; \theta = mes(\vec{B}, \vec{S}) = \omega t$$

$$\Phi = NBS \cos \omega t \;\; or \; à \; t = 0, \Phi_0 = \Phi_{max}$$

$$Soit \;\; \Phi(t) = \Phi_0 \cos \omega t = 9,42 \times 10^{-2} \cos(4\pi t)$$

c)) A.N : t = 0,25s,

$$\Phi = 9,42.10^{-2} \cos(4\pi \times 0,25) = 9,4 \times 10^{-2} Wb$$

3. a)) Comme le flux magnétique varie en fonction du tempes, alors la bobine est le siège d'une phénomène d'induction électromagnétique.

b)) Expression de la f.é.m. :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 9,42.10^{-2} \times 4\pi \times \sin(4\pi t) = 1,18 \sin(4\pi t)$$

- Valeur efficace de la f.é.m. :

$$e(t) = e_{max} \sin(4\pi t) = 1,18 \sin(4\pi t) \;\; \Rightarrow e_{max} = 1,18V$$

$$e_{eff} = \frac{e_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1,18}{\sqrt{2}} = 0,83V$$

Solution 3

1. Calcul de la longueur du cuivre

$L = \mu_0 \frac{N^2 \pi r^2}{l}$, $or \; \lambda = 2\pi r N \;\; \Longrightarrow N = \frac{\lambda}{2\pi r}$

$$\Longrightarrow L = \mu_0 \frac{\pi r^2}{l} N^2 = \mu_0 \frac{\pi r^2}{l} \times \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} = \mu_0 \frac{\lambda^2}{4\pi l}$$

$$Soit \;\; \lambda = \sqrt{\frac{4\pi l L}{\mu_0}} \;\; A.N: \;\; \lambda = \sqrt{\frac{4\pi \times 1 \times 85 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}}} = 922m$$

2. a)) Valeur moyenne de la f.é.m.

Pour $t \in [0; 50ms]$, i es t une fonction linéaire du temps :

$i = at \; où \; a = \frac{2}{0,050} = 40 \;\; \Longrightarrow i(t) = 40t$

$$e = -L\frac{di}{dt} = -40 \times 85.10^{-3} = -3,4V \;\; \Longrightarrow e_{moy} = -3,4V$$

3. a)) On observera une étincelle aux bornes du générateur.

b)) On peut annuler cette inconvénient en plaçant une diode et un conducteur ohmique, associé en série, en dérivation aux bornes du diode constitué par la bobine et le conducteur ohmique.

c)) Le rôle du conducteur ohmique dans cette modification est de protéger la diode lorsqu'elle est parcourue par le courant de rupteur.

4. Energie électromagnétique libérée

$E_{max} = \frac{1}{2} L I_{max}{}^2 = \frac{1}{2} \times 85.10^{-3} \times 2^2 = 0,17J$

Solution 04

1. Phénomène produit dans la bobine

Dans la bobine se produit le phénomène d'induction électromagnétique.

2. Devant le pôle sud qui s'approche le bobine crée une face sud, en créant un courant induit i. D'après le sens de bobinage des enroulements, on en déduit le sens de i dans la bobine.

Comme la bobine se comporte comme un générateur, la tension induit e apparait à même sens que i.

D'après le schéma , on a : $u = -e$ donc $u < 0$.

3. Loi de Lenz : le courant induit, par ses effets, s'oppose à la

cause qui lui a donné naissance.

Loi de Faraday : La f.é.m. induite e dans un circuit soumis à un flux variable $\Phi(t)$ est égale à $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

4. Lorsque l'aimant est immobile, il n'y a pas variation du flux dans la bobine, donc pas de f.é.m. induite e, pas de circulation de courant induit i et $u = 0$.

5. Si on ne connecte pas la résistance, il ne peut y avoir une circulation de courant dans la bobine donc $i = 0$.

Par contre il aura apparition d'une f.é.m. e et on aura $u = -e < 0$.

Solution 05

1. Expression de l'inductance L

$\Phi_P = NBS \ avec \ B = \mu_0 \frac{N}{l} i \ \Rightarrow \ \Phi_P = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i$

- par définition $\Phi_P = Li \ \Rightarrow Li = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i \ \Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$

$$A.N: L = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{(10^4)^2 \times 40 \times 10^{-4}}{0,5} = 1H$$

2. a)) Expression du champs B en fonction du temps

$B = \mu_0 \frac{N}{l} i \ , \ avec \ i = at \text{ où } a = \frac{10}{5} = 2 \Longrightarrow i(t) = 2t$

$B = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{10^4}{0?5} \times 2t = 0,05t \Longrightarrow B(t) = 0,05t$

b)) Calcul de l'intensité du courant induit i

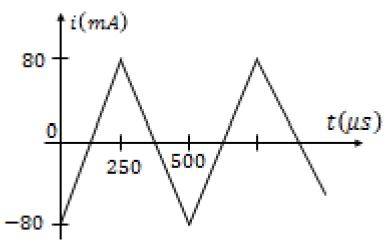
$e = \frac{d\Phi}{dt} \text{ où } \Phi = NBS = NB\pi R^2 \Longrightarrow e = -N\pi R^2 \frac{dB}{dt}$

$e = ri \Longrightarrow i = \frac{e}{r} = -\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N\pi R^2}{r}\frac{dB}{dt}$

$i = -\frac{500 \times \pi \times 10^{-2} \times 0,05}{20} = -3,92 \times 10^{-2} A$

Solution 06

1. Représentation graphique du courant i



2. Expression de la tension u aux bornes de la bobine

$$u = ri - e = ri + L\frac{di}{dt}$$

3.Tension d'une bobine idéale

Bobine idéale $r = 0 \ \Longrightarrow u = L\frac{di}{dt}$

4. Représentation graphique de la tension u de la bobine

Pour $0 < t < 250\mu s$:

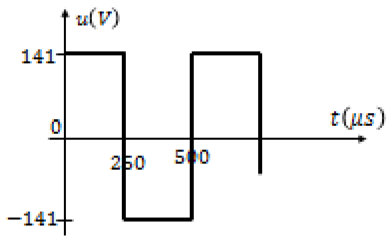
$\Delta i = 80 - (-80) = 160mA \ \ et \ \Delta t = 250 \times 10^{-6} s$

$u = 220 \times 10^{-3} \times \frac{160.10^{-3}}{250.10^{-6}} = 141V$

Pour $250 < t < 500\mu s$:

$\Delta i = -80 - (80) = -160mA \ \ et \ \Delta t = 250 \times 10^{-6} s$

$u = 220 \times 10^{-3} \times \frac{-160.10^{-3}}{250.10^{-6}} = -141V$



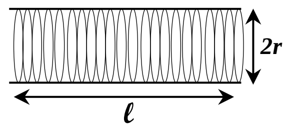
Interprétation La tension u est variable, alors le champ magnétique à l'intérieur de la bobine est variable : alors il y a apparition d'une f.é.m. qui, d'après la loi de Lenz, s'oppose à la cause qui lui a donné naissance. Ainsi lorsque la tension u(t) passe de la valeur zéro à 141 V, le courant ne peut croître instantanément car la f.é.m. qui prend naissance s'oppose à cette croissance.

C'est le phénomène d'auto-induction : la bobine est à la fois inducteur et induit**.**

Solution 07

1. a)) La bobine est parcourue par une courant continue d'intensité constant I, alors le solénoïde n'est pas le siège d'une f.é.m. d'auto-induction *(car* $e = -L\frac{di}{dt} = 0$*).*

b)) Schéma du solénoïde



Caractéristique de $\vec{B}$ au centre du solénoïde

- direction : parallèle à l'axe du solénoïde
- sens : de la face sud vers la face nord
- intensité *:* $B = \mu_0 \frac{N}{l} i = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{100 \times 2}{2} = 1,26 \times 10^{-4} T$

c)) Expression de l'inductance L

$\Phi_P = NBS \ avec \ B = \mu_0 \frac{N}{l} i \ \Rightarrow \ \Phi_P = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i$

- par définition $\Phi_P = Li \ \Rightarrow Li = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i \ \Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$,

$Or \ S = \pi r^2 \ \Rightarrow \ L = \mu_0 \frac{N^2 \pi r^2}{l}$

$A.N: L = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{100^2 \times \pi \times 0,05^2}{2} = 4,93 \times 10^{-2} H$

2. a)) Intervalles du temps où il y a phénomène d'auto- induction

Dans les intervalles $[10; 20ms]$ *et* $[30; 40ms]$,

il y a phénomène d'auto − inductio car dans ce deux intervalles le courant varie en fonction du temps.

b)) <u>Expression de i(t)</u>

- *Pour* $t \in [0\,;10ms]$: $i = cst = 0{,}4A$ *et*
- *Pour* $t \in [20\,;30ms]$, $i = cst = -0{,}4A$
- *Pour* $t \in [10\,;20ms]$, i est une fonction affine du temps : $i(t) = at + b$

$$\begin{cases} t = 0{,}01s;\, i = 0{,}4A \\ t = 0{,}02s;\, i = -0{,}4A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}4 = 0{,}01a + b \\ -0{,}4 = 0{,}02a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -80A.s^{-1} \\ b = 1{,}2A \end{cases}$$

$soit\ \ i(t) = -80t + 1{,}2$

- Pour $t \in [30\,;40ms]$, i est une fonction affine du temps : $i(t) = a't + b'$

$$\begin{cases} t = 0{,}03s;\, i = -0{,}4A \\ t = 0{,}04s;\, i = 0{,}4A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0{,}4 = 0{,}03a' + b' \\ 0{,}4 = 0{,}04a' + b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 80A.s^{-1} \\ b' = -2{,}8A \end{cases}$$

$soit\ \ i(t) = 80t - 2{,}8$

c)) <u>Déduisons e(t) et u(t)</u>

- pour $t \in [0\,;10ms]$ et $t \in [20\,;30ms]$, $e = 0\ et\ u = 0$
- pour $t \in [10\,;20ms]$, $e = -L\frac{di}{dt} = -\left(50.10^{-3}(-80)\right) = 4V$

$et\ \ u = -e + Ri = -e\ \ ,car\ R = 0\ \Rightarrow u = -4V$

- pour $t \in [30\,;40ms]$,

$e = -L\frac{di}{dt} = -\left(50.10^{-3} \times (80)\right) = -4V\ \ et\ \ u = 4V$

d)) <u>Expression de l'énergie emmagasiné dans le solénoïde</u>

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2$$

- pour $t \in [0; 10ms]$ et $t \in [20; 30ms]$,

$E_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2} \times 5.10^{-3} \times 0{,}4^2 = 4 \times 10^{-4}J$

- pour $t \in [10; 20ms]$, $E_m(t) = \frac{1}{2} \times 5.10^{-3} \times (-80t + 1{,}2)^2$

$E_m(t) = 16t^2 - 0{,}48t + 3{,}6 \times 10^{-3}$

- pour $t \in [30; 40ms]$, $E_m(t) = \frac{1}{2}.5.10^{-3}.(80t - 2{,}8\,)^2$

$E_m(t) = 16t^2 - 1{,}12t + 1{,}96 \times 10^{-2}$

<u>*Solution 08*</u>

1. <u>Caractéristique de $\vec{B}$ au centre du solénoïde</u>

- direction : parallèle à l'axe du solénoïde
- sens : de la face sud vers la face nord
- intensité : $B = \mu_0\frac{N}{l}i = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{400\times5}{0{,}4} = 6{,}28 \times 10^{-3}T$

2. a)) <u>Calcul de l'inductance L</u>

$$L = \mu_0\frac{N^2S}{l} \Rightarrow L = 4\pi.10^{-7}.\frac{400^2.10^{-3}}{0{,}4} = 5.10^{-4}H = 50mH$$

b)) <u>Expression de la f.é.m.</u> :

$$e = -L\frac{di}{dt} = -5 \times 10^{-4}(4t - 2) = 2 \times 10^{-3}t - 10^{-3}$$

à $t = 5s$, $e = 2 \times 10^{-3} \times 5 - 10^{-3} = 9 \times 10^{-3}V$

c)) <u>Energie magnétique emmagasinée à t=5s</u>

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2\ or\ à\ t = 5s;\, i = 2 \times 25 - 2 \times 5 = 40A$$

$$soit\ \ E_m = \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-4} \times 40^2 = 0{,}4J$$

3. a)) <u>Expression de la f.é.m. induit</u>

$$e = -L\frac{di}{dt}\,,\qquad avec\ \ i = 2\sqrt{2}\cos(100\pi t)$$

$$e(t) = -5 \times 10^{-4} \times 2\sqrt{2} \times (-100\pi)\sin(100\pi t)$$

$$soit\ \ e(t) = 0{,}44\sin(100\pi t)$$

b)) <u>Valeur efficace de la f.é.m.</u>

$e(t) = e_{max}\sin(100\pi t) = 0{,}44\sin(100\pi t)$

$soit\ \ e_{max} = 0{,}44V\ et\ \ e_{eff} = \frac{e_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}44}{\sqrt{2}} = 0{,}31V$

<u>*Solution 09*</u>

1. <u>Caractéristique de $\vec{B}$ au centre du solénoïde</u>

- direction : parallèle à l'axe du solénoïde
- sens : de la face sud vers la face nord
- intensité : $B = \mu_0\frac{N}{l}i = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{10^3\times200}{1} = 0{,}25T$

2. a)) <u>Expression de l'induction L en fonction de N, l, R</u>

$\Phi_P = NBS\ \ avec\ \ B = \mu_0\frac{N}{l}i\ \ \Rightarrow\ \ \Phi_P = \mu_0\frac{N^2S}{l}i$

- par définition $\Phi_P = Li\ \ \Rightarrow Li = \mu_0\frac{N^2S}{l}i\ \ \ \Rightarrow L = \mu_0\frac{N^2S}{l}$,

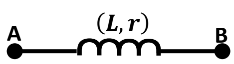
$$Or\ S = \pi R^2\ \ \Rightarrow\ L = \mu_0\frac{N^2\pi R^2}{l}$$

$$A.N: L = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{10^6 \times \pi \times 0{,}2^2}{1} = 0{,}16H$$

b)) Augmenter L, revient à augmenter le nombre de spires N, Car l'espace au milieu des spires s'appelle le noyau. Il peut être vide ou inclure une pièce en matériau ferromagnétique favorisant l'induction électromagnétique, afin d'augmenter la valeur de l'inductance.

c)) <u>Calcul du flux propre</u> : $\Phi_P = Li = 0{,}16 \times 200 = 32Wb$

3. a)) <u>Schéma de la bobine</u>



b)) <u>Expression de la f.é.m. et de la tension u</u>

- pour $t \in [0\,;10s]$, i est une fonction linéaire du temps :

$$i(t) = at\ où\ a = \frac{200}{10} = 20\ \Rightarrow i(t) = 20t\ \ et\ \ \frac{di}{dt} = 20\ ;$$

$$e = -L\frac{di}{dt}\ \ et\ u_{AB}(t) = -e + ri$$

$$e = -0{,}16 \times 20 = -3{,}2V\ \ et\ u_{AB}(t) = 3{,}2 + 200t$$

- pour $t \in [10\,;20s]$, $i = cst = 200A$

$$\Rightarrow\ \ e = 0\ et\ u_{AB} = ri = 2000V$$

- Pour $t \in [20\,;40ms]$, i est une fonction affine du temps :

$$i(t) = at + b$$

$$\begin{cases} t = 20s;\, i = 200A \\ t = 404s;\, i = 0A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 200 = 20a + b \\ 0 = 40a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -10A.s^{-1} \\ b = 400A \end{cases}$$

$$\Rightarrow i(t) = -10t + 400$$

$\frac{di}{dt} = -10\ \Rightarrow e = 0{,}16 \times 10 = 1{,}6V\ \ et$

$$u_{AB}(t) = -1{,}6 + 10(-10t + 400)$$
$$u_{AB}(t) = -100t + 3{,}99 \times 10^3 (V)$$

c)) Energie magnétique maximale

$$E_{max} = \frac{1}{2} L I_{max}{}^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}16 \times 200^2 = 3{,}2 \times 10^3 J$$

Solution 10

1. Expressions de u_{PM} , u_{QM} et u_{ADD}

En tenant compte de l'orientation du courant choisie sur le schéma on a :

$$u_{PM} = u_R + u_L = Ri + ri + L\frac{di}{dt} = (R + r)i + L\frac{di}{dt}$$
$$u_{QM} = u_R + u_{R_0} = -Ri - R_0 i = -(R + R_0)i$$
$$u_{ADD} = u_{PM} + u_{QM} \Rightarrow u_{ADD} = (r - R_0)i + L\frac{di}{dt}$$

2. Montrons qu'il existe une valeur R_0 tel que $u_{ADD} = L\frac{di}{dt}$

On a : $u_{ADD} = (r - R_0)i + L\frac{di}{dt}$

$$u_{ADD} = L\frac{di}{dt} \Leftrightarrow r - R_0 = 0 \Rightarrow R_0 = r$$

3. a)) Justification de la forme graphiques de u_{ADD}

On a: $u_{QM}(t)$est périodique triangulaire. Comme $u_{QM}(t)$ est proportionnelle à i(t) donc i(t) est périodique triangulaire.

Par conséquent $\frac{di}{dt}$ est périodique et en créneaux.

Or $u_{ADD} = L\frac{di}{dt}$, alors u_{ADD} est périodique et en créneau (car u_{ADD} est bien proportionnelle à $\frac{di}{dt}$).

b)) Valeur de la période T et de la fréquence N

La période de i(t) est égale à celle de u_{QM} :

$T = 6 \times 0{,}2 = 1{,}2ms = 1{,}2 \times 10^{-3}s$

Fréquence N : $N = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}2\times10^{-3}} = 833{,}33Hz$

c)) Montrons que $u_{ADD} = -\frac{L}{R+R_0}\frac{du_{QM}}{dt}$

$$On\ a :\ u_{ADD} = L\frac{di}{dt} \quad et\ u_{QM} = -(R + R_0)i \Rightarrow i = -\frac{u_{QM}}{R + R_0}$$
$$soit\quad u_{ADD} = L\frac{d}{dt}\left(-\frac{u_{QM}}{R + R_0}\right) = -\frac{L}{R + R_0}\frac{du_{QM}}{dt}$$

Calcul de L

$$u_{ADD} = -\frac{L}{R + R_0}\frac{du_{QM}}{dt} \Rightarrow L = -\frac{u_{ADD} \times (R + R_0)}{\frac{du_{QM}}{dt}}$$

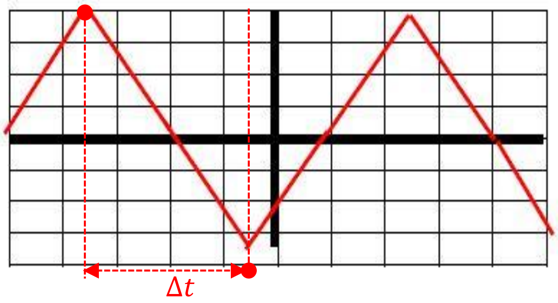
D'après la courbe (1) :

Dans l'intervalle Δt :

$$\Delta u_{QM} = -7 \times 1 = -7V \quad et\ \Delta t = 3 \times 0{,}2 = 0{,}6ms = 6.10^{-4}s$$
$$\frac{du_{QM}}{dt} = \frac{\Delta u_{QM}}{\Delta t} = \frac{-7}{6.10^{-4}} = -1{,}17 \times 10^4$$

Ceci correspond à $u_{ADD} = 2V$

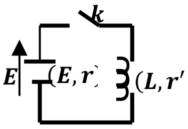
$$L = -\frac{2(100 + 9)}{-1{,}17 \times 10^4} = 1{,}86 \times 10^{-2}H$$



Solutions sur le Dipôle (R.L)

Solution 1

1. Schéma du montage



2. a)) Relation liant i et $\frac{di}{dt}$

$$On\ a: E - ri = u_L = -e + r'i = L\frac{di}{dt} + r'i \Rightarrow$$

$$E = L\frac{di}{dt} + (r + r')i\ \ , en\ posant\ R = r + r',$$

$$on\ a: E = L\frac{di}{dt} + Ri \Rightarrow \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}\ (1)$$

b)) Intensité du courant en régime permanent :

En régime permanent, $\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{E}{R}$

3. Constante du temps $\tau = \frac{L}{R}$:est le temps au bout du quel l'intensité du courant atteint 63% de sa valeur maximale

4. a)) Valeur de la résistance totale du circuit

La courbe donne : $I_{max} = 50A\ soit$

$$I_0 = I_{max} = \frac{E}{R} \Rightarrow R = \frac{E}{I_0} = \frac{6}{50} = 0{,}12\Omega$$

b)) D'après la courbe, la constante du temps vaut : $\tau = 5s$

Valeur de l'inductance L :

$$\tau = \frac{L}{R}\ \ \Rightarrow L = \tau R = 5 \times 0{,}12 = 0{,}6H$$

Solution 2

A. 1. Rôle de l'interrupteur k

L'interrupteur K permet :

soit de relier R_1 et L à une source de courant continue de force électromotrice E, soit de les mettre en court-circuit

2. Le phénomène physique produit dans le circuit est le phénomène d'auto-induction, car lorsqu'on baisse l'interrupteur K à la position 1, une f.é.m. d'auto-induction apparait dans le circuit et conformément à la loi de Lenz, cette force s'oppose à l'augmentation du courant dans le circuit.

De ce fait le courant ne s'établit pas instantanément.

3. Expression de R

$$\tau = \frac{L}{R}\ , R = resistance\ totale\ du\ circuit\ \ \Rightarrow R = R_1 + R_2 + r$$

- En régime permanent : $I_0 = \frac{E}{R} \Rightarrow R = \frac{E}{I_0} = \frac{12}{1{,}5} = 8\Omega$

- valeur du constante du temps :

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0{,}04}{8} = 5 \times 10^{-3}s = 5ms$$

4. a)) Equation différentielle liant R, E, et i

En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$E - ri = u_L + u_{R1},\qquad avec\ u_L = L\frac{di}{dt} + R_2 i\ \ et\ u_{R1} = R_1 i$$

$$E - ri = L\frac{di}{dt} + R_2 i + R_1 i\ \ \Rightarrow E = L\frac{di}{dt} + (R_2 + R_1 + r)i$$

$$\Rightarrow E = L\frac{di}{dt} + Ri \Rightarrow \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}\ (1)$$

b)) Détermination des constantes α, k, β

$$i(t) = \alpha e^{-kt} + \beta \Rightarrow \frac{di}{dt} = -k\alpha e^{-kt}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{R}(-k\alpha e^{-kt}) + \alpha e^{-kt} + \beta = \frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow \alpha e^{-kt}\left(1 - \frac{kL}{R}\right) + \left(\beta - \frac{E}{R}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha e^{-kt}\left(1 - \frac{kL}{R}\right) = 0\ et\ \beta - \frac{E}{R} = 0$$

$$\alpha e^{-kt} \neq 0 \Rightarrow 1 - \frac{kL}{R} = 0\ et\ \beta - \frac{E}{R} = 0\ \Rightarrow k = \frac{R}{L}\ et\ \beta = \frac{E}{R}$$

Condition initiale : A t=0,

$$i(t=0) = \alpha + \beta = 0 \Rightarrow\ \alpha = -\beta = -\frac{E}{R}$$

$$d'où:\ i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}}\right) = I_{max}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

c)) Expression de $u_{AB}(t)$

$$U_{AB}(t) = L\frac{di}{dt} + R_2 i = L\left(\frac{R}{L}\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + R_2 \times \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\Rightarrow\ \ U_{AB}(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_2 E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$soit\ \ U_{AB}(t) = E\left(1 - \frac{R_2}{R}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_2 E}{R}$$

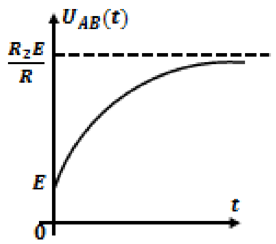
En régime permanent :

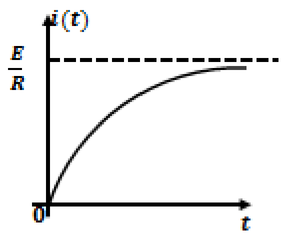
$$U_{AB} = \frac{R_2 E}{R}\ \ car\ \lim_{t\to\infty} E\left(1 - \frac{R_2}{R}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

Influence de la bobine :

la bobine s'oppose à l'établissement du courant dans le circuit électrique.

d)) Allure des courbes $u_{AB}(t)$ et $i(t)$





- On remarque que le courant électrique ne s'établit pas instantanément,
- La bobine s'oppose à l'établissement du courant dans le circuit, elle s'oppose à l'augmentation de l'intensité du courant dans le circuit.
- Elle s'oppose à la variation de l'intensité du courant dans le circuit.

B. 1. Equation différentielle liant R, L, i

Lorsqu'on met l'inverseur en position 2, on court-circuite R_1 et L.

En appliquant la loi de mailles:

$$U_L + U_{R1} = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt} + R_2 i + R_1 i = 0$$

$$\Rightarrow\ L\frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)i = 0\ \ :\ En\ posant:\ R' = R_1 + R_2$$

$$\Rightarrow L\frac{di}{dt} + R'i = 0 \Rightarrow \frac{L}{R'}\frac{di}{dt} + i = 0$$

2. Détermination de A et β

$$L\frac{di}{dt}+R'i=0\Rightarrow\frac{di}{dt}=-\frac{R'}{L}i\Rightarrow\frac{di}{i}=-\frac{R'}{L}dt\Rightarrow$$

$$\int\frac{di}{i}=-\frac{R'}{L}\int dt\Rightarrow\ln i=-\frac{R'}{L}t+cste$$

à $t=0,\ln I_0=cste\Rightarrow\ln i=-\frac{R'}{L}t+\ln I_0$

$$\Rightarrow\ln i-\ln I_0=-\frac{R'}{L}t\Rightarrow\ln\left(\frac{i}{I_0}\right)=-\frac{R'}{L}t\ \Rightarrow\frac{i}{I_0}=e^{-\frac{R'}{L}t}$$

$soit\ i(t)=I_0e^{-\frac{R'}{L}t}=\frac{E}{R'}e^{-\frac{R'}{L}t}$; $d'où$: $A=\frac{E}{R'}$ et $\beta=\frac{R'}{L}$

3. Expression de u_{AB}(t)

$$U_{AB}(t)=L\frac{di}{dt}+R_2i=-L\left(\frac{R'}{L}\frac{E}{R'}e^{-\frac{R'}{L}t}\right)+R_2\times\frac{E}{R'}e^{-\frac{R'}{L}t}$$

$$U_{AB}(t)=-Ee^{-\frac{R'}{L}t}+\frac{R_2E}{R'}e^{-\frac{R'}{L}t}=E\left(\frac{R_2}{R'}-1\right)e^{-\frac{R'}{L}t}$$

4. a)) Variation du flux dan le circuit

$$\Delta\Phi=\Phi_f-\Phi_0=-\Phi_0=LI_0\,,car\ \Phi_f=0\Rightarrow\Delta\Phi=-\frac{LE}{R'}$$

$$\Delta\Phi=-\frac{LE}{R_1+R_2}=-\frac{40\times10^{-3}\times12}{2+4}=-0{,}08Wb$$

b)) Valeur moyenne de la force électromotrice :

$$e_{moy}=-\frac{\Delta\Phi}{dt}=\frac{0{,}08}{0{,}02}=4V$$

Solution 3

1. a)) Description du comportement du circuit

En fermant l'interrupteur K, le courant qui traverse la résistance R commence à augmenter :

- En absence de la bobine, le courant atteint rapidement sa valeur d'équilibre $I_0=\frac{E}{R}$
- Toutefois, en présence de la bobine, une f.é.m. d'auto-induction apparait dans le circuit et conformément à la loi de Lenz, cette f.é.m. s'oppose à l'augmentation du courant.

De ce fait, le courant ne s'établit pas instantanément.

Le phénomène responsable est le phénomène d'auto-induction.

b)) Equation différentielle liant l'intensité i du courant

En appliquant la loi des mailles au courant :

$$E=u_L+u_R,\qquad avec\ u_L=L\frac{di}{dt}\ \ et\ u_R=Ri$$

$$E=L\frac{di}{dt}i+Ri\ \Rightarrow E=L\frac{di}{dt}+Ri\Rightarrow\frac{L}{R}\frac{di}{dt}+i=\frac{E}{R}\ (1)$$

- Vérifions que $i=\frac{U}{R}\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$est solution de (1)

$$\frac{di}{dt}=\frac{U}{R}\times\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{U}{R}\times\frac{R}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{U}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow\ L\times\frac{U}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{U}{R}-Ue^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{U}{R}\ soit\ \ \frac{E}{R}\ =\frac{E}{R}$$

Alors $i=\frac{U}{R}\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$ est solution de l'équation (1)

- Calcul de la constante du temps :

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{0{,}03}{4}=7{,}5\times10^{-3}s=7{,}5ms$$

2. a)) Expression de U_R et U_L

$$U_R=Ri=R\times\frac{U}{R}\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)=U\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\quad et$$

$$U_L=L\frac{di}{dt}=L\times\frac{U}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}=Ue^{-\frac{t}{\tau}}$$

b)) Valeur de l'intensité i du courant aux dates suivantes

$-A\ t=0,i=0,$ à $t=0{,}5s,i=\frac{20}{4}\left(1-e^{-\frac{0{,}5}{7{,}5\times10^{-3}}}\right)=4{,}993A$

$-\ pour\ t=\tau,i=5(1-e^{-1})=3{,}16A$

$-$pour $t=5\tau,i=5(1-e^{-5})=4{,}966A$

- En régime permanent : $I=\frac{U}{R}=\frac{20}{4}=5A$
- Détermination du temps t pour $U_L=U_R$

$$U_L=U_R\Rightarrow\ U\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)=Ue^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow U=2Ue^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$Soit\ \ e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{1}{2}\Rightarrow e^{\frac{t}{\tau}}=2\Rightarrow\frac{t}{\tau}=\ln2$$

$$\Rightarrow t=\tau\ln2=7{,}5\times10^{-3}\ln2$$

$$soit\ \ t=5{,}2\times10^{-3}s=5{,}2ms\ \ et\ \ U_L=U_R=\frac{U}{2}=\frac{20}{2}=10V$$

3. Energie stockée dans la bobine :

$$E_m=\frac{1}{2}LI^2$$

- A t = 0, i = 0 et en régime permanent : $I=\frac{U}{R}=\frac{20}{4}=5A$
- A t = 0, $E_m=0$ et en régime permanent :

$$E_m=\frac{1}{2}0{,}03\times5^2=0{,}375J$$

Solution 4

1. Il faut attendre un certain temps avant d'ouvrir l'interrupteur K car en présence de la bobine, une f.é.m. d'auto-induction apparait dans le circuit et conformément à la loi de Lenz, cette f.é.m. s'oppose à l'augmentation du courant.
De ce fait, le courant ne s'établit pas instantanément.
2. Expression de : $U_{L,r}U_{L,r}=-e+ri=L\frac{di}{dt}+ri$
3. Equation différentielle liant l'intensité du courant

En appliquant la loi des mailles au courant :

$$u_{L,r}+u_{r'}=0\ \ ,avec\ \ u_{L,r}=L\frac{di}{dt}+ri\ et\ u_{r'}=r'i$$

$$L\frac{di}{dt}+ri+r'i=0\ \Rightarrow L\frac{di}{dt}+(r+r')i=0$$

$$en\ posans\ R=r+r'\ \ \Rightarrow\ \ \frac{L}{R}\frac{di}{dt}+i=0\ (1)$$

4. Expression des constantes A et K

On a : $i=Ae^{-kt}\Rightarrow\frac{di}{dt}=-Ake^{-kt},\ dans\ (1):$

$$-\frac{AL}{R}ke^{-kt}+Ae^{-kt}=0\Rightarrow A\left(1-\frac{Lk}{R}\right)e^{-kt}=0$$

$$\Rightarrow\ Ae^{-kt}\neq0\Rightarrow1-\frac{kL}{R}=0\Rightarrow k=\frac{R}{L}$$

Condition initiale : $à\ t=0,\ U_0=E\ \ et\ i=I_0$

$$i(t=0)=I_0=A\Rightarrow A=I_0=\frac{E}{R}$$

5. a)) Expression de i(t) en fonction de I_0 et τ

$$i(t) = Ae^{-kt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\ , or\ \tau = \frac{L}{R}\ et\ I_0 = \frac{E}{R} \Rightarrow i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

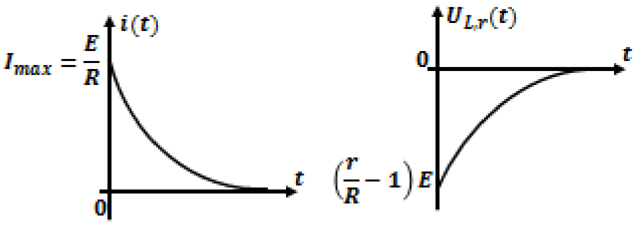
b)) Expression de $U_{L,r}$

$$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_{L,r} = L\frac{di}{dt} + ri\ , avec\ \frac{di}{dt} = -\frac{E}{R}\times\frac{R}{L}e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_{L,r} = L\times -\frac{E}{L}e^{-\frac{t}{\tau}} + r\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \left(\frac{r}{R}-1\right)Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Représentation graphique de i(t) et $U_{L,r}$



Solution 5

I. 1. Phénomène physique responsable du retard.

Explication brève

Il s'agit d'un phénomène d'auto-induction : lorsqu'on ferme l'interrupteur pour établir le courant électrique dans le circuit, il se produit une variation du flux à travers la bobine, entrainant une f.é.m. d'auto-induction qui tend à s'opposer à la cause qui lui donne naissance (Loi de Lenz).

2. Equation différentielle de l'évolution de i_1 :

Appliquons la loi d'additivité des tensions :

$$E - u_L - u_R - u_r\ \ avec\ u_L = L\frac{di_1}{dt}\ \ , u_R = Ri_1,\ \ u_r = ri_1$$

$$E - L\frac{di_1}{dt} - Ri_1 - ri_1 = 0 \Rightarrow \frac{di_1}{dt} + \frac{(R+r)}{L}i_1 = \frac{E}{L}$$

3. Valeur du courant I_0

Après un temps suffisamment long, le régime permanent est établi. Le courant traversant le circuit devient constant $\left(\frac{di_1}{dt} = 0\right)$ et a pour valeur I_0 . En remplaçant i_1 par I_0 dans l'équation différentielle établi précédemment on obtient :

$$\frac{(R+r)}{L}I_0 = \frac{E}{L}\ \ soit\ \ I_0 = \frac{E}{R+r} \Rightarrow I_0 = \frac{12}{40+10} = 0{,}24A$$

4. a)) Détermination de τ en f(L,r,R)

La solution de l'équation différentielle a pour expression

$$i_1 = I_0(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

Pour trouver l'expression de la constante de temps τ , nous allons remplacer i_1 par son expression dans l'équation différentielle établie précédemment.

$$\frac{d}{dt}\left[I_0(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})\right] + \frac{(R+r)}{L}I_0\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) = \frac{E}{L}$$

$$\frac{I_0}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{(R+r)}{L}I_0\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) = \frac{E}{L}\quad Or\ \ I_0 = \frac{E}{R+r}$$

$$\Rightarrow \frac{E}{R+r}\frac{1}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{(R+r)}{L}\frac{E}{R+r}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) = \frac{E}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R+r}\frac{1}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}} - \frac{1}{L}e^{\frac{-t}{\tau}} = 0 \Rightarrow e^{\frac{-t}{\tau}}\left[\frac{1}{(R+r)\tau} - \frac{1}{L}\right] = 0$$

$$Or\ \ e^{\frac{-t}{\tau}} \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{(R+r)\tau} - \frac{1}{L} = 0\ \ soit\ \ \tau = \frac{L}{R+r}$$

$$A.N: \tau = \frac{40.10^{-3}}{40+10} = 8.10^{-4}s$$

b)) Signification physique de τ :

τ est la constante de temps du circuit. C'est la durée au bout de laquelle l'intensité i_1 vaut 63% de sa valeur en régime permanent. Elle caractérise aussi la rapidité de l'établissement du courant. D'autant que cette constante est grande d'autant que le régime permanent est atteint rapidement.

5.a)) Expression de e_1

L'auto-induction est la propriété électromagnétique qu'à un conducteur parcouru par un courant électrique, de s'opposer aux variations de celui-ci. L'expression d'auto-induction est :

$$e_1 = L\frac{di_1}{dt} = -L\frac{d}{dt}\left[I_0\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right] = -LI_0\frac{1}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$Or\ \ I_0 = \frac{E}{R+r}\quad et\ \ \tau = \frac{L}{R+r}$$

$$\Rightarrow e_1 = -L\frac{E}{R+r}.\frac{R+r}{L}e^{\frac{-t}{\tau}}\quad soit\ e_1 = -Ee^{\frac{-t}{\tau}}$$

b)) Valeur algébrique de e_1 à $t_0 = 0$

$$A\ t_0 = 0:\ e_1 = -Ee^{o} = -12V$$

II. 1. Sens de i_2

Dans un circuit inductif, l'intensité ne varie jamais de façon discontinue. La bobine est donc parcourue par un courant d'intensité i_2 de même sens que celui de i_1.

2. Equation différentielle de l'évolution de i_1 :

Appliquons la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R + u_r\ \ avec\ u_L = L\frac{di_2}{dt}\ \ , u_R = Ri_2,\ \ u_r = ri_2$$

$$L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 + ri_2 = 0 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} + \frac{(R+r)}{L}i_2 = 0$$

3. Vérifions que $i_2 = I_0e^{\frac{-t}{\tau}}$ est de cette équation

$$i_2 = I_0e^{\frac{-t}{\tau}}\quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(I_0e^{\frac{-t}{\tau}}\right) + \frac{(R+r)}{L}I_0e^{\frac{-t}{\tau}} = 0$$

$$-\frac{I_0}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{(R+r)}{L}I_0e^{\frac{-t}{\tau}} = 0$$

$$avec\ \ I_0 = \frac{E}{R+r}\quad et\ \ \tau = \frac{L}{R+r}$$

$$-\left(\frac{E}{R+r}\right)\left(\frac{R+r}{L}\right)e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{(R+r)}{L}\left(\frac{E}{R+r}\right)e^{\frac{-t}{\tau}} = 0$$

$$e^{\frac{-t}{\tau}}\left(-\frac{E}{L} + \frac{E}{L}\right) = 0 \Rightarrow e^{\frac{-t}{\tau}}(0) = 0$$

Donc i_2 est la solution de l'équation différentielle établie à la question 2.

4. Valeur algébrique de e_2

La f.é.m. d'auto-induction :

$$e_2 = L\frac{di_2}{dt} = -L\frac{d}{dt}\left[I_0\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right] = LI_0\frac{1}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$\Longrightarrow e_2 = L\frac{E}{R+r}.\frac{R+r}{L}e^{\frac{-t}{\tau}} \quad soit\ e_2 = Ee^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$A\ t_0 = 0:\ e_2 = Ee^0 = 12V$$

III. Interprétation

On remarque que $e_1 = -e_2$

La f.é.m. d'auto-induction s'oppose à la variation du courant dans le circuit. Ainsi lors de l'établissement du courant (i_1 augmente), $e_1 = -12V < 0$.

La bobine se comporte comme un générateur en opposition.

Lors de l'annulation du courant (i_2 diminue), $e_2 = 12V > 0$.

La bobine se comporte comme un générateur.

Solutions sur le dipôle RC

Solution 01

I. 1. a)) Equation différentielle U_{DC}

En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$E = U_{DC} + U_R \text{ , or } U_R = Ri \text{ avec } i = \frac{dq}{dt} \text{ et } q = CU_{DC}$$

$$\Rightarrow i = C\frac{dU_{DC}}{dt} \quad soit \quad \frac{dU_{DC}}{dt} + \frac{1}{RC}U_{DC} = \frac{E}{RC} (1)$$

b)) Détermination de A, B et β

$$\frac{dU_{DC}}{dt} = -\beta Be^{-\beta t} \text{ , dans (1) :}$$

$$E = A + \beta Be^{-\beta t} - RC\beta Be^{-\beta t} \Rightarrow$$

$$(-E + A) + (1 - \beta RC)Be^{-\beta t} = 0 \Leftrightarrow A - E = 0 \text{ et } (1 - \beta RC) = 0$$

$$car \;\; Be^{-\beta t} \neq 0 \text{ , } A = E \text{ et} 1 - \beta RC = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{RC}$$

A t=0, $U_{DC} = A + B = 0 \Rightarrow B = -A = -E$

$$U_{DC}(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

c)) - La constante du temps τ du dipôle RC est le produit de la résistance R par la capacité du condensateur C :

$$\tau = RC = 10^4 \times 100 \times 10^{-9} = 10^{-3}s = 1ms$$

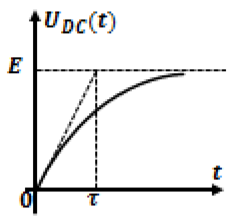
- La constante du temps τ représente le temps nécessaire pour que le condensateur atteint 63% de sa charge totale.

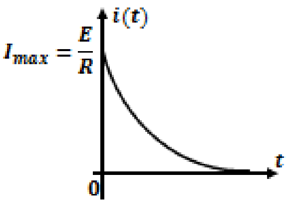
2. a)) Expression de i (t) en fonction du I_0 et τ

$$i = C\frac{dU_{DC}}{dt} = C \times \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$avec \; RC = \tau \;\; et \; I_0 = \frac{E}{R} \;\; ; soit \;\; i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

b)) Représentation graphique de $U_{DC}(t)$ et i(t)





3. L'énergie emmagasinée dans le condensateur est dissipée par l'effet joule à travers la résistance ohmique R :

$$E_e = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-9} \times 5^2 = 1{,}25 \times 10^{-6}J$$

II. 1. Equation différentielle liant U_{DC} à la décharge

$$U_{DC} = U_R = Ri \;\; avec \; i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{dU_{DC}}{dt}$$

$$et \;\; U_{DC} = -RC\frac{dU_{DC}}{dt} \Rightarrow RC\frac{dU_{DC}}{dt} + U_{DC} = 0$$

2. a)) Détermination des constantes A et τ

$$RC\frac{dU_{DC}}{dt} = -U_{DC} \;\Rightarrow RCdU_{DC} = -U_{DC}dt \Rightarrow \frac{dU_{DC}}{U_{DC}} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$\int \frac{dU_{DC}}{U_{DC}} = -\frac{1}{RC}dt \;\Rightarrow \ln U_{DC} = -\frac{t}{RC} + cste$$

$$\text{à } t = 0, U_0 = E \;\Rightarrow \ln E = cste \;\Rightarrow \; \ln U_{DC} = -\frac{t}{RC} + \ln E \;\Rightarrow$$

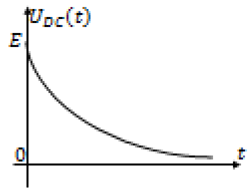
$$\ln U_{DC} - \ln E = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \ln \frac{U_{DC}}{E} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{U_{DC}}{E} = e^{-\frac{t}{RC}} \;\; \Rightarrow$$

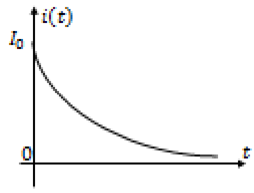
$$soit \;\; U_{DC}(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow A = E \;\; et \;\; \tau = RC$$

b)) Expression de i(t) en fonction de I_0 et τ

$$i = -C\frac{dU_{DC}}{dt} = -CE\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

c)) Allure des courbes $U_{DC}(t)$ et i





Solution 02

1. a)) Charge initiale Q_0

$$Q_0 = CU = CE = 200 \times 10^{-6} \times 6 = 1{,}2 \times 10^{-3}C$$

b)) Energie initiale emmagasinée

$$E_0 = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times 10^{-6} \times 6^2 = 3{,}6 \times 10^{-3}J$$

2. a)) Relation entre U_C et U_R et i et U_C $\quad U_C = U_R = Ri$

b)) Equation différentielle liant $U_C(t)$

$$U_C = Ri \;\; avec \; i = -\frac{dq}{dt} \;\; \text{où} \;\; q = CU_C \Rightarrow i = -C\frac{dU_C}{dt}$$

$$\Rightarrow U_C = -RC\frac{dU_C}{dt} \Rightarrow RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0 \;\; (1) \; Soit \; U_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

solution de l'équation (1)

- Détermination de A et τ

$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow -RC \times \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \Rightarrow$$

$$A\left(1 - \frac{RC}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \;\; or \; Ae^{-\frac{t}{\tau}} \neq 0 \Rightarrow 1 - \frac{RC}{\tau} \;\Rightarrow \; \tau = RC$$

Condition initiale : *à t=0,* $U_C(t = 0) = A = U_0 = E$

$$et \; U_C(t = 0) = A = U_0 = E \Rightarrow U_C(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

c)) Calcul du τ : $\tau = RC = 2000 \times 200 \times 10^{-6} = 0{,}4s$

- Expression de i(t) en fonction de t, R, C, E

$$i(t) = -C\frac{dU_C}{dt} = -C\left(-\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

d)) A t=0, $I_0 = \frac{E}{R} = \frac{6}{2000} = 3 \times 10^{-3}s = 3mA$

3. a)) Limites de u_C et i si $t \to \infty$: si $t \to \infty$: $u_C = 0$ et $i = 0$

b)) Allures des courbes $u_C(t)$ et i(t)

Voir la solution 2

Solution 03

1. a)) *Tension de* U_{AB} : $U_{AB} = E = 15V$

charge du condensateur *:*

$$Q = CU_{AB} = 47 \times 10^{-6} \times 15 = 7{,}05 \times 10^{-4}C$$

b)) Energie emmagasiné dans le condensateur

$$E_C = \frac{1}{2}C{U_{AB}}^2 = \frac{1}{2} \times 47 \times 10^{-6} \times 15^2 = 5{,}29 \times 10^{-3}J$$

c)) Valeur de la résistance R *:*En régime permanent *:*

$$I_0 = \frac{E}{R} \Rightarrow R = \frac{E}{I_0} = \frac{15}{30 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^5\Omega$$

2. a))) Equation différentielle liant la charge q_A

$$U_{AB} = Ri \;\; avec\; i = -\frac{dq_A}{dt} \;\; \text{où} \;\; q_A = CU_{AB} \Rightarrow U_{AB} = \frac{q_A}{C} \Rightarrow$$

$$U_{AB} = \frac{q_A}{C} = Ri = -R\frac{dq_A}{dt} \Rightarrow RC\frac{dq_A}{dt} + q_C = 0$$

$$soit \;\; \frac{dq_A}{dt} + \frac{1}{RC}q_A = 0$$

b)) Solution de l'équation différentielle

$$RC\frac{dq_A}{dt} = -q_A \Rightarrow RCdq_A = -q_A dt \Rightarrow$$

$$\frac{dq_A}{q_A} = -\frac{1}{RC}dt \Rightarrow \int \frac{dq_A}{q_A} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$\Rightarrow \ln q_A = -\frac{t}{RC} + cste\,; \;\; \text{à } t = 0, q_A = Q \;\Rightarrow \ln Q = cste$$

$$\Rightarrow \ln q_A = -\frac{t}{RC} + \ln Q$$

$$\ln q_A - \ln Q = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \ln\frac{q_A}{Q} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{q_A}{Q} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Rightarrow q_A(t) = Qe^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow K = Q \;\; et \;\; \beta = \frac{1}{RC}$$

c)) Expression de $U_{AB}(t)$:

$$U_{AB} = \frac{q_A}{C} = \frac{Q}{C}e^{-\frac{t}{RC}}$$

d)) Valeur numérique de la résistance R

$$U_{AB} = 1 = \frac{Q}{C}e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \frac{C}{Q} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow e^{\frac{t}{RC}} = \frac{Q}{C}$$

$$e^{\frac{t}{RC}} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{t}{RC} = ln\left(\frac{Q}{C}\right) \Rightarrow R = \frac{t}{C\,ln\left(\frac{Q}{C}\right)}$$

$$A.N: R = \frac{60}{47\times10^{-6}\ln\left(\frac{7{,}05\times10^{-4}}{47\times10^{-6}}\right)} = 4{,}7\times10^{5}\Omega$$

e)) Expression de i(t)

$$i = -\frac{dq_A}{dt} = -Q\times -\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

En régime permanent : $I_{max} = \frac{Q}{RC}$

Solution 4

1. a)) position 1 : charge du condensateur position , le condensateur se charge grâce au générateur

position 2 :décharge du condensateur dans R , le condensateur libère l'énergie qu'il a emmagasinée.

b)) Figure 1 : charge du condensateur : la tension aux bornes du condensateur augmente au cours du temps.

Figure 2 : décharge du condensateur dans R : la tension aux bornes du condensateur diminue au cours du temps.

2. a)) Charge $Q = I.t = 10.10^{-6}.40 = 4.10^{-4}C$

b)) Energie emmagasinée: Pour t=40s , U=4V

$$E_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU \;\; soit \; E_e = \frac{1}{2}\times 4.10^{-4}\times 4 = 8.10^{-4}J$$

Car le U correspond à U_{max} que l'on peut lire sur la courbe de la décharge : à $t = 0, U = U_{max} = 4V$ à t=0 U=U_{max}=4V

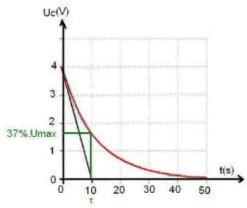
c)) Valeur du condensateur C

$$Q = UC \; soit \;\; C = \frac{Q}{U} = \frac{4.10^{-4}}{4} = 10^{-4}F$$

3. a)) Méthode pour déterminer τ:

- *La Méthode de tangente sur la courbe de décharge*

Abscisse de la tangente à t = 0 :



$\tau = 10s$, abscisse du point correspondant à :

$$U_C = 37\%.U_{max} = 1{,}48V$$

- *Méthode numérique*

$$\tau = RC \;\; or\; I_0 = \frac{U}{R} \; soit \; R = \frac{U}{I_0}$$

$$\tau = \frac{UC}{I_0} = \frac{Q}{I_0} = \frac{10^{-4}}{10.10^{-6}} = 10s$$

b)) Valeur de la résistance R

$$\tau = RC \;\; soit \; R = \frac{\tau}{C} = \frac{10}{10^{-4}} = 10^{5}\Omega$$

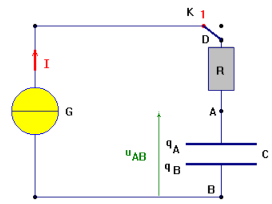
c)) Energie dissipée par l'effet joule

$$E_{dissip} = RI^2 = 10^5.(10.10^{-6})^2 = 10^{-5}J$$

Solution 5

1.a)) Calcul de la charge acculée sur les armatures

Schéma :



$$On\; a : Q = I.t = 0{,}60\times10^{-6}.3{,}5$$

$$Q = 2{,}1.10^{-6}C = 2{,}1\mu C$$

- Charge accumulée sur l'armature positive est : $q_A = 2{,}1\mu C$

- Charge accumulée sur l'armature négative est : $q_B = -2{,}1\mu C$

À chaque instant : $q_A = -q_B = 2{,}1\mu C$

b)) Valeur de la tension aux bornes du condensateur

$$U_{AB} = \frac{Q}{C} = \frac{2{,}1.10^{-6}}{0{,}5\times10^{-6}} = 4{,}2V$$

c)) Valeur de la résistance R

En régime permanant $I = \frac{U}{R}$ $soit \;\; R = \frac{U}{I} = \frac{4{,}2}{0{,}60\times10^{-6}} = 7\times10^{6}\Omega$

2. Equation différentielle liant la charge q

En appliquant la loi d'additivité de tensions on a :

$$E = U_R + U_{AB} \;\; avec\; U_R = Ri \;\; avec\; i = \frac{dq}{dt} \;\; soit \;\; U_R = R\frac{dq}{dt}$$

$$et \;\; q = CU_{AB} \Rightarrow U_{AB} = \frac{q}{C} \;\Rightarrow\; E = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$soit \;\; \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R} \;\; ou \;\; EC = RC\frac{dq}{dt} + q$$

3. Soit $q(t) = CU\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = CU - CUe^{-\frac{t}{\tau}}$

a)) Vérifions que q(t) est solution de l'équation différentielle

$\frac{dq}{dt} = \frac{CU}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$: remplaçons $\frac{dq}{dt}$ *et* q dans l'équation différentielle

$$UC = RC\frac{CU}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + CU - CUe^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{RC}{\tau} - 1\right) = 0$$

$$Or\ e^{-\frac{t}{\tau}} \neq 0 \Longrightarrow \frac{RC}{\tau} - 1 = 0\ \ soit\ \tau = RC$$

On retrouve la constante du temps caractéristique du circuit RC.

D'où la solution proposée est bien solution de l'équation différentielle .

b)) <u>Signification des terme de la solution</u>

- q(t) charge du condensateur en Coulomb (C)
- U constante qui présente la valeur de l'échelon de tension en volt(V).
- Temps t en seconde (s)
- Constante de temps du circuit RC τ en seconde (s).
- Capacité du condensateur C en Faraday (F)

c)) <u>Valeur de q(t)</u> à t = 0 s ? Lorsque t ⟶ ∞ et état du condensateur :

$$q(0) = CU\left(1 - e^{-\frac{0}{\tau}}\right) = CU(1-1) = 0$$

$$q(\infty) = CU\left(1 - e^{-\frac{\infty}{\tau}}\right) = CU(1-0) = CU$$

Lorsque l'on ferme l'interrupteur K au temps t = 0 s, le condensateur se charge.

d)) Expressions de u(t) et de i(t)

$$q = Cu\ soit\ u(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \times CU\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left[CU\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right] = \frac{CU}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{CU}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

e)) <u>Valeur de l'intensité en régime permanent</u>

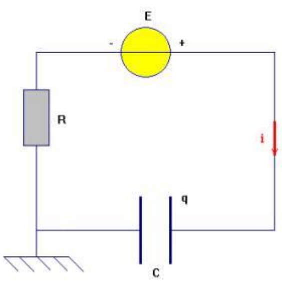
Valeur de l'intensité en régime permanent : c'est-à-dire lorsque le régime permanent est atteint.

Dans l'expression trouvée précédemment, on fait tendre le temps t vers l'infini : $i(\infty) = \frac{U}{R}e^{-\frac{\infty}{\tau}} = 0$

En conséquence, lorsque le condensateur est chargé, l'intensité du courant électrique dans le circuit est nulle.

<u>Solution 6</u>

1. <u>Tension qui permet de connaître les variations de l'intensité du courant en fonction du temps et justification</u>



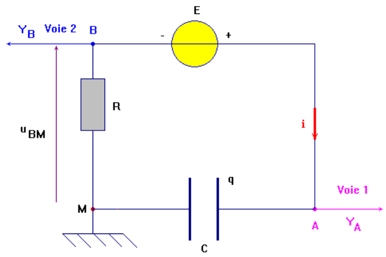
Avec l'orientation choisie, on peut écrire la loi d'Ohm aux bornes du conducteur ohmique : $u_{MB} = u_R = Ri$

La tension aux bornes du conducteur ohmique de résistance R permet de visualiser les variations de l'intensité du courant en fonction du temps ceci à une constante près : $i = \frac{1}{R}u_R$

2. <u>Identification des deux courbes</u>

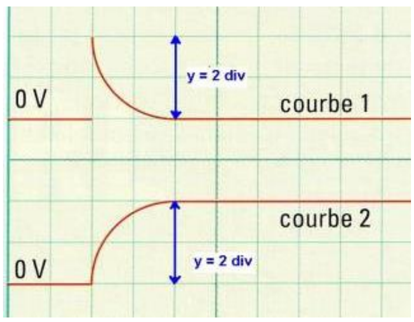
- La courbe 1: visualise les variations de la tension u R en fonction du temps (c'est-à-dire les variations de i en fonction du temps).
- La courbe 2 : visualise les variations de la tension u du condensateur C en fonction du temps.
- Lorsque l'on charge un condensateur avec un échelon de tension, l'intensité dans le circuit diminue et s'annule lorsque le condensateur est chargé.
- La tension aux bornes du condensateur augmente et devient maximale et égale à E lorsque le condensateur est chargé.

b)) <u>Circuit et connexions à réaliser avec l'oscilloscope</u>



- À la voie 1 (Y_A) de l'oscilloscope, on visualise la tension u_{AM}.
  C'est la tension aux bornes du condensateur de capacité C.
  Avec l'orientation choisie : , on visualise aussi les variations de la charge q en fonction du temps ceci à une constante près.
- À la voie 2 (Y_B) de l'oscilloscope, on visualise la tension u_{BM}.
  Avec l'orientation choisie : $u_{MB} = -u_R = -Ri$.
  Pour visualiser les variations de i, à une constante près, il faut appuyer sur la touche – B ou B « inversée ».
  Cela revient à visualiser : $u_{MB} = -u_{BM} = Ri$.

c)) <u>Déterminer à l'aide de l'oscillogramme</u>



-Tension E entre les bornes du générateur :

$$u_{AM\,(\max)} = E = ky = 2 \times 2 = 4V$$

- La valeur maximale I_{max} de l'intensité du courant qu'il débite :

$$u_{MB(\max)} = RI_{max} = ky\ soit\ I_{max} = \frac{ky}{R} = \frac{2 \times 2}{200} = 20mA$$

3. a)) <u>Valeur de la constante du temps τ</u>

$$On\ a : q(\tau) = 63\%Q_{max}\ \ soit\ u_C(\tau) = 63\%E = 0{,}63.4 = 2{,}5V$$

Graphiquement : $y = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25div$

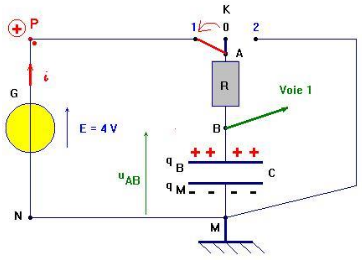
$$\tau \approx k'y = 0{,}5 \times 1{,}25 \approx 0{,}625ms$$

Cette méthode à l'aide de l'oscillogramme n'est pas très précise mais elle donne un ordre de grandeur de la valeur de τ.

b)) Valeur approchée de la capacité C du condensateur

$$\tau = RC \quad soit \quad C = \frac{\tau}{R} = \frac{0{,}625.10^{-3}}{200} = 3{,}125.10^{-6}F = 3{,}125\mu F$$

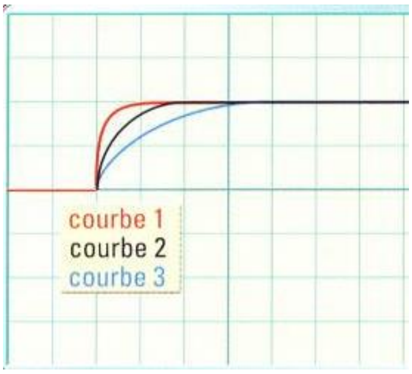
c)) Charges déposées sur les armatures.



4. a)) Les grandeurs E, I_{max} et τ sont-elles modifiées

- Lorsqu'on augmente la valeur de la résistance R du conducteur ohmique, la valeur E de l'échelon de tension reste inchangée.
- La valeur I_{max} diminue et la constante de temps τ augmente.

b)) L'oscillogramme ci-dessous représente l'allure de la tension aux bornes du condensateur pour R pour une augmentation de R et pour une diminution de R. à quel cas correspond chacune des courbes ?



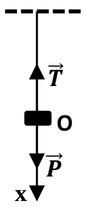
- La courbe 2 correspond à R = 200 Ω.
- La courbe 1 correspond à R < 200 Ω, la constante de temps est plus petite, le condensateur se charge plus vite.
- La courbe 3 correspond à R > 200 Ω, la constante de temps est plus grande, le condensateur se charge plus lentement.

5. Lorsque l'on augmente la valeur de l'échelon de tension E, I_{max} augmente et la constante de temps τ du circuit ne change pas.

Solutions sur les Oscillateurs Mécanique

Solution 1

1. Allongement du ressort



Le solide S de masse m est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du ressort.

A l'équilibre : $\vec{P}+\vec{T}=\vec{0} \Rightarrow P=mg=T=k\Delta l$

$$\Rightarrow k=\frac{mg}{\Delta l}=\frac{0,2\times 10}{0,08}=25N.m^{-1}$$

2. a)) Equation différentielle du mouvement

T.C.I : $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$,suivant Ox :

$$mg-k(\Delta l+x)=ma \Rightarrow mg-k\Delta l-kx=ma$$

Or à l'équilibre : $mg-k\Delta l=0 \Rightarrow$

$$-kx=m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \quad en\ posant\ {\omega_0}^2=\frac{k}{m},$$

d'où : $\ddot{x}+{\omega_0}^2x=0$ (1)

b)) Loi horaire du mouvement

La solution de l'équation différentielle (1) est de la forme $x(t)=x_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$.

A t=0, $x_0=x_m=x_m\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=1 \Longrightarrow \quad \varphi=0$.

$$x(t)=x_m\cos(\omega_0 t)\ \ avec\ \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{25}{0,2}}=11,18rad.s^{-1}$$

$soit\quad x(t)=0,04\cos(11,18t)$

c)) Equation horaire de la vitesse

$$v=\frac{dx}{dt}=-x_m\omega_0\sin(\omega_0 t)=-0,04\times 11,18\sin(11,18t)$$

$$v=-0,45\sin(11,18t)$$

La vitesse maximale atteinte par S est : $v_m=0,45m.s^{-1}$.

Solution 2

1. a)) Expression de l'énergie mécanique :

$$E_m=E_C+E_{Pe}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$$

b)) Déduisons l'équation différentielle

Puisque les frottements sont négligeables, alors $E_m=cste$:

$$E_m=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=cste \Rightarrow \frac{dE_m}{dt}=\frac{1}{2}m\frac{d\dot{x}^2}{dt}+\frac{1}{2}k\frac{dx}{dt}$$

$$soit\ \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x})+\frac{1}{2}k(2x\dot{x})=0 \Rightarrow m\ddot{x}+kx=0 \Rightarrow \ \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

2. Détermination du raideur k :

$$E_m=\frac{1}{2}k{x_m}^2 \Rightarrow k=\frac{2E_m}{{x_m}^2}=\frac{2\times 3,6\times 10^{-3}}{(2,75\times 10^{-2})^2}=9,52N.m^{-1}$$

3. a)) Vitesse de la masse m au passage en x=0

$$E_m=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\ \ pour\ x=0:\ \ E_m=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2E_m}{m}}$$

$$or\ T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m=\frac{{T_0}^2k}{4\pi^2} \quad \text{soit} \quad v=\frac{2\pi}{T_0}\sqrt{\frac{2E_m}{k}}$$

$$v=\frac{2\pi}{0,6}\sqrt{\frac{2\times 3,6\times 10^{-3}}{9,52}}=0,29m.s^{-1}$$

b)) La vitesse de la masse m à l'instant t

$$E_m=E_C+E_P \ \Longrightarrow\ E_C=E_m-E_P$$

$$E_C=3,6\times 10^{-3}-2.10^{-3}=1,6\times 10^{-3}J$$

$$E_C=\frac{1}{2}mv^2 \ \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2E_C}{m}}=\frac{2\pi}{T_0}\sqrt{\frac{2E_C}{k}}$$

$$v=\frac{2\pi}{0,6}\sqrt{\frac{2\times 1,6\times 10^{-3}}{9,52}}=0,192m.s^{-1}$$

Solution 3

1. a)) Valeur de la masse m :

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m=\frac{{T_0}^2k}{4\pi^2}=\frac{0,42^2\times 45}{4\times 10}=0,198kg=0,2kg$$

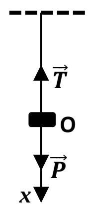
b)) Allongement du ressort à l'équilibre

Le solide S de masse m est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du ressort.

A l'équilibre : $\vec{P}+\vec{T}=\vec{0} \Rightarrow P=mg=T=k\Delta l \ \Rightarrow$

$$\Delta l=\frac{mg}{k}=\frac{0,2\times 10}{45}=4,44.10^{-2}m$$

2. a)) Equation horaire du mouvement



- Equation différentielle du mouvement

T.C.I : $\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$,suivant Ox :

$$mg-k(\Delta l+x)=ma \Rightarrow mg-k\Delta l-kx=ma$$

Or à l'équilibre : $mg-k\Delta l=0 \Rightarrow$

$$-kx=m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \quad en\ posant\ {\omega_0}^2=\frac{k}{m},$$

d'où : $\ddot{x}+{\omega_0}^2x=0$

La solution de cette équation différentielle est de la forme $x(t)=x_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$.

A t=0, $x_0=x_m=x_m\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=1 \Longrightarrow \quad \varphi=0$.

$$soit\ \ x(t)=x_m\cos(\omega_0 t)\ \ avec\ \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{0,42}=14,96rad.s^{-1}$$

$d'où : x(t)=0,06\cos(14,96t)$.

b)) Vitesse du solide à l'équilibre

Appliquons la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_i=\frac{1}{2}k{x_m}^2=E_f=\frac{1}{2}m{v_0}^2 \ \Rightarrow v_m=\sqrt{\frac{k{x_m}^2}{m}}=x_m\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v_m=0,06\times\sqrt{\frac{45}{0,2}}=0,9m.s^{-1}$$

3. Calculons au points d'abscisse x = 0,03m :

a))) L'énergie cinétique du système :

$$E_C=\frac{1}{2}mv^2\ or\ v=\frac{dx}{dt}=-x_m\omega_0\sin(\omega_0 t)\ \ et$$

$$x=0,06\cos(\omega_0 t)=0,03 \Longrightarrow \cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2} \Longrightarrow \omega_0 t=\frac{\pi}{3}rad.$$

$$Soit\ \ v=-0,06\times 14,96\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-0,77m.s^{-1}$$

$$E_C=\frac{1}{2}\times 0,2\times 0,77^2=5,93\times 10^{-2}J$$

b)) L'énergie potentielle élastique du système

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 45 \times 0{,}03^2 = 2{,}025 \times 10^{-2}J$$

c)) L'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{PP} = -mgx = -0{,}2 \times 10 \times 0{,}03 = -0{,}06J$$

d)) L'énergie mécanique du système :

$$E_m = E_C + E_{PP} + E_{Pe}$$

$$E_m = 5{,}93.10^{-2} - 0{,}06 + 2{,}025 \times 10^{-2} = -3{,}382 \times 10^{-2}J$$

Solution 4

1. Valeur numérique de l'amplitude, de la pulsation, de la période et de la fréquence

$$x(t) = 5{,}0.10^{-2}\cos\left(25t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow x_m = 0{,}05m\,;\ \omega_0 = 25rad.s^{-1}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{25} = 0{,}25s \ et\ N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0{,}25} = 4Hz$$

Remarque :

Le mouvement effectué pendant une période est appelé une oscillation. La fréquence propre N_0 est le nombre d'oscillations effectuées en une seconde.

2. Calcul de x_0 , v_0 et a_0 à t=0s :

$$x(t) = 5{,}0.10^{-2}\cos\left(25t + \frac{\pi}{4}\right),$$

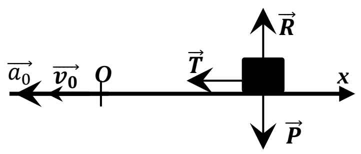
$$v = \frac{dx}{dt} - 1{,}25\sin\left(25t + \frac{\pi}{4}\right) \ et$$

$$a = \frac{dv}{dt} - 31{,}25\cos\left(25t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A\ t = 0s, x_0 = 5{,}0.10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3{,}53 \times 10^{-2}m$$

$$v_0 = -1{,}25\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0{,}88m.s^{-1}$$

$$a_0 = -31{,}25\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -22{,}01m.s^{-2}.$$



3. Inventaire des forces appliquées

Le solide S de masse m est soumis à son poids $\vec{P}$ à la tension $\vec{T}$ du ressort et à la réaction $\vec{R}$.

A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow P = R$

$$R = P = mg = 0{,}1 \times 9{,}8 = 0{,}98N$$

Valeur de la constante k :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\omega_0^2 = 0{,}1 \times 25^2 = 62{,}5N.m^{-1}$$

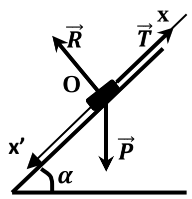
4. Energie mécanique du système :

$$E_m = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}(62{,}5) \times 0{,}05^2 = 7{,}81 \times 10^{-2}J$$

Solution 5

1. Allongement du ressort à l'équilibre

Le solide S de masse m est soumis à son poids $\vec{P}$ à la tension $\vec{T}$ du ressort et à la réaction $\vec{R}$. A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$



Suivant Ox' : $mg\sin\alpha - T = 0 \Rightarrow T = k\Delta l = mg\sin\alpha$

$$\Delta l = \frac{mg\sin\alpha}{k} = \frac{50 \times 10^{-3} \times 10 \times 0{,}5}{5} = 0{,}05m$$

2. a)) Equation différentielle du mouvement

T.C.I : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$, suivant Ox' :

$$mg\sin\alpha - T = ma = m\frac{dx^2}{dt^2}$$

$$\Rightarrow mg\sin\alpha - k(x + \Delta l) = m\frac{dx^2}{dt^2}$$

$\Rightarrow -kx = m\frac{dx^2}{dt^2}$ $car\ mg\sin\alpha - k\Delta l = 0$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ $en\ posant\ \omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$, on a : $\ddot{x} + \omega_0{}^2x = 0$

b)) Loi horaire du mouvement

La solution de l'équation différentielle précédente est de la forme : $x(t) = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

A t=0, $v_0 = 0 \Rightarrow x_0 = x_m = x_m\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$.

$$x(t) = x_m\cos(\omega_0 t)\ avec\ \omega_0 = \sqrt{\frac{5}{0{,}05}} = 10rad.s^{-1}$$

$Soit\ x(t) = 0{,}05\cos(10t)$

3. Montrons que l'énergie potentielle totale est : $E_P = \frac{1}{2}kx^2 + C$

On a : $E_P = E_{PE} + E_{PP} = \frac{1}{2}k(x + \Delta l)^2 - mgx\sin\alpha$

$E_P = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2 + (k\Delta l - mg\sin\alpha)x$

$or\ k\Delta l - mg\sin\alpha = 0$ (position d'équilibre), alors :

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Avec $C = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 0{,}05^2 = 6{,}25 \times 10^{-3}J$

4. Montrons que l'énergie mécanique du système est constante

$E = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + C$: $x = x_m\cos(\omega_0 t)$ et

$v = \frac{dx}{dt} = -x_m\omega_0\sin(\omega_0 t)$

$$Donc : E = \frac{1}{2}mx_m{}^2\omega_0{}^2 sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}kx_m{}^2cos^2(\omega_0 t) + C$$

$$Or\ \ \omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow E = \frac{1}{2}kx_m{}^2sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}kx_m{}^2cos^2(\omega_0 t) + C$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}kx_m{}^2\left(sin^2(\omega_0 t) + cos^2(\omega_0 t)\right) + C$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}kx_m{}^2 + C = cste$$

$$A.N: E = \frac{1}{2} \times 5 \times 0{,}05^2 + 6{,}25 \times 10^{-3} = 12{,}5 \times 10^{-3}J$$

5. Calculons x, v et a à la date $t = \frac{\pi}{40}s$

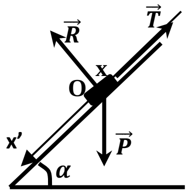
$$x = 0{,}05\cos(10 \times \frac{\pi}{40}) = 3{,}53 \times 10^{-2}m$$

$$v = -x_m\omega_0\sin(\omega_0 t) = -0{,}5\sin\left(10 \times \frac{\pi}{40}\right) = -0{,}35m.s^{-1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -5\cos(10t) = -5cos(10 \times \frac{\pi}{40}) = -3{,}53m.s^{-2}$$

Solution 6

1. Raideur k du ressort à l'équilibre



Le solide S de masse m est soumis à son poids $\vec{P}$ à la tension $\vec{T}$ du ressort et à la réaction $\vec{R}$. A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$

Suivant Ox' : $mg\sin\alpha - T = 0 \Longrightarrow T = k\Delta l = mg\sin\alpha$

$$k = \frac{mg\sin\alpha}{\Delta l} = \frac{200 \times 10^{-3} \times 9{,}8 \times 0{,}5}{0{,}06} = 16{,}33N.m^{-1}$$

2. a)) Equation différentielle du mouvement

T.C.I : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$, suivant Ox' :

$$mg\sin\alpha - T = ma = m\frac{dx^2}{dt^2} \Longrightarrow$$

$$mg\sin\alpha - k(x + \Delta l) = m\frac{dx^2}{dt^2} \Longrightarrow -kx = m\frac{dx^2}{dt^2}$$

$car\ mg\sin\alpha - k\Delta l = 0$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\ \ en\ posant\ \omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$, on a : $\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$

La période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2}{16{,}33}} = 0{,}7s$

b)) Lois horaires du mouvement

La solution de l'équation différentielle précédente est de la forme $x(t) = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

A t=0, $v_0 = 0 \Longrightarrow x_m = x_m\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Longrightarrow \varphi = 0$.

$$x(t) = x_m\cos(\omega_0 t)\ \ avec\ \omega_0 = \sqrt{\frac{16{,}33}{0{,}2}} = 90{,}36rad.s^{-1}$$

$x(t) = 0{,}05\cos(90{,}36t)$ et $v = -x_m\omega_0\sin(\omega_0 t)$

$v(t) = -0{,}05 \times 90{,}36\sin(90{,}36t) = -4{,}518\sin(90{,}36t)$

3. Calculons l'énergie totale du système :

$$E = E_C + E_{PE} + E_{PP} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x + \Delta l)^2 - mgx\sin\alpha$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2 + (k\Delta l - mg\sin\alpha)x$$

$or\ à\ l'équilibre: k\Delta l - mg\sin\alpha = 0$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2$ avec $x = x_m\cos(\omega_0 t)$ et

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_m\omega_0\sin(\omega_0 t)\ \ et\ \ m\omega_0{}^2 = k$$

$$E = \frac{1}{2}mx_m{}^2\omega_0{}^2sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}kx_m{}^2cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k\Delta l^2$$

$$E = \frac{1}{2}kx_m{}^2sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}kx_m{}^2cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k\Delta l^2$$

$$E = \frac{1}{2}kx_m{}^2\left(sin^2(\omega_0 t) + cos^2(\omega_0 t)\right) + \frac{1}{2}k\Delta l^2$$

$$E = \frac{1}{2}kx_m{}^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}k(x_m{}^2 + \Delta l^2) = cste$$

$$A.N: E = \frac{1}{2} \times 16{,}33(0{,}05^2 + 0{,}06^2) = 4{,}98 \times 10^{-2}J$$

Remarque : S'il s'agit de calculer tout simplement l'énergie mécanique, vous pouvez directement poser la formule sans la démontrer. Mais s'il s'agit d'une démonstrations suivez les démarches ci-dessus.

3. a)) Nature du mouvement de (S)

Le se détache du ressort, alors il sera soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$ de la piste.

T.C.I : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$, suivant x'x : $mg\sin\alpha = ma$

$a = g\sin\alpha > 0 \Longrightarrow$ le mouvement de (S) après le détachement du ressort est uniformément accéléré.

$a = g\sin\alpha = 9{,}8 \times 0{,}5 = 4{,}9m.s^{-2}$

b)) Loi horaire de ce mouvement :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 4{,}9t^2 = 2{,}45t^2$$

c)) Energie mécanique de (S) à t=2s

$$E = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2}mv^2 - mgx\sin\alpha\ \ avec\ v = at = 4{,}9t$$

$et\ x = 2{,}45t^2\ :\ A\ t = 2s,$

$v = 4{,}9 \times 2 = 9{,}8m.s^{-1}$ $\ et\ x = 2{,}45 \times 4 = 9{,}8m$

$$E = \frac{1}{2} \times 0{,}2 \times 9{,}8^2 - 0{,}2 \times 9{,}8 \times 9{,}8 \times 0{,}5 = 0$$

Remarque et conclusion

- Lorsque le ressort se place verticalement, l' énergie mécanique du système est donnée par :$E_m = \frac{1}{2}kx_m{}^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2 = cste$
- Lorsque le ressort se déplace horizontalement, son énergie mécanique est donnée par : $E_m = \frac{1}{2}kx_m{}^2 = cste$.

Solution 7

1. Equation différentielle du mouvement

Le solide S de masse m est soumis à son poids $\vec{P}$ à la tension $\vec{T}$ du ressort et à la réaction $\vec{R}$.

T.C.I : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$, suivant x'x :

$$-T = ma \Longrightarrow -kx = m\frac{dx^2}{dt^2} \Longrightarrow \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\ (1)$$

2. Equation horaire du mouvement

La solution de l''équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi)\ \ et\ v = \frac{dx}{dt} = -x_m\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

- Valeur de l'amplitude : Appliquons la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0{}^2 = E_f = \frac{1}{2}kx_m{}^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}kx_m{}^2$$

$$\Longrightarrow x_m = \frac{mv_0{}^2}{k} = \frac{0{,}1 \times 0{,}4^2}{10} = 1{,}6 \times 10^{-3}m$$

- Pulsation propre des oscillations :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0,1}} = 10rad.s^{-1}$$

- Phase initiale φ :

$A\ t = 0s, x_0 = 0 = x_m \cos(\varphi) \Longrightarrow \cos(\varphi) = 0$

$\Leftrightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{2}\ ou\ \varphi = \frac{-\pi}{2} et\ v_0 = -x_m\omega_0 \sin(\varphi)$

$$\begin{cases}\varphi = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow\ v_0 = -x_m\omega_0 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow\ v_0 = x_m\omega_0\end{cases} \Longrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}\ \ car\ \ à\ t = 0, v_0 > 0$$

$x(t) = 1,6 \times 10^{-3} \cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)$

3. a)) Expression de l'énergie mécanique du système en fonction de $k, m, x\ et\ v$.

$$E = E_C + E_{PE} + E_{PP} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad car\ E_{PP} = 0$$

b)) Expression de l'énergie mécanique en fonction de $k\ et\ x_m$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$avec $x = x_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$ et

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_m\omega_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E = \frac{1}{2}m{x_m}^2{\omega_0}^2 sin^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}k{x_m}^2 cos^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}k\Delta l^2$$

$$E = \frac{1}{2}k{x_m}^2 sin^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}k{x_m}^2 cos^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E = \frac{1}{2}k{x_m}^2\left(sin^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + cos^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$E = \frac{1}{2}k{x_m}^2 = cste$$

c))) Retrouvons l'équation différentielle

Puisque les frottements sont négligeables, alors le système est harmonique et $E_m = cste$:

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cste \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d\dot{x}^2}{dt} + \frac{1}{2}k\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2}k(2x\dot{x}) = 0\ m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Solution 8

1. a)) Expression de v en fonction de $R, g\ et\ \theta$

Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil

T.C.I : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

suivant x'x :

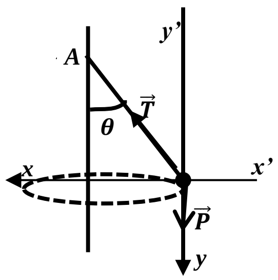
$$Tsin\theta = ma_n = mr\omega^2$$

avec $r = R\sin\theta$, alors :

$$T = mR\omega^2\ \ (1)$$

Suivant y'y : $Tcos\theta - mg = 0$

$soit\ \ T = \frac{mg}{cos\,\theta}$ (2)



$$(1) = (2), alors : mR\omega^2 = \frac{mg}{cos\,\theta} \Rightarrow R\omega^2 = \frac{g}{cos\,\theta}$$

Or $v = r\omega = \omega R \sin\theta \Longrightarrow v^2 = \omega^2 R \times R\sin^2\theta$

$$v^2 = \frac{g}{cos\,\theta} \times R\,sin^2\theta = gR \times \frac{sin\,\theta}{cos\,\theta} sin\,\theta \Longrightarrow$$

$v^2 = gR\tan\theta\sin\theta \Longrightarrow v = \sqrt{gR\tan\theta\sin\theta}$

b)) Valeur de v_1 en M_1 si $SA_1 = \frac{R}{2}$

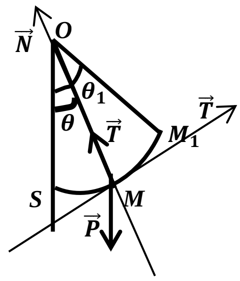
$$v_1 = \sqrt{gR\tan\theta_1\sin\theta_1}\ \ avec\ \sin\theta_1 = \frac{SA_1}{OM_1} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta_1 = 30°$$

$$AN: v_1 = \sqrt{10 \times 0,8 \times \tan 30° \sin 30°} = 1,52m.s^{-1}\ et$$

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R\sin\theta_1} = \frac{1,52}{0,8 \times \frac{1}{2}} = 3,8rad.s^{-1}$$

2. a)) Expression de la vitesse au point M en fonction de g, R, θ

La masse m est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.



T.E.C : entre M_1 et M

$E_C(M) = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$,

$\frac{1}{2}m{v_{MM}}^2 = mgh \Longrightarrow v_M = \sqrt{2gh}$

$Avec\ h = R\cos\theta - R\cos\theta_0$

$Soit\ h = R(cos\,\theta - cos\,\theta_1)$

$d'où\ v_M = \sqrt{2\,gR(cos\,\theta - cos\,\theta_1)}$

Intensité de la réaction R au point M.

T.C.I : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Suivant $\vec{N}$: $-mg\,cos\,\theta + R = ma_n = m\frac{{v_M}^2}{R}$

$$R_M = m\left(g\,cos\,\theta + \frac{{v_M}^2}{R}\right) = m(g\,cos\,\theta + 2g(cos\,\theta - cos\,\theta_1)$$

$$R_M = mg(3\,cos\,\theta - 2\,cos\,\theta_1)$$

b)) Application numérique de v er R au point S

Au point $\theta = 0 \Rightarrow v_S = \sqrt{2gR(1 - cos\,\theta_1)}$

$$v_S = \sqrt{20 \times 0,8(1 - cos\,30°)} = 1,46m.s^{-1}$$

$$R_S = mg(3 - 2\cos\theta_1)$$

$R_S = 50.10^{-3} \times 10(3 - 2\cos 30°) = 0,63N$

3. a)) Valeur de l'angle $\theta_2 = mes(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OM_2})$

$$\sin\theta_2 = \frac{SA_2}{OM_2} = \frac{8}{80} = 0,1 \Longrightarrow \theta_2 = sin^{-1}(0,1) = 5,74°$$

b)) Nature du mouvement de S

R.F.D (en rotation) : $M(\vec{R}) + M(\vec{P}) = J\ddot{\theta}$

$$\Longrightarrow\ -mgR\sin\theta = J\ddot{\theta} = mR^2\ddot{\theta} \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R}sin\,\theta = 0$$

$Comme\ \theta\ \ est\ plus\ petit, alors\ \ sin\,\theta \sim \theta \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$

C'est une équation différentielle du second degré sans second membre ou sans amortissement, elle caractérise un mouvement de rotation sinusoïdal.

Période propre des oscillations :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\ \ où\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,8}{10}} = 1,78s$$

b)) Energie mécanique du système au point M

$E_m = E_C + E_P\ \ avec\ E_C = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$

$et\ E_P = mgz = mgR(1 - \cos\theta)$

$E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos\theta)$

Retrouvons l'équation :

Le système est isolé donc : $E_m = cste \implies \frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}mR^2\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} + mgR\frac{d}{dt}(1-\cos\theta) = 0$$

$\frac{1}{2}mR^2(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + mgR\dot{\theta}\sin\theta = 0 \implies \sin\theta \sim \theta \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta$

c)) Equation horaire du mouvement de la projection en A

L'équation différentielle admet comme solution :

$\theta = \theta_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$

A t = 0s, $\theta_0 = \theta_m \implies \varphi = 0 \implies \theta = \theta_m\cos(\omega_0 t)$

Or $x = R\theta = R\theta_m\cos(\omega_0 t)$ $et\ R\theta_m = SA_2$

$$soit\ \ x(t) = SA_2\cos(\sqrt{\frac{g}{R}}t)$$

$x(t) = 0{,}08\cos\left(\sqrt{\frac{10}{0{,}8}}t\right) = 0{,}08\cos(3{,}54t)\ (m)$

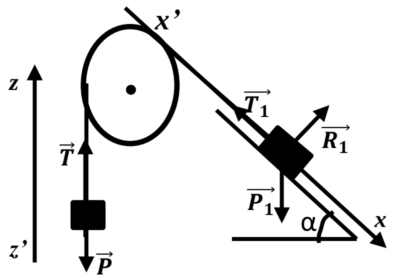
Vitesse maximale de A

$v = \frac{dx}{dt} = -0{,}08\times3{,}54\sin(3{,}54t) = -0{,}28\sin(3{,}54t)$

$v = v_{max}\sin(3{,}54t) \implies v_{max} = 0{,}28m.s^{-1}$

Solution 9

1. a)) Valeur de l'angle α en degré



- Pour la masse m_1 *: T.CI :* $\vec{P_1} + \vec{T_1} + \vec{R_1} += m_1\vec{a}$

Suivant x'x :

$m_1 g\sin\alpha - T_1 = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1 g\sin\alpha - m_1 a$ (2)

- Pour la masse m : *T.CI :* $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Suivant z'z : $-mg + T = Ma \implies T = mg + ma$ (3)

Or $T_1 = T$ *alors :* $m_1 g\sin\alpha - m_1 a = mg + ma$

$$a(m+m_1) = m_1 g\sin\alpha - mg \implies \sin\alpha = \frac{a(m+m_1)+mg}{m_1 g}$$

$$A.N:\ \sin\alpha = \frac{2{,}5(0{,}1+0{,}7)+0{,}1\times10}{0{,}7\times10} = 0{,}43 \implies \alpha = 25{,}38°$$

b)) Travaille de la tension T_1 entre A et B

$W(\vec{T_1}) = T_1 \times AB$, $avec\ T_1 = m_1(g\sin\alpha - a)$

$T_1 = 0{,}7(10\times0{,}46 - 2{,}5) = 1{,}47N$

$$R.I.T : v_B{}^2 = 2aAB \implies AB = \frac{v_B{}^2}{2a} = \frac{4^2}{2\times2{,}5} = 3{,}2m$$

$W(\vec{T_1}) = 1{,}47\times3{,}2 = 4{,}70J$

- Durée de la phase AB : $v_B = at_{AB} \implies t_{AB} = \frac{v_B}{a} = \frac{4}{2{,}5} = 1{,}6s$

2. Valeur de la masse m_2 et le racourssiment maximale X_m

- Après le choc , les deux solides s'accrochent donc il y a conservation de la quantité de mouvement, c'à dire la quantité de mouvement avant le choc est égale à la quantité de mouvement après le choc.

$$(m_1+m_2)\vec{v_G} = m_1\vec{v_B} \implies m_2 v_G = m_1(v_B - v_G)$$

$$soit\ \ m_2 = \frac{m_1(v_B - v_G)}{v_G} \implies m_2 = \frac{700(4-2)}{2} = 700g$$

- Comme les deux solides glissent sans frottement sur le plan horizontal, alors le système est conservatif, il y a alors conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{mf} = E_{mi} \implies E_{Cf} + E_{Pf} = E_{Ci} + E_{Pi}$$

$or\ \ E_{Pi} = 0\ et\ E_{Cf} = 0 \implies E_{Pf} = E_{Ci}$

$$\implies \frac{1}{2}kx_m{}^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_G{}^2 \implies x_m = v_G\sqrt{\frac{(m_1+m_2)}{k}}$$

$x_m = 2\sqrt{\frac{(0{,}7+0{,}7)}{400}} = 0{,}118m = 0{,}12m$

3. a)) Equation différentielle du mouvement

$E_m = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cste$

$$\implies \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\frac{d\dot{x}^2}{dt} + \frac{1}{2}k\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\implies \frac{1}{2}(m_1+m_2)(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2}k(2x\dot{x}) = 0$$

$$\implies (m_1+m_2)\ddot{x} + kx = 0 \implies \ddot{x} + \frac{k}{m_1+m_2}x = 0$$

Posons $\omega^2{}_0 = \frac{k}{m_1+m_2} \implies \ddot{x} + \omega^2{}_0 x$, c'est une équation différentielle du second ordre sans second membre caractérise un mouvement rectiligne sinusoïdal.

Valeur de la période du mouvement

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \implies T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}7+0{,}7}{400}} = 0{,}37s$

b)) Loi horaire du mouvement

La solution de l'équation différentielle (1) est de la forme $x(t) = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

A t=0, $x_0 = x_m = x_m\cos\varphi \implies \cos\varphi = 1 \implies \varphi = 0$.

$x(t) = x_m\cos(\omega_0 t)\ \ avec\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0{,}37} = 16{,}98rad.s^{-1}$,

$x(t) = 0{,}12\cos(16{,}98t)$.

Solution 10

1. a)) Le bilan des forces : le poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$

b)) Calcul de la vitesse v au point B

T.E.C : entre A et B : $\frac{1}{2}mv_B{}^2 = mgh_A\ \ soit\ v_B = \sqrt{2gh_A}$

$$A.N:\ v_B = \sqrt{2\times10\times31{,}25\times10^{-2}} = 2{,}5m.s^{-1}$$

2. a)) Vitesse v_0 du solide juste avant le choc

Comme sur le tronçon BO les frottements sont négligeables, alors

T.E.C : entre B et O :

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{1}{2}m{v_B}^2 = 0 \Rightarrow {v_0}^2 = {v_B}^2 \Rightarrow v_0 = v_B = 2{,}5m.s^{-1}$$

b)) Energie mécanique de (S) juste avant le choc

$$E_m(O) = E_{CO} + E_{PP}(O) = E_{CO} = \tfrac{1}{2}m{v_0}^2 \quad car \quad E_{PP}(O) = 0$$

$$E_m(O) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2{,}5^2 = 6{,}25J$$

3. a)) Valeur de l'amplitude x_m

En appliquant la conservation de l'énergie mécanique on a :

$$E_m(O) = E_{mf} = \frac{1}{2}k{x_m}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}k{x_m}^2 = E_m(O) = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

$$\Rightarrow x_m = \sqrt{\frac{2E_m(O)}{k}} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow x_m = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}25}{200}} = 0{,}25m$$

b)) Equation différentielle du mouvement de (S)

Comme les frottements sont négligeables, alors le système est harmonique et $E_m = cste$:

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cste \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d\dot{x}^2}{dt} + \frac{1}{2}k\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2}k(2x\dot{x}) = 0\ m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$${\omega_0}^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10rad.s^{-1}$

Loi horaire du mouvement de (S) : $x(t) = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$Or\ à\ t = 0, x = x_0 = 0\ \ et\ v = v_0 = 2{,}5m.s^{-1} > 0$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -x_m\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v(0) = v_0 = -x_m\omega_0\sin(\varphi) \Rightarrow \sin(\varphi) = -\frac{v_0}{x_m\omega_0}$$

$$\sin(\varphi) = -v_0\frac{1}{v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \times \sqrt{\frac{k}{m}}} = -1$$

$$\Rightarrow \sin(\varphi) = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}rad$$

$$D'où:\ x(t) = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0{,}25\cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)$$

c)) Instant auquel le solide repasse en O, après l'instant initial

Au point $x = x_0 = 0$, donc

$$x_0 = 0 = 0{,}25\cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0{,}25\cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 10t - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 10t - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10t = \pi + 2\pi k \\ 10t = 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 t = \pi + 2\pi k \\ \omega_0 t = 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{\omega_0} + \frac{2\pi k}{\omega_0} \\ t = \frac{2\pi k}{\omega_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2\pi}{2\omega_0} + \frac{2\pi}{\omega_0}k \\ t = \frac{2\pi}{\omega_0}k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{T_0}{2} + kT_0 \\ t = kT_0 \end{cases}$$

Or pour la première fois $k = 0$, alors

$$t = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{10} = 0{,}1\pi = 0{,}314s$$

Solution 11

Partie A :

1. a)) Masse du solide (S)

$On\ a:\ N_0 = 960trs.min^{-1} = \frac{948}{60} = 15{,}8Hz$

La fréquence d'un oscillateur harmonique est définie par :

$$N_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_S}} \Rightarrow {N_0}^2 = \frac{k}{4\pi^2 m_S} \Rightarrow m_S = \frac{k}{4\pi^2{N_0}^2}$$

$$A.N:\ m_S = \frac{300}{4\pi^2 \times 15{,}8^2} = 0{,}03kg$$

b)) Energie mécanique E_0

$$E_0 = \tfrac{1}{2}k{x_0}^2 = \tfrac{1}{2} \times 300 \times (5.10^{-2})^2 = 0{,}375J$$

2. Vitesse du solide en B

Conservation de l'énergie mécanique donne :

$$E_0 = E_1 = \tfrac{1}{2}m_S{v_S}^2\ soit\ E_0 = \tfrac{1}{2}m_S{v_S}^2$$

$$\Rightarrow v_S = \sqrt{\frac{2E_0}{m_S}} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}375}{30.10^{-3}}} = 5m.s^{-1}$$

3. Valeur de l'intensité de frottement f

Le système est soumis, après le choc, à la force de frottement $\vec{f}$,son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$.

TEC : $EC_2 - EC_1 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$

$$or\ \ W(\vec{P}) = W(\vec{R}) = 0 \quad et\ \ EC_2 = EC_f = 0$$

$$-EC_1 = W(\vec{f}) \Rightarrow -\frac{1}{2}m_b{v_b}^2 = -fL \Rightarrow f = \frac{m_b{v_b}^2}{2L}$$

$$A.N:\ \ f = \frac{10.10^{-3} \times 7{,}5^2}{2 \times 0{,}5} \quad soit \quad f = 56{,}25 \times 10^{-2}N$$

Partie B :

1. Expression de v_M en fonction de g, r, θ_0, θ

La bille est soumise à son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$

TEC : entre C et M : $E_C(M) - E_C(C) = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m{v_M}^2 = mgh\ où\ h = z_C - z_M = r\sin\theta_0 - r\sin\theta$$

$$Soit\ \ v_M = \sqrt{2gr(\sin\theta_0 - \sin\theta)}$$

2. Expression de l'intensité de la force F

TCI : $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$, projection sur $\vec{N}$:

$$mg\sin\theta - F = ma_n\ \ soit:\ \ F = m(g\sin\theta - a_n)$$

$$F = m(g\sin\theta - a_n) = m\left(g\sin\theta - \frac{{v_M}^2}{r}\right)$$

$$D'où\ :F = mg(3\sin\theta - 2\sin\theta_0)$$

3. Valeur de θ_1 pour que la bille quitte la piste :

La bille quitte la piste CD signifie qu'il n'est plus en contact avec le plan CD, donc F=0 , alors :

$$3\sin\theta_1 - 2\sin\theta_0 \Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{2}{3}\sin\theta_0$$

$$\Rightarrow \theta_1 = sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right) = sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\sin 60°\right) = 35{,}26°$$

$$v_E = \sqrt{2gr(\sin\theta_0 - \sin\theta_1)}$$

$$A.N:\ v_E = \sqrt{2\times 10\times 6(\sin 60° - \sin 35{,}26°)} = 5{,}88 m.s^{-1}$$

Partie C

1. Equation cartésienne de la trajectoire

Equations horaires du mouvements :

Condition initiale

$$\overrightarrow{v_E}\begin{vmatrix} v_{Ex} = v_E\cos\theta_1 \\ v_{Ey} = v_E\sin\theta_1 \end{vmatrix}\ ,\quad \overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}$$

TCI : $m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$ donc : $\vec{g}\begin{vmatrix} g_x = 0 \\ g_y = g \end{vmatrix}$, $\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = g \end{vmatrix}$

$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_{Ex} = v_E\cos\theta_1 \\ v_{Ey} = g + v_E\sin\theta_1 \end{vmatrix}\quad \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = (v_E\cos\theta_1)t \\ y = gt^2 + (v_E\sin\theta_1)t \end{vmatrix}$$

Equation de la trajectoire

On a : $x = (v_E\cos\theta_1)t \ \Rightarrow t = \frac{x}{v_E\cos\theta_1}$, alors :

$$y = \frac{g}{2{v_E}^2\cos^2\theta_1}x^2 + x\tan\theta_1$$

$$AN : y = \frac{10}{2\times 5{,}88^2\times\cos^2(35{,}26°)}x^2 + x\tan 35{,}26°$$

$$Soit\ \ y = 0{,}251x^2 + 0{,}708x$$

2. Cordonnées du points d'impact

$$I(x_I\ ;\ y_I = h)\ \Rightarrow 0{,}251{x_I}^2 + 0{,}708x_I = 5$$

$$\Rightarrow \Delta = 0{,}708^2 + 4\times 0{,}251\times 5 = 5{,}52\quad soit\quad \sqrt{\Delta} = 2{,}35$$

$$x_I = \frac{-0{,}708 \pm 2{,}35}{2\times 0{,}251}\quad soit\ \ x_I = \frac{-0{,}708 + 2{,}35}{2\times 0{,}251} = 3{,}27m$$

$$D'où :\ I\begin{vmatrix} x_I = 3{,}27m \\ y_I = 5m \end{vmatrix}$$

3. Vitesse de la bille en E

TEC entre E et I:

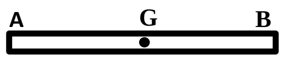
$$E_C(I) - E_C(E) = W(\vec{P}) \Rightarrow \frac{1}{2}m{v_I}^2 - \frac{1}{2}m{v_E}^2 = mgh$$

$$Soit\quad v_I = \sqrt{{v_E}^2 + 2gh} = \sqrt{5{,}88^2 + 2\times 10\times 5} = 11{,}6 m.s^{-1}$$

Solution 12

I. 1. Montrons que $J_\Delta = \frac{1}{3}mL^2$

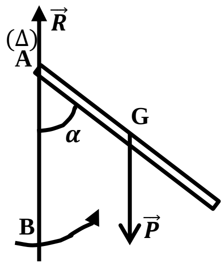
Appliquons le théorème de Huygens :



$$J_\Delta = J_G + mAG^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2$$

2. a)) Équation différentielle des oscillations de faibles amplitude

Le barreau est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$



R.F.D (en rotation) :

$$M(\vec{R}) + M(\vec{P}) = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow -mgAG\sin\alpha = J_\Delta\ddot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgAG}{J_\Delta}\sin\alpha = 0 \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{mgL}{2}\times\frac{3}{mL^2}\sin\alpha = 0$$

Soit : $\ddot{\alpha} + \frac{3g}{2L}\sin\alpha = 0$, $faible\ amplitude\ \ \sin\alpha = \alpha$

D'où : $\ddot{\alpha} + \frac{3g}{2L}\alpha = 0$

b)) Équation horaire des oscillations

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$\alpha = \alpha_m\sin(\omega_0 t + \varphi)\ \ où\ \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

$$A\ t = 0s, \alpha_0 = \alpha_m = \alpha_1 = 6° \ \Rightarrow\ \ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha_m\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{6\pi}{180}\sin\left(\sqrt{\frac{30}{2\times 0{,}30}}t\right)$$

$$\alpha = 0{,}1\sin(7{,}07t)\quad et$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\times 0{,}30}{30}} = 1{,}088s$$

c)) Vitesse de l'extrémité B au passage par la verticale

Au passage par la verticale, la vitesse maximale est :

$$v = \dot{\alpha} = \alpha_1\omega_0\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \dot{\alpha}_m\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$or\ \ à\ la\ verticale\ \ \left|\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1$$

$$\dot{\alpha}_m = \alpha_1\omega_0 \ \Rightarrow\ v_B = \alpha_1\omega_0 L = \alpha_1 L\sqrt{\frac{3g}{2L}} = \alpha_1\sqrt{\frac{3gL}{2}}$$

$$A.N:\ v_B = \frac{\pi}{30}\sqrt{\frac{30\times 0{,}30}{2}} = 0{,}222 m.s^{-1}$$

3. a)) Énergie potentielle de la pesanteur

$$E_{PP} = -mgz = -mg\left(\frac{L}{2}\cos\alpha_2\right) = -10\left(\frac{0{,}30}{2}\cos\frac{5\pi}{6}\right) = 1{,}30J$$

b)) Vitesse de l'extrémité B au passage par la position d'équilibre

Le système est isolé (frottements négligeables, donc il y a conservation de l'énergie mécanique :

$$E_1 = E_{P1} = -mg\frac{L}{2}\cos\alpha_2$$

$$et\ \ E_2 = E_{C2} + E_{P2} = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 - mg\frac{L}{2}$$

$E_1 = E_2 \Leftrightarrow -mg\frac{L}{2}\cos\alpha_2 = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 - mg\frac{L}{2}$

$-mg\frac{L}{2}\cos\alpha_2 = \frac{1}{6}mL^2\omega^2 - \frac{1}{2}mL \Rightarrow L\omega^2 = 3g(1-\cos\alpha_2)$

$Or\ v_B = L\omega \Rightarrow {v_B}^2 = L \times L\omega^2 = 3Lg(1-\cos\alpha_2)$

$\Rightarrow v_B = \sqrt{3Lg(1-\cos\alpha_2)}$

$A.N:\ v_B = \sqrt{30 \times 0{,}30\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)} = 1{,}098 m.s^{-1}$

II. Vitesse de rotation du barreau

La puissance du moteur est définie par : $P_m = \frac{W_m}{t} \Rightarrow W_m = P_m t$

Application du T.E.C : $E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = W_m = P_m t$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}mL^2\omega^2 = P_m t \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{24P_m t}{mL^2}}$$

$$A.N:\ \omega = \sqrt{\frac{24 \times 1{,}5 \times 4}{0{,}30^2}} = 40 rad.s^{-1}$$

III. 1. Durée de la phase d'arrêt et le nombre de tours effectués

R.F.D :(en rotation) :

$$M(\vec{R}) + M(\vec{P}) + M_C = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow M_C = \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2-\omega_1}{\Delta t}\ , au\ point\ d'arret\ \omega_2 = 0,$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-\omega_1}{\Delta t} = -\frac{2\pi N_0}{\Delta t}$$

$$M_C = \frac{1}{12}mL^2\left(-\frac{2\pi N_0}{\Delta t}\right) \Rightarrow \Delta t = -\frac{\pi N_0 mL^2}{6M_C}$$

$$A.N:\ \Delta t = -\frac{\pi \times 1400 \times 0{,}1 \times 0{,}3^2}{-6 \times 60 \times 5 \times 10^{-2}} = 2{,}2s$$

- Nombre de tours effectués par la barre à cet instant

R.I.T : $-{\omega_1}^2 = 2\ddot{\theta}\Delta\theta \Rightarrow -{\omega_1}^2 = 2\left(\frac{-\omega_1}{\Delta t}\right)\theta$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{2\theta}{\Delta t} \Rightarrow 2\pi N_0 = \frac{2}{\Delta t}\times 2\pi n \Rightarrow n = \frac{N_0\Delta t}{2}$$

$$A.N:\ n = \frac{1400 \times 2{,}2}{2 \times 60} = 25{,}67 tours$$

2. a)) Équation différentielle de alentissement

R.F.D :(en rotation) :

$$M(\vec{R}) + M(\vec{P}) + M_C = J_\Delta\ddot{\theta} = J_\Delta\frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow M_C = -K\omega = \frac{1}{12}mL^2\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} + \frac{12K}{mL^2}\omega = 0$$

b)) Solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{12K}{mL^2}\omega = 0 \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{12K}{mL^2}dt \Rightarrow \int\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{12K}{mL^2}\int d\,t$$

$$\Rightarrow \ln\omega = -\frac{12K}{mL^2}t + Cste$$

$A\ t = 0s, \omega = \omega_0 \Rightarrow cste = \ln\omega_0$

$\Rightarrow \ln\omega = -\frac{12K}{mL^2}t + \ln\omega_0 \Rightarrow \ln\omega - \ln\omega_0 = -\frac{12K}{mL^2}t$

$\ln\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{12K}{mL^2}t \Rightarrow \omega = \omega_0 e^{-\left(-\frac{12K}{mL^2}\right)t}$

$en\ posant\ \lambda = \frac{12K}{mL^2} = \frac{12 \times 1{,}5.10^{-4}}{0{,}3^2} = 2 \times 10^{-2}$

$d'où:\ \omega = \omega_0 e^{-\lambda t}$

c)) Temps t où $\omega = \frac{\omega_0}{2}$

$\omega = \frac{\omega_0}{2} = \omega_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t}\ - ln2 = -\lambda t$

$\Rightarrow t = \frac{ln2}{\lambda} = \frac{ln2}{0{,}02} = 34{,}65s$

d)) Valeur de ω à $t = 10s$

$$\omega = \omega_0 e^{-\lambda t} = 2\pi N_0 e^{-\lambda t} = 2\pi \times \frac{1400}{60}e^{-0{,}02\times 10} = 120 rad.s^{-1}$$

Solution 13

1. Équation cartésienne de la trajectoire de la bille

- Condition initiale

$$\vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 \sin\beta \\ v_{0y} = v_0\cos\beta \end{vmatrix}\ et\ \overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}$$

La bille est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

T.C.I : $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix}\ ,\quad \vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0\sin\beta \\ v_y = -gt + v\cos\beta \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = (v_0\sin\beta)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\cos\beta)t \end{vmatrix}$$

$$x = (v_0\sin\beta)t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\sin\beta}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{g}{2{v_0}^2\sin^2\beta}x^2 + \frac{1}{\tan\beta}x$$

2. a)) Caractéristique de la vitesse juste avant le choc

- point d'application : A ;
- direction : horizontale ;
- sens : vers la droite ;
- intensité : $v_A = v_0 x = v_0\sin\beta = 5 \times \sin 30° = 2{,}5 m.s^{-1}$

b)) Hauteur maximale atteinte par la bille

En A la vitesse est horizontale, alors $V_A y = 0$

R.I.T : suivant Oy :

$${v_{Ay}}^2 - {v_{0y}}^2 = 2a_y(y_A - y_O) \Rightarrow -{v_{0y}}^2 = -2gy_A \Rightarrow$$

$$H_{max} = y_A = \frac{{v_0}^2\cos^2\beta}{2g} = \frac{5^2 \times \cos^2 30°}{20} = 2{,}97 \times 10^{-2}m$$

3. Angle atteint par la bille et la cible après le choc

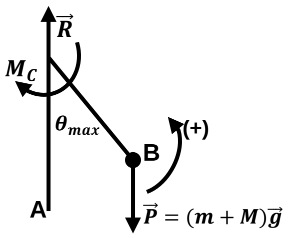
Si la bille et la cible reste solidaire, alors le choc est avec accrochage

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$m\vec{v_A} = (m+M)\vec{v} \Rightarrow v = \frac{m}{m+M}v_A = \frac{10}{10+30}\times 2{,}5$$

Soit : $v = 0{,}625 m.s^{-1}$

Quand le système atteint la hauteur maximale, sa vitesse s'annule.



- Conservation de l'énergie mécanique donne : $E_A = E_B$

$$E_A = E_{CA} = \frac{1}{2}(m+M)v^2 \ et$$

$E_B = E_{CB} + E_P = \frac{1}{2}C{\theta_m}^2 + (m+M)gh$ où $h = l(1-\cos\theta_m)$

Or pour θ_m plus petit :

$$\cos\theta_m \sim 1 - \frac{{\theta_m}^2}{2} \Rightarrow E_B = \frac{1}{2}C{\theta_m}^2 + (m+M)gl\frac{{\theta_m}^2}{2}$$

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{1}{2}C{\theta_m}^2 + (m+M)gl\frac{{\theta_m}^2}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_m = v \times \sqrt{\frac{m+M}{C+(m+M)gl}}$$

$$A.N: \theta_m = 0{,}625\sqrt{\frac{40\times10^{-3}}{0{,}96+40.10^{-3}\times10\times0{,}1}} = 0{,}125rad$$

4. Nature du mouvement de l'ensemble

Le système est soumis à son $\vec{P} = (m+M)\vec{g}$ *et à la réaction* $\vec{R}$

R.F.D:(en rotation) : $M(\vec{R}) + M(\vec{P}) + M_C = J_\Delta\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow 0 - (m+M)gl\sin\theta - C\theta = (m+M)l^2\ddot{\theta}$$

$$Or\ sin\theta \sim \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{((m+M)gl+C)}{(m+M)l^2}\theta = 0$$

$$Posons: {\omega_0}^2 = \frac{((m+M)gl+C)}{(m+M)l^2}$$

Alors : $\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0$, alors on a un mouvement de rotation sinusoïdal.

5. Équation horaire du mouvement

La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$\theta = \theta_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

A t = 0s, $\theta_0 = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$;

$$\theta(t) = \theta_m\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{((m+M)gl+C)}{(m+M)l^2}}$$

$$A.N:\ \omega_0 = \sqrt{\frac{40\times10^{-3}\times10\times0{,}1+0{,}96}{40\times10^{-3}\times0{,}1^2}} = 50rad.s^{-1}$$

$$\theta(t) = 0{,}125\cos\left(50t + \frac{\pi}{2}\right)$$

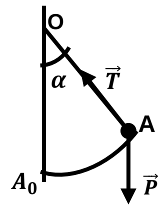
6. Variation de la fréquence si la masse de la tige augmente

$$\omega = 2\pi N \Rightarrow N = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{((m+M)gl+C)}{(m+M)l^2}},$$

alors si on augmente la masse M la pulsation, la période et la fréquence diminue.

Solution 14

1. a)) Nature du mouvement du pendule



$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2 + mgh,$$

$$avec\ J = ml^2\ \ et\ h = l(1-cos\ \alpha)$$

$$E_m = \frac{1}{2}\mathrm{m}l^2\dot{\alpha}^2 + \mathrm{mgl}(1-\cos\alpha)$$

Le système est isolé, donc $E_m = \text{cste} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}\mathrm{m}l^2\frac{d\dot{\alpha}^2}{dt} + \mathrm{mgl}\frac{d}{dt}(1-\cos\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{m}l^2(2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}) + \mathrm{mgl}(\dot{\alpha}\sin\alpha) = 0$$

$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}sin\ \alpha = 0$ or pour α plus petit $sin\ \alpha \sim \alpha \ \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$

Cet équation différentielle caractérise un mouvement de rotation sinusoïdale.

b)) Équation horaire du mouvement

La solution de l'équation différentielle est :$\alpha = \alpha_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$

A t = 0s, $\alpha_0 = \alpha_m \ \Rightarrow \ \varphi = 0$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha_m\cos(\omega_0 t)\ \ où\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}8}} = 3{,}54$$

Soit $\alpha = 0{,}2\cos(3{,}54t)$

c)) Valeur maximale de la vitesse et de l'accélération

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = -0{,}2(3{,}54)\sin(3{,}54t) = -0{,}708\sin(3{,}54t)$$

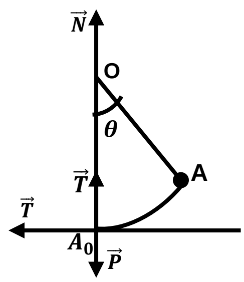
$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_m\cos\left(3{,}54t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dot{\alpha}_m = 0{,}708rad.s^{-1}$ et

$$\ddot{\alpha}_m = 0{,}708(3{,}54) = 2{,}5rad.s^{-2}$$

2. Vitesse de la masse m et la norme de la tension du fil à l'équilibre :

a)) Si la masse m est abandonnée sans vitesse initiale

La masse m est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.



T.E.C : entre A et A_0

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgh = mgl(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

$$A.N:\ v_0 = \sqrt{20\times0{,}8(1-\cos\frac{\pi}{3})}$$

$$soit\ \ v_0 = 2{,}83m.s^{-1}$$

T.C.I : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$, suivant $\vec{N}$:

$$-mg + T = m\frac{{v_0}^2}{l} \Rightarrow T = m\left(g + \frac{{v_0}^2}{l}\right)$$

$$A.N:\ \ T = 5.10^{-2}\left(10 + \frac{2{,}83^2}{0{,}8}\right) = 1N$$

b)) Si la masse m est lancée avec une énergie $E_C = 0{,}24J$

Appliquons la conservation de l'énergie mécanique entre A et A_0

$$E_0 = E_{C0} = \frac{1}{2}m{v_0}^2 = E \Longrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$A.N:\ v_0 = \sqrt{\frac{2\times 0{,}24}{0{,}05}} = 3{,}10m.s^{-1}$$

$$T = m\left(g + \frac{{v_0}^2}{l}\right) = 5.10^{-2}\left(10 + \frac{3{,}10^2}{0{,}8}\right) = 1{,}1N$$

3. Valeur de la vitesse v_0

T.EC : $\frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -mgh = -2gl$

$\Longrightarrow v_0 = \sqrt{v^2 + 4gl} = \sqrt{4 + 40\times 0{,}8} = 6m.s^{-1}$

Solution 15

1. a)) Moment d'inertie du système S

$J_\Delta = J_0 + MOI^2 + md^2 + m(d+R)^2$

$$J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m\left(\frac{R}{2} + R\right)^2$$

$$J_\Delta = \frac{3}{4}MR^2 + \frac{1}{4}mR^2 + \frac{9}{4}mR^2 = \frac{1}{3}(3M + 10m)R^2$$

$$A.N:\ J_\Delta = \frac{1}{3}(3\times 0{,}1 + 10\times 10^{-2})10^{-2} = 10^{-3}kg.m^2$$

b)) Équation différentielle du système S

Détermination du centre d'inertie du système S

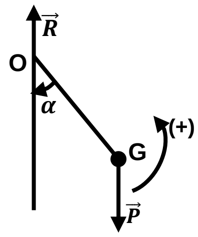
$$(m_1 + m_2 + M)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OB_1} + m_2\overrightarrow{OB_2} + M\overrightarrow{OI}$$

$$(2m + M)OG = -m\frac{R}{2} + m\left(\frac{R}{2} + R\right) + M\frac{R}{2} = mR + M\frac{R}{2}$$

$$(2m + M)OG = (2m + M)\frac{R}{2} \Longrightarrow OG = \frac{1}{2}R$$

Le système est soumis à son

$\vec{P} = (2m + M)\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$



R.F.D:(en rotation) :

$M(\vec{R}) + M(\vec{P}) = J_\Delta\ddot{\alpha}$

$\Longrightarrow 0 - (2m + M)gOG\sin\alpha = J_\Delta\ddot{\alpha}$

Or pour α plus petit sinα~α

$$\Longrightarrow\ \ddot{\alpha} + \frac{(2m + M)gR}{2J_\Delta}\alpha = 0\ ;\ posons:\ {\omega_0}^2 = \frac{(2m + M)gR}{2J_\Delta}$$

$$\Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{(2m + M)gR}{2J_\Delta}}$$

$$A.N: \omega_0 = \sqrt{\frac{(2\times 10.10^{-3} + 0{,}1)10\times 0{,}1}{2\times 10^{-3}}} = 7{,}74rad.s^{-1}$$

Alors : $\ddot{\alpha} + {\omega_0}^2\alpha = 0 \Longrightarrow \ddot{\alpha} + 60\alpha = 0$

Équation horaire du mouvement

La solution de l'équation différentielle est : $\alpha = \alpha_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$

A $t = 0s, \alpha_0 = \alpha_m \ \Longrightarrow\ \varphi = 0 \Longrightarrow \alpha = \alpha_m\cos(\omega_0 t)$

$$\Longrightarrow \alpha = 0{,}1\cos(7{,}74t)$$

2. a)) Expression de l'énergie mécanique

$$E_m = E_C + E_{PP} + E_{PE}\ ;\ E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\alpha}^2.$$

$$E_{PP} = (2m + M)OG(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}(2m + M)R(1 - \cos\alpha)$$

$$E_{PE} = \frac{1}{2}C_1x^2 + \frac{1}{2}C_2x^2\ ,or\ C = \frac{K}{AB}\ et\ C_1 = \frac{K}{OA}$$

$$\Longrightarrow CAB = C_1OA \Longrightarrow Cl = \frac{1}{2}C_1 l \Longrightarrow C_1 = 2C$$

$$E_{PE} = \frac{1}{2}\times 2Cx^2 + \frac{1}{2}\times 2Cx^2 = 2Cx^2$$

$$\Longrightarrow E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(2m + M)R(1 - \cos\alpha) + 2Cx^2$$

- Déduisons l'équation différentielle

Le système est isolé, donc $E_m = \text{cste} \Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}J_\Delta\frac{d\dot{\alpha}^2}{dt} + \frac{1}{2}(2m + M)gR\frac{d}{dt}(1 - \cos\alpha) + 2C\frac{d\alpha^2}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2}J_\Delta(2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}) + \frac{1}{2}(2m + M)gR(\dot{\alpha}\sin\alpha) + 2C(2\dot{\alpha}\alpha) = 0$$

or α plus faible alors: $\sin\alpha \sim \alpha$

$$J_\Delta\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}(2m + M)gR\alpha + 4C\alpha = 0$$

$$\Longrightarrow \ddot{\alpha} + \frac{(2m + M)gR + 8C}{2J_\Delta}\alpha = 0$$

$$posons:\ {\omega_0}^2 = \frac{(2m + M)gR + 8C}{2J_\Delta} \Longrightarrow \ddot{\alpha} + {\omega_0}^2\alpha = 0$$

Cet équation différentielle caractérise un mouvement de rotation sinusoïdale.

b))Valeur de la constante de torsion C

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Longrightarrow {T_0}^2 = \frac{4\pi^2}{{\omega_0}^2} = \frac{4\pi^2\times 2J_\Delta}{(2m + M)gR + 8C}$$

$$\Longrightarrow 8C = \frac{8\pi^2\times J_\Delta}{{T_0}^2} - (2m + M)gR$$

$$\Longrightarrow C = \frac{1}{8}\left(\frac{8\pi^2\times J_\Delta}{{T_0}^2} - (2m + M)gR\right)$$

$$A.N:\ C = \frac{1}{8}\left(\frac{8\times 10\times 10^{-3}}{0{,}5^2} - (20 + 100)\times 10^{-3}\times 10\times 0{,}1\right)$$

Soit $C = 2{,}5\times 10^{-2}N.m.rad^{-1}$.

Solution 16

A) 1. Énergie totale du disque

Roulement sans glissement :

$$E_C = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}MR^2\frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4}Mv^2$$

2. Accélération linéaire du disque

Le disque est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$.

T.E.C : $\frac{3}{4}Mv^2 = Mgxsin\alpha\ \Longrightarrow \frac{3}{4}M\frac{dv^2}{dt} = Mgsin\alpha\frac{dx}{dt}$

$$\Longrightarrow \frac{3}{4}M(2v\dot{v}) = (Mgsin\alpha)v$$

$$\Longrightarrow a = \frac{2}{3}g\sin\alpha = \frac{2}{3}\times 10\times 0{,}5 = 3{,}33m.s^{-2}$$

3. Expression de v après un parcours de longueur l

$$T.E.C : \frac{3}{4}Mv^2 = Mglsin\alpha \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4glsin\alpha}{3}}$$

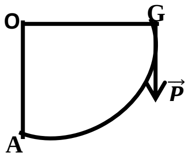
B) 1. Centre de gravité du système

$On\ a : (m + M)\overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OA} \Rightarrow a = OG = \frac{m}{M+m}l$

$$A.N:\ a = \frac{0,2}{1,5} \times 0,6 = 0,08m = 8cm$$

2. Vitesse de G à la position

L'ensemble (disque + masse) est soumis à son poids $\vec{P} = (m + M)\vec{g}$ et à la réaction $\vec{R}$



T.E.C : entre G et A

$\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = (m + M)ga\ \ avec\ J_\Delta = J_0 + ml^2 = \frac{1}{2}MR^2 + ml^2$

$J_\Delta = \frac{1}{2} \times 1,3 \times 10^{-2} + 0,2 \times 0,6^2 = 7,85 \times 10^{-2}kg.m^2$

$\omega = \sqrt{\frac{2(m + M)ga}{J_\Delta}} = \sqrt{\frac{2(0,2 + 1,3).10 \times 0,08}{7,85 \times 10^{-2}}} = 5,53rad.s^{-1}$

$v = a\omega = 0,08 \times 5,53 = \frac{0,44m}{s}$

3. a)) Nature du mouvement du système

R.F.D (en rotation) avec $\sin\theta \sim \theta$

$M(\vec{R}) + M(\vec{P}) = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow 0 - (m + M)gOG\sin\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} + \frac{(m + M)ga}{J_\Delta}\theta = 0\ ;\ posons:\ {\omega_0}^2 = \frac{(m + M)ga}{J_\Delta}$

$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{(m + M)ga}{J_\Delta}} = \sqrt{\frac{1,5 \times 10 \times 0,08}{7,85 \times 10^{-2}}} = \frac{3,91rad}{s}$

Alors : $\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + 15,28\theta = 0$

Cet équation différentielle caractérise un mouvement de rotation sinusoïdale.

b)) Vitesse angulaire à la position d'équilibre

La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$\theta = \theta_m\sin(\omega_0 t + \varphi)$

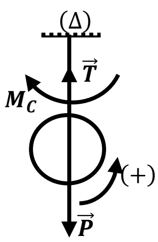
$\dot{\theta} = \theta_m\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)\quad or\ à\ l'équilibre\ |\cos(\omega_0 t + \varphi)| = 1$

$\Rightarrow \dot{\theta} = \theta_m\omega_0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0,1 \times 3,91 = 0,391rad.s^{-1}$

C) 1. Nature du mouvement et la valeur de la période T_0

La masse m est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.

R.F.D (en rotation) :



$M(\vec{R}) + M(\vec{P}) + M_C = J_\Delta\ddot{\theta}$

$\Rightarrow\ -C\theta = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$

C'est une équation du différentielle du second degré sans amortissement, caractérise un mouvement de rotation sinusoïdale de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$.

Le mouvement est périodique de période propre :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{2C}}$$

$$A.N:\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1,3 \times 10^{-2}}{2 \times 6,5.10^{-3}}} = 6,28s$$

2. a)) Expression de T en fonction de (T_0, L, X)

R.F.D (en rotation) :

$$M(\vec{R}) + M(\vec{P}) + M_{C1} + M_{C2} = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow\ -C_1\theta - C_2\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(C_1 + C_2)}{J_\Delta}\theta = 0$$

$$Or\ C_1X = C_2(L - X) = CL \Rightarrow C_1 = \frac{CL}{X}\ \ et\ C_2 = \frac{CL}{L - X}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{CL}{J_\Delta}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{L - X}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{CL^2}{J_\Delta X(L - X)}\theta = 0\ \Rightarrow \omega^2 = \frac{CL^2}{J_\Delta X(L - X)}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{CL^2}{J_\Delta X(L - X)}}\ \text{ et }\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta X(L - X)}{CL^2}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} \times \frac{1}{L}\sqrt{X(L - X)} = \frac{T_0}{L}\sqrt{X(L - X)}$$

b)) Valeur de X si la période T est maximale

La période T est maximale si et seulement si

$$\frac{dT}{dX} = 0 = L - 2X \Rightarrow X = \frac{L}{2}$$

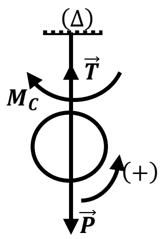
La période maximale est :

$$T_{max} = \frac{T_0}{L}\sqrt{\frac{L}{2}(L - \frac{L}{2})} = \frac{T_0}{2} = \frac{6,28}{2} = 3,14s$$

Solution 17

I. 1. Équation différentielle du mouvement

La masse m est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.



R.F.D (en rotation) :

$M(\vec{R}) + M(\vec{P}) + M_C = J_\Delta\ddot{\theta}$

$\Rightarrow\ -C\theta = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$

C'est une équation du différentielle du second degré sans amortissement, caractérise un mouvement de rotation sinusoïdale de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$

2. Valeur de la période T_0

Le mouvement est périodique de période propre :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{2C}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0,2 \times 0,2^2}{2 \times 10^{-2}}} = 3,97s$$

II. 1. Montrons que $J'_\Delta = \alpha + \beta d^2$

$$J'_\Delta = J_0 + m_1 d^2 + m_2 d^2 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{M}{2}d^2 + \frac{M}{2}d^2$$

$\Longrightarrow J'_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 + Md^2 = \alpha + \beta d^2$

Avec $\alpha = J_0 = \frac{1}{2}MR^2$ et $\beta = M$

2. a)) Expression de la nouvelle période T_1 :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\Delta'}}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2 + 2Md^2}{2C}}$$

b)) Si d = 0 , alors : $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{2C}} = T_0 = 3{,}97s$

3.a)) Équation horaire du mouvement

L'équation horaire du mouvement est de la forme

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \;\; et \;\; \dot\theta = -\theta_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Or à t = 0, $\theta = 0 \Longrightarrow \cos\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}rad$

$\Longrightarrow \theta(t) = \theta_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$ $Avec$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta'}}}$

$$avec\; J'_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 + Md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}MR^2$$

$$A.N\; \omega_0 = \sqrt{\frac{4C}{3MR^2}} = \sqrt{\frac{4.10^{-2}}{3 \times 0{,}2 \times 0{,}2^2}} = 1{,}29 rad.s^{-1}$$

$$\Longrightarrow \theta(t) = 2\cos\left(1{,}29t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \dot\theta(t) = -2 \times 1{,}29 \sin\left(1{,}29t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \dot\theta(t) = -2{,}58 \sin\left(1{,}29t + \frac{\pi}{2}\right) = 2{,}58\cos(1{,}29t)$$

b)) Accélération angulaire lorsque l'élongation est maximale

$\ddot\theta = -2{,}58 \times 1{,}29\cos\left(1{,}29t + \frac{\pi}{2}\right) = -3{,}33\cos\left(1{,}29t + \frac{\pi}{2}\right)$

L'élongation est maximal si et seulement $|\cos(1{,}29t)| = 1$,

alors $\ddot\theta = -3{,}33 rad.s^{-2}$

c)) Montrons que l'énergie mécanique du pendule est constante et la calculer

$$E_m = E_C + E_{PE} = \frac{1}{2}J_{\Delta'}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$$

$$or\; \theta(t) = \theta_m\cos(\omega_0 t + \varphi)\; et\; \dot\theta = -\theta_m\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_m = \frac{1}{2}J_{\Delta'}{\theta_m}^2{\omega_0}^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}C{\theta_m}^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$or\;\; {\omega_0}^2 = \frac{C}{J_{\Delta'}}$$

$$E_m = \frac{1}{2}C{\theta_m}^2[sin^2(\omega_0 t + \varphi) + cos^2(\omega_0 t + \varphi)]$$

$E_m = \frac{1}{2}C{\theta_m}^2 = cste$, $\quad A.N: E_m = \frac{1}{2}.10^{-2} \times 2^2 = 2 \times 10^{-2}J$

Remarques :

- L'énergie potentielle de pesanteur du pendule de torsion dans le champ de pesanteur terrestre est constante (nulle) du fait que son centre d'inertie reste dans un plan horizontal ($z = cste$).
- On peut établir l'équation différentielle du mouvement à partir de l'expression de l'énergie mécanique :

En effet, $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot\theta^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 = cste$

$$\Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}J_\Delta\frac{d\dot\theta^2}{dt} + \frac{1}{2}C\frac{d\theta^2}{dt} = \frac{1}{2}J_\Delta(2\dot\theta\ddot\theta) + \frac{1}{2}C(\theta\dot\theta) = 0$$

Alors : $J_\Delta\ddot\theta + C\theta = 0 \Longrightarrow \ddot\theta + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$

III. 1. Montrons que $T_2 = \frac{T_0}{L}\sqrt{L_1 \times L_2}$

R.F.D (en rotation) :

$$M(\vec R) + M(\vec P) + M_{C1} + M_{C2} = J_\Delta\ddot\theta \Longrightarrow -C_1\theta - C_2\theta = J_\Delta\ddot\theta$$

$$\Longrightarrow \ddot\theta + \frac{(C_1 + C_2)}{J_\Delta}\theta = 0$$

Or $C_1L_1 = C_2L_2 = CL \Longrightarrow C_1 = \frac{CL}{L_1}$ et $C_2 = \frac{CL}{L_2}$

$$\Longrightarrow \ddot\theta + \frac{CL}{J_\Delta}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\theta = 0$$

$$\ddot\theta + \frac{CL^2}{J_\Delta L_1 \times L_2}\theta = 0 \;\; \Longrightarrow \omega^2 = \frac{CL^2}{J_\Delta L_1 \times L_2} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{CL^2}{J_\Delta L_1 \times L_2}}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta L_1 \times L_2}{CL^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} \times \frac{1}{L}\sqrt{L_1 \times L_2}$$

$$D'où\!:\; T_2 = \frac{T_0}{L}\sqrt{L_1 \times L_2}$$

2. Application numérique

$L_1 = 80cm\; et\; L_2 = \mathrm{L} - L_1 = 120 - 80 = 40\mathrm{cm}$

$$T_2 = \frac{3{,}97}{1{,}20} \times \sqrt{0{,}8 \times 0{,}4} = 1{,}87\mathrm{s}$$

3. Si $L_1 = L_2 \Longrightarrow \mathrm{L} = 2L_1 \;\Longrightarrow T'_2 = \frac{T_0}{L}\sqrt{{L_1}^2} = \frac{T_0}{L}L_1$

$$T'_2 = \frac{T_0}{L} \times \frac{L}{2} = \frac{T_0}{2} = \frac{3{,}97}{2} = 1{,}985\mathrm{s}$$

D'où Si $L_1 = L_2$, la période des oscillations est maximale.

Solution 15

I.1. Relation donnant l'allongement à l'équilibre

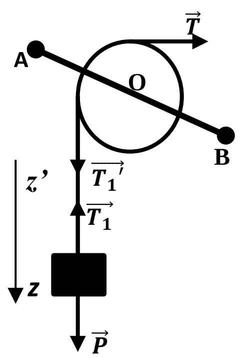
A l'équilibre :$M(\vec T) + M(\vec{T'}_1) = 0$

$$\Longrightarrow -Tr + T'_1 r = 0$$

$$Or\; T'_1 = T_1 = P = Mg$$

$$\Longrightarrow T = k\Delta l = T'_1 = Mg \Longrightarrow \Delta l = \frac{Mg}{k}$$

2. a)) Montrons que le disque va prendre un mouvement de rotation sinusoïdal



- Pour le disque en mouvement :

R.F.D (en rotation) :

$$M(\vec{T}) + M(\vec{T'_1}) = J\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -Tr + T'_1 r = J\ddot{\theta} \Rightarrow -k(x+\Delta l) + T'_1 = J\frac{\ddot{\theta}}{r}\ (1)$$

- Pour le solide de masse M

T.C.I : $\vec{P} + \vec{T_1} = M\vec{a}$ $suivant\ z'z : Mg - T_1 = Ma = Mr\ddot{\theta}$

$$T_1 = Mg - Mr\ddot{\theta}\ (2)$$

$$-k(x+\Delta l) + Mg - Mr\ddot{\theta} = J\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -kx - k\Delta l + Mg = \left(Mr + \frac{J}{r}\right)\ddot{\theta}\ , or\ x = r\theta\ \ et$$

A l'équilibre : $-k\Delta l + Mg = 0$

$$\Rightarrow -kr\theta = \left(Mr + \frac{J}{r}\right)\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{kr^2}{Mr^2+J}\theta = 0$$

$$soit\ \ \ddot{\theta} + \left(\frac{k}{M+\frac{J}{r^2}}\right)\theta = 0\ ,$$

C'est une équation de second degrés sans second membre, caractérise un mouvement de rotation sinusoïdal.

b)) <u>Relation donnant la période T_0</u>

D'après l'équation différentielle précédente

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+\frac{J}{r^2}}}\ \ et\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M+\frac{J}{r^2}}{k}}$$

II. 1. <u>Expression de la nouvelle période T_1</u>

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M+\frac{J_1}{r^2}}{k}}\ \ \text{où}\ J_1 = J + m_A d^2 + m_B d^2 = J + 2m_A d^2$$

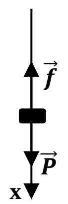
$$\Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M+\frac{J+2m_A d^2}{r^2}}{k}}$$

2. Si d =0 , alors : $T_1 = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M+\frac{J}{r^2}}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2M+m}{2k}}$

$$car\ J = \frac{1}{2}mr^2\ \ A.N:\ T_1 = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times 2,5+1}{200}} = 1,088s$$

III. 1. <u>Équation différentielle liant la vitesse v</u>

La masse M est soumise à son poids $\vec{P} = M\vec{g}$ et à la force de frottement visqueux $\vec{f} = -K\vec{v}$



T.C.I : $M\vec{g} - k\vec{v} = M\vec{a}$ $,suivant\ x :$

$$Mg - kv = Ma = M\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{M}v - g = 0$$

Vérifions que la solution de l'équation différentielle est de la forme : $v = \frac{Mg}{k} + Ce^{-kt/M}$

$$\frac{dv}{dt} = -C\frac{k}{M}e^{-kt/M} \Rightarrow -C\frac{k}{M}e^{-kt/M} + g + \frac{Cke^{-kt/M}}{M} - g = 0$$

$\Rightarrow v = \frac{Mg}{k} + Ce^{-kt/M}$ est solution de cette équation différentielle.

2. a)) <u>Expression de C en fonction de v_0, M, g et k</u>

Conditions initiales : à t=0s : $v_0 = \frac{Mg}{k} + Ce^0 \Rightarrow C = v_0 - \frac{Mg}{k}$

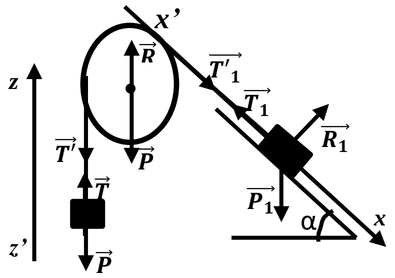
b)) Montrons que la vitesse de M atteint une valeur limite dont on précisera :

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{Mg}{k} + Ce^{-kt/M}\right) = \frac{Mg}{k} = cste$$

$$D'où: v_{limite} = \frac{Mg}{k}$$

<u>Solution 19</u>

1. a)) <u>Valeur de l'angle α en degré</u>



- Pour le disque :

R.F.D (en rotation) : $\sum M(\vec{F_{ext}}) = J\ddot{\theta} \Rightarrow T'_1 r + T'r = J\ddot{\theta} = J\frac{a}{r}$

$$T'_1 - T' = J\frac{a}{r^2} = \frac{1}{2}Mr^2\frac{a}{r^2} \Rightarrow T'_1 - T' = \frac{1}{2}Ma\ \ (1)$$

- Pour la masse m_1

T.CI : $\vec{P_1} + \vec{T_1} + \vec{R_1} += m_1\vec{a}$

Suivant x'x :

$$m_1 g\sin\alpha - T_1 = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1 g\sin\alpha - m_1 a\ (2)$$

- Pour la masse m

T.CI : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$: Suivant z'z :

$$-mg + T = Ma \Rightarrow T = mg + ma\ (3)$$

$Or\ \ T_1 = T'_1\ \ et\ \ T = T'$ alors :

$$m_1 g\sin\alpha - m_1 a - mg - ma = \frac{1}{2}Ma$$

$$a\left(\frac{M}{2} + m + m_1\right) = m_1 g\sin\alpha - mg$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{a\left(\frac{M}{2} + m + m_1\right) + mg}{m_1 g}$$

$$A.N:\ \sin\alpha = \frac{2,5\left(\frac{0,2}{2} + 0,1 + 0,7\right) + 0,1\times 10}{0,7\times 10} = 0,46$$

$$Soit\ \ \alpha = 27,38°$$

b)) <u>Travaille de la tension T_1 entre A et B</u>

$W(\vec{T_1}) = T_1 \times AB$ $,avec\ \ T_1 = m_1(g\sin\alpha - a)$

$A.N:\ = T_1 = 0,7(10\times 0,46 - 2,5) = 1,47N$

R.I.T : $v_B{}^2 = 2aAB \Rightarrow AB = \frac{v_B{}^2}{2a} = \frac{4^2}{2\times 2,5} = 3,2m$

$$A.N : W(\vec{T}_1) = 1{,}47 \times 3{,}2 = 4{,}70J$$

- Durée de la phase AB : $v_B = at_{AB} \Rightarrow t_{AB} = \frac{v_B}{a} = \frac{4}{2{,}5} = 1{,}6s$

- Nombrez de tours effectués

$$R.I.T : \omega^2 = \left(\frac{v_B}{r}\right)^2 = 2\ddot{\theta}\theta = 2\frac{a}{r} \times 2\pi n \Rightarrow n = \frac{{v_B}^2}{4\pi ar}$$

$$A.N : n = \frac{4^2}{4\pi \times 2{,}5 \times 0{,}1} = 5tours$$

2. Valeur de la masse m_2 et le racourssiment maximale X_m

- Après le choc , les deux solides s'accrochentdonc il y a conservation de la quantité de mouvement, c'à dire la quantité de mouvement avant le choc est égale à la quantité de mouvement après le choc.

$$(m_1 + m_2)\vec{v_G} = m_1\vec{v_B} \Rightarrow m_2 v_G = m_1(v_B - v_G)$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{m_1(v_B - v_G)}{v_G}, \qquad \text{A.N: } m_2 = \frac{700(4-2)}{2} = 700g$$

- Comme les deux solides glissent sans frottement sur le plan horizontal, alors le système est conservatif, il y a donc conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{mf} = E_{mi} \Rightarrow E_{Cf} + E_{Pf} = E_{Ci} + E_{Pi} \; or \; E_{Pi} = 0 \; et \; E_{Cf} = 0$$

$$\Rightarrow E_{Pf} = E_{Ci} \Rightarrow \frac{1}{2}k{X_m}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2){v_G}^2$$

$$\Rightarrow X_m = v_G\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{k}} = 2\sqrt{\frac{(0{,}7 + 0{,}7)}{400}} = 0{,}118m = 0{,}12m$$

3. a)) Équation différentielle du mouvement

$$E_m = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cste$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{d\dot{x}^2}{dt} + \frac{1}{2}k\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2}k(2x\dot{x}) = 0$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m_1 + m_2}x = 0$$

Posons $\omega^2{}_0 = \frac{k}{m_1+m_2} \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2{}_0 x$, c'est une équation différentielle du second ordre sans second membre caractérise un mouvement rectiligne sinusoïdal.

Valeur de la période du mouvement

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}7 + 0{,}7}{400}} = 0{,}37s$$

b)) Loi horaire du mouvement

La solution de l'équation différentielle (1) est de la forme $x(t) = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

A t=0, $x_0 = x_m = x_m\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$.

$$x(t) = x_m\cos(\omega_0 t) \; avec \; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0{,}37} = 16{,}98rad.s^{-1},$$

D'où: $x(t) = 0{,}12\cos(16{,}98t)$.

Solution 20

1. a)) Accélération du cerceau par rapport à son centre d'inertie G

Roulement sans glissement :

$$E_C = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}MR^2\frac{v^2}{R^2} = Mv^2$$

Le disque est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$.

T.E.C : $Mv^2 = Mgxsin\alpha \Rightarrow M\frac{dv^2}{dt} = Mgsin\alpha\frac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow M(2v\dot{v}) = (Mgsin\alpha)v$$

$$a = \frac{1}{2}g\sin\alpha = \frac{1}{2} \times 10 \times 0{,}5 = 2{,}5m.s^{-2}$$

b)) Expression de v après un parcours de longueur l

T.E.C: $Mv^2 = Mglsin\alpha \Rightarrow v = \sqrt{glsina}$

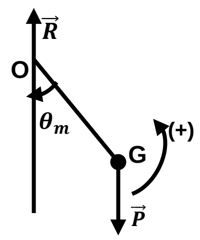
2. a)) Moment d'inertie du cerceau par rapport à (Δ)

Théorème de Huygens :

$$J_\Delta = J_G + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

$$A.N : J_\Delta = 2 \times 0{,}2^2 = 0{,}08kg.m^2$$

b)) Équation différentielle du mouvement



Le système S de masse M est soumis à son poids $\vec{P} = M\vec{g}$ et à la réaction $\vec{R}$

R.F.D (en rotation) : $\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$M(\vec{P}) + M(\vec{R}) = J_\Delta\ddot{\theta}$, or $M(\vec{R}) = 0$

Alors : $-Mg\sin\theta\, OG = J_\Delta\ddot{\theta}$

Pour des oscillation de faible amplitude, $\sin\theta \sim \theta \Rightarrow Mg\theta OG = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mg}{J_\Delta}OG\theta = 0$

posons ${\omega_0}^2 = \frac{Mg}{J_\Delta}OG \Rightarrow \ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficient constant, caractérise un mouvement de rotation sinusoïdal.

- Pulsation propre et la période propre des oscillations

$${\omega_0}^2 = \frac{Mg}{J_\Delta}OG = \frac{MgR}{2MR^2} = \frac{g}{2R} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

$$A.N : \omega_0 = \sqrt{\frac{10}{2 \times 0{,}2}} = 5rad.s^{-1} \; et \; T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{5} = 1{,}25s$$

- Équation horaire du mouvement

L'équation différentielle admet comme solution :

$$\theta = \theta_m\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{A t} = 0s, \theta_0 = \theta_m \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \theta_m\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta_m = 10° = \frac{10\pi}{180} = 0{,}17rad \Rightarrow \theta = 0{,}17\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Vitesse angulaire du cerceau à son passage de l'équilibre

$$\dot{\theta} = 5 \times 0{,}17\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}85\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$or \; à \; l'équilibre \left|\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1$$

d'où lorsque le cerceau passe à sa position d'équilibre aevc une vitesse $\dot{\theta} = \dot{\theta}_m = 0{,}85rad.s^{-1}$

c)) <u>Longueur l du pendule simple synchrone de ce pendule</u>

- La période du pendule composé est : $T_C = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

- La période du pendule simple est : $T_S = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$$T_C = T_S \Leftrightarrow \frac{2R}{g} = \frac{l}{g} \Rightarrow l = 2R = 2 \times 20 = 40cm.$$

3. a)) <u>Moment d'inertie du système { cerceau + bille} par rapport à l'axe Δ</u>

$$J'_\Delta = J + m(2R)^2 = 2MR^2 + 4mR^2 = 2MR^2 + 4 \times \frac{M}{2}R^2$$

$$soit\ J'_\Delta = 4MR^2 = 4 \times 0{,}2^2 = 0{,}16kg.m^2$$

b)) <u>Loi horaire du mouvement du système</u>

L'équation différentielle du système {cerceau +bille} est de la forme : $\ddot{\theta} + \frac{MgOG'}{J'_\Delta}\theta = 0$

Centre d'inertie du système OG' :

$$(M+m)\overrightarrow{OG'} = M\overrightarrow{OG} + m\overrightarrow{OA}$$

$$\Rightarrow \left(M + \frac{M}{2}\right)\overrightarrow{OG'} = M\overrightarrow{OG} + \frac{M}{2}\overrightarrow{OA}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}M \times OG' = MR + \frac{M \times 2R}{2} \Rightarrow OG' = \frac{4}{3}R$$

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg \times \frac{4}{3}R}{4MR^2}\theta = 0 \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{3R}\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{3R}} = \sqrt{\frac{10}{3\times 0{,}2}} = 4{,}08rad.s^{-1}$$

L'équation différentielle admet comme solution :

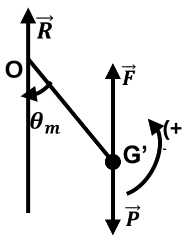
$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{A t = 0s,} \quad \theta_0 = \theta_m \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \theta_m \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta_m = 10° = \frac{10\pi}{180} = 0{,}17rad \Rightarrow \theta(t) = 0{,}17\sin\left(4{,}08t + \frac{\pi}{2}\right)$$

c)) <u>Valeur de la période T'_0</u> : $T'_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4{,}08} = 1{,}54s$

4. <u>Intensité de la force $\vec{F}$</u>



R.F.D (en rotation) :

$$\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J'_\Delta\ddot{\theta}$$

$M(\vec{P}) + M(\vec{R}) + M(\vec{F}) = J'_\Delta\ddot{\theta}$;

or $M(\vec{R}) = 0$

$$-Mg\sin\theta\, OG' + F\, OG'\sin\theta = J'_\Delta\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow (F - Mg)OG'^{\sin\theta} = J'_\Delta\ddot{\theta}$$

Pour des oscillation de faible amplitude, $\sin\theta \sim \theta$

$$donc:\ \ddot{\theta} + \frac{(Mg - F)OG'}{J'_\Delta}\theta = 0$$

$$\text{posons } \omega_0^2 = \frac{(Mg - F)OG'}{J'_\Delta} = \frac{(Mg - F)\times 4R}{3 \times 4MR^2} = \frac{Mg - F}{3R}$$

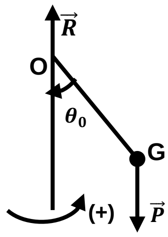
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{Mg - F}}, or\ T'_0 = 2T_0 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{3R}{Mg - F}} = 4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$\Rightarrow \frac{3R}{Mg - F} = \frac{8R}{g} \Rightarrow 8(Mg - F) = 3g$$

$$\Rightarrow F = Mg - \frac{3}{8}g \Rightarrow F = 10 - \frac{10}{8} = 8{,}75N$$

<u>Solution 21</u>

1. a)) <u>Équation différentielle du mouvement</u>



Le solide S de masse m est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la réaction $\vec{R}$

R.F.D (en rotation) :

$$M(\vec{R}) + M(\vec{P}) = J\ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$-mgL\sin\theta = J\ddot{\theta} = mL^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta$$

b)) Pour des oscillations de faible amplitude,

$$\sin\theta \sim \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

En posant $\omega_0^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$, le pendule est harmonique car le solide a un mouvement de rotation sinusoïdal.

Ce mouvement est périodique de période T_0

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{gg}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}8}} = 2s$$

c)) <u>Loi horaire du mouvement</u>

La solution de l'équation différentielle est de la forme

$$\theta(t) = \theta_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

A t=0, $\theta_0 = \theta_m = \theta_m\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \quad \varphi = 0.$

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)\ avec\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi rad.s^{-1},$$

$$x(t) = 0{,}2\cos(\pi t)$$

d)) <u>Énergie mécanique du système</u>

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgh,$$

$$avec\ J = mL^2\ \ et\ h = L(1 - cos\,\theta)$$

$E_m = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos\theta)$ or pour θ plus petit :

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL\frac{\theta^2}{2}$$

2. a)) <u>Nouvelle équation différentielle</u>

R.F.D (en rotation) : $M(\vec{R}) + M(\vec{P}) + M(\vec{f}) = J\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -mgL\sin\theta - h\dot{\theta} = J\ddot{\theta} = mL^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ \ddot{\theta} + \frac{h}{mL^2}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0\ , en\ posant\ \lambda = \frac{h}{2mL^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L}\theta = 0\ (1), car\ \ \sin\theta \sim \theta$$

b)) <u>Montrons qu'on a un mouvement oscillateur amorti</u>

Le mouvement est oscillatoire si le discriminant réduite de l'équation (1) $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0.$

$$\Delta' = \left(\frac{h}{2mL^2}\right)^2 - \frac{g}{L} = \left(\frac{0{,}36}{2 \times 0{,}2}\right)^2 - 9{,}8 = -8{,}99 < 0$$

Comme $\Delta' < 0$, alors le mouvement est oscillatoire amorti

Ce régime oscillatoire est dite pseudo-périodique

<u>Calculons la pseudo-périodique T</u> :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \text{ où } \Omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2} = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{h}{2mL^2}\right)^2}$$

$$\Omega = \sqrt{9{,}8 - \left(\frac{0{,}36}{2\times 0{,}2}\right)^2} = 3rad.s^{-1} \text{ et } T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{3} = 2{,}094s$$

c)) La loi horaire est de la forme

$$\theta(t) = \theta_m e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi) \quad avec\ \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

Déterminons θ_m $et\ \varphi$

La solution générale de l'équation (1) avec $\Delta < 0$, s'écrit sous la forme :

$\theta(t) = \theta_m e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi)$ Avec $\Omega^2 = {\omega_0}^2 - \lambda^2$.

Les conditions initiales s'écrit :

$\theta(t=0) = \theta_0 \ et\ \dot\theta(t=0) = 0$

$\theta(t=0) = \theta_0 = \theta_m cos\varphi\ et$

$\dot\theta(t=0) = -\lambda\,\theta_m cos\varphi - \Omega\theta_m sin\varphi = 0$

$\Rightarrow \lambda\,\theta_m cos\varphi = \Omega\theta_m sin\varphi \ \ et\ \ \theta_0 = \theta_m cos\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} {\theta_0}^2 = {\theta_m}^2 cos^2\varphi \\ \lambda^2{\theta_m}^2 cos^2\varphi = \Omega^2{\theta_m}^2 sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} {\theta_0}^2 = {\theta_m}^2 cos^2\varphi \\ \lambda^2{\theta_m}^2 cos^2\varphi = {\theta_m}^2\,({\omega_0}^2 - \lambda^2) sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} {\theta_0}^2 = {\theta_m}^2 cos^2\varphi \\ \lambda^2{\theta_m}^2 = {\theta_m}^2\,{\omega_0}^2 sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} {\theta_0}^2 = {\theta_m}^2 cos^2\varphi \\ \dfrac{\lambda^2{\theta_m}^2}{{\omega_0}^2} = {\theta_m}^2\, sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda^2{\theta_m}^2}{{\omega_0}^2} + {\theta_0}^2 = {\theta_m}^2$$

$$\Rightarrow\ {\theta_m}^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{{\omega_0}^2}\right) = {\theta_0}^2 \Rightarrow\ {\theta_m}^2\left(\frac{{\omega_0}^2 - \lambda^2}{{\omega_0}^2}\right) = {\theta_0}^2$$

$$\Rightarrow\ {\theta_m}^2 = {\theta_0}^2\left(\frac{{\omega_0}^2 - \lambda^2}{{\omega_0}^2}\right) = {\theta_0}^2\left(\frac{\Omega^2}{{\omega_0}^2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \theta_m = \theta_0\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)$$

$$Or\ -\lambda\,\theta_m cos\varphi = \Omega\theta_m sin\varphi \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\lambda}{\Omega} = -\frac{\lambda}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}$$

$$\Rightarrow tan\,\varphi = -\frac{\lambda}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}$$

Pseudo- périodique du mouvement:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\sqrt{\boldsymbol{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\omega_0}\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{\lambda^2}{{\omega_0}^2}}}} = \frac{\boldsymbol{T_0}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{\lambda^2}{{\omega_0}^2}}}}$$

Remarque **:**

Pour un mouvement oscillatoire amorti :

- L'amplitude maximale est donnée par la relation :

$$\theta_m = \theta_0\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right) = \theta_0\left(\frac{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}{\omega_0}\right)$$

- La phase initiale φ est donnée par la relation :

$$tan\,\varphi = -\frac{\lambda}{\Omega} = -\frac{\lambda}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}$$

- La pseudo-périodique T est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}}$$

Application numérique:

$$\theta_m = 0{,}2\left(\frac{3}{\pi}\right) = 0{,}19rad\ et$$

$$tan\,\varphi = -\frac{\lambda}{\Omega} = -\frac{h}{2mL^2\Omega} = -\frac{0{,}36}{0{,}4\times 3} = -0{,}3$$

$$Soit\ \ \varphi = tan^{-}(-0{,}3) = -0{,}29\text{rad}$$

$$D'où\!:\ \theta_m = 0{,}19rad\ \ et\ \varphi = -0{,}29rad$$

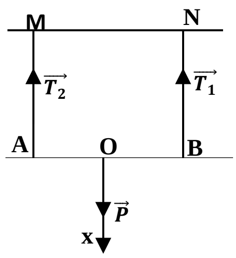
Solution 22

Partie A

1. Allongement et l'énergie potentielle à l'équilibre

T.C.I : $\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{P} = m\vec{a}\ \ or\ à\ l'équilibre\ \vec{a} = \vec{0}\,, alors$

$\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{P} = \vec{0}$: suivant Ox : $-T_1 - T_2 + Mg = 0$



$$\Rightarrow -k\Delta l_E - k\Delta l_E + Mg = 0$$

$$\Rightarrow 2k\Delta l_E = Mg\ \Rightarrow \Delta l_E = \frac{Mg}{2k}$$

$$A.N\!: \Delta l_E = \frac{0{,}1\times 10}{2\times 25} = 0{,}02m$$

$$= 2cm$$

Energie potentielle du système à l'équilibre :

$$E_{PE} = E_{PP} + E_{Pe}\ \ avec\ E_{PP} = 0$$

$$\Rightarrow E_{PE} = \frac{1}{2}k\Delta l^2{}_E + \frac{1}{2}k\Delta {l_E}^2$$

$$E_{PE} = k\Delta {l_E}^2 = 25\times 0{,}02^2 = 10^{-2}J$$

2. a)) Énergie mécanique du système à l'instant t

$$E_m = E_C + E_{PP} + E_{Pe}$$

$$soit\ \ E_m = \frac{1}{2}M\dot x^2 + Mg(-x) + \frac{1}{2}k(\Delta l_E + x)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l_E + x)^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}M\dot x^2 - Mgx + k(\Delta l_E + x)^2$$

b)) Montrons que le système {barre + ressort + terre} est conservatif.

Le système n'est soumis aucune force extérieur, donc le système est isolé. L'énergie mécanique du système se conserve, on dit que le système est conservatif.

Déduisons l'équation différentielle du mouvement de la barre

Système isolé :

$$E_m = cste\ \ \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 = M\dot x\ddot x - Mg\dot x + 2k(\Delta l_E + x)\dot x$$

$$M\ddot x - Mg + 2k\Delta l_E + 2kx = 0\ avec\ \ -Mg + 2k\Delta l_E = 0$$

$$\Rightarrow \ddot x + \frac{2k}{M}x = 0\,, Posons\ \omega^2{}_0 = \frac{2k}{M} \Rightarrow \ddot x + {\omega_0}^2 x = 0$$

La solution de cet équation différentielle est de la forme

$$x(t) = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

A t = 0s, $x = x_m \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow x(t) = x_m \cos(\omega_0 t)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}} = \sqrt{\frac{2\times 25}{0,1}} = 22,36 rad.s^{-1}$$

$\Rightarrow x(t) = 0,04\cos(22,36t)$

c)) <u>Expression de la tension T du ressort</u>

T.C.I : $\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{P} = M\vec{a}$ suivant Ox :

$-T_1 - T_2 + Mg = Ma = M\ddot{x} \Rightarrow$

$-2T + Mg = M\ddot{x}$ $avec$ $\dot{x} = -x_m\omega_0\sin(\omega_0 t)$ et

$\ddot{x} = -x_m{\omega_0}^2\cos(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow T = \frac{M}{2}(g - \ddot{x}) = \frac{M}{2}(g + x_m{\omega_0}^2\cos(\omega_0 t))$$

$T = 0 \Leftrightarrow g + x_m{\omega_0}^2\cos(\omega_0 t) = 0$

$$\Rightarrow \cos(\omega_0 t) = -\frac{g}{x_m{\omega_0}^2} = -\frac{Mg}{a\times 2k} = \frac{-1}{0,04\times 50} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\omega_0 t) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \omega_0 t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(\frac{1}{3} + k\right)$$

2. a)) <u>Nouvelle équation différentielle</u>

La barre est soumise à une force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$

T.C.I : $\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{f_1} + \vec{f_2} + \vec{P} = M\vec{a}$ suivant Ox :

$-T_1 - T_2 - f_1 - f_2 + Mg = Ma = M\ddot{x}$

$\Rightarrow -2T - 2f + Mg = M\ddot{x} \Rightarrow -2k(\Delta l_E + x) - 2h\dot{x} = M\ddot{x}$

$\Rightarrow -2k\Delta l_E + Mg - 2h\dot{x} = M\ddot{x}$

$$Or - 2k\Delta l_E + Mg = 0 \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{2h}{M}\dot{x} + \frac{2k}{M}x = 0$$

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$

Comme $\Delta' = \lambda^2 - {\omega_0}^2 < 0$, alors cet équation différentielle caractérise un mouvement oscillatoire (rectiligne) amorti.

<u>Valeur de la pseudo période T</u>

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{M} - \frac{h}{M}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2(25)}{0,1} - \frac{0,44}{0,1}}} = 0,282s$$

b)) <u>Déterminons la loi horaire du mouvement</u>

L'équation différentielle du mouvement est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0 \quad (1)$$

Le mouvement est oscillatoire car le discriminant réduite de l'équation (1) $\Delta' = \lambda^2 - {\omega_0}^2 < 0$.

Ce régime oscillatoire est dite pseudo-périodique.

La solution générale de l'équation (1) avec $\Delta < 0$, s'écrit sous la forme : $x(t) = x_m e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi)$.

Avec $\Omega^2 = {\omega_0}^2 - \lambda^2$.

Les conditions initiales s'écrit :

$x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$

$x(t = 0) = x_0 = x_m cos\varphi$ et

$\dot{x}(t = 0) = -\lambda\, x_m cos\varphi - \Omega x_m sin\varphi = 0$

$\Rightarrow \lambda\, x_m cos\varphi = \Omega x_m sin\varphi$ et $x_0 = x_m cos\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} {x_0}^2 = {x_m}^2 cos^2\varphi \\ \lambda^2 {x_m}^2 cos^2\varphi = \Omega^2 {x_m}^2 sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} {x_0}^2 = {x_m}^2 cos^2\varphi \\ \lambda^2 {x_m}^2 cos^2\varphi = {x_m}^2 ({\omega_0}^2 - \lambda^2) sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} {x_0}^2 = {x_m}^2 cos^2\varphi \\ \lambda^2 {x_m}^2 = {x_m}^2 {\omega_0}^2 sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} {x_0}^2 = {x_m}^2 cos^2\varphi \\ \frac{\lambda^2 {x_m}^2}{{\omega_0}^2} = {x_m}^2\, sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda^2 {x_m}^2}{{\omega_0}^2} + {x_0}^2 = {x_m}^2$$

$$\Rightarrow {x_m}^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{{\omega_0}^2}\right) = {x_0}^2 \Rightarrow {x_m}^2\left(\frac{{\omega_0}^2 - \lambda^2}{{\omega_0}^2}\right) = {x_0}^2$$

$$\Rightarrow {x_m}^2 = {x_0}^2\left(\frac{{\omega_0}^2 - \lambda^2}{{\omega_0}^2}\right) = {x_0}^2\left(\frac{\Omega^2}{{\omega_0}^2}\right)$$

$$\Rightarrow x_m = x_0\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)$$

$$Or\ -\lambda\, x_m cos\varphi = \Omega x_m sin\varphi \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\lambda}{\Omega} = -\frac{\lambda}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}$$

$$\Rightarrow tan\,\varphi = -\frac{\lambda}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}$$

A.N: $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,28} = 22,28 rad.s^{-1}$ et $\lambda = \frac{h}{M} = \frac{0,44}{0,1} = 4,4uS.I$

$$x_m = 0,04\left(\frac{22,28}{22,36}\right) = 3,98\times 10^{-2}m = 3,98cm$$

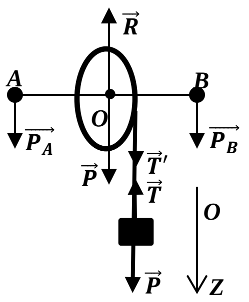
$$\tan\varphi = -\frac{\lambda}{\Omega} = -\frac{4,4}{22,28} = -0,197 \Rightarrow \varphi = -0,194rad$$

La loi horaire s'écrit:

$$x(t) = 3,98\times 10^{-2}e^{-4,4t}\cos(22,28t - 0,194).$$

<u>Partie B</u>

1. a)) <u>Détermination de la masse m</u>



- Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.

T.C.I : $\sum \vec{F_{ext}} = m'\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Suivant OZ : $mg - T = ma \Rightarrow$

$T = m(g - a)$ (1)

- Pour le système (cylindre +masselottes) :

R.F.D : $M(\vec{T'}) = T'.r = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow T' = \frac{J_\Delta\ddot{\theta}}{r}$ (2)

avec $J_\Delta = J_0 + 2ml^2 \Rightarrow J_\Delta = \frac{1}{2}M_1 r^2 + 2ml^2$

$$J_\Delta = \frac{1}{2}\times 0,5\times 0,2^2 + 2\times 0,080\times 0,1^2 = 1,08\times 10^{-2}kg.m^2$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \ m(g - a) = \frac{J_\Delta\ddot{\theta}}{r} \Rightarrow m = \frac{J_\Delta\ddot{\theta}}{(g - a)r}$$

$$A\ t = 1,52s\ , n = 3tours\ et\ \ \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 = 2\pi n$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{4\pi n}{t^2} = \frac{4\pi\times 3}{1,52^2} = 16,31 rad.s^{-2}$$

$a = r\ddot{\theta} = 0,2\times 16,31 = 3,262 m.s^{-2}$ et

$$m = \frac{1,08\times 10^{-2}\times 16,31}{(10 - 3,262)\times 0,2} = 0,13kg = 130g$$

b)) Montrons que $k = -ax^2 + bx + c$

$$m = \frac{J_\Delta \ddot{\theta}}{(g-a)r} = \frac{J_\Delta \ddot{\theta}}{(g-r\ddot{\theta})r} \Longrightarrow k = \frac{1}{m} = \frac{(g-r\ddot{\theta})r}{J_\Delta \ddot{\theta}}$$

$$\Longrightarrow k = -\frac{1}{J_\Delta}r^2 + \frac{g}{J_\Delta \ddot{\theta}}r = ax^2 + bx + c$$

$$\text{où } a = -\frac{1}{J_\Delta} = \frac{-1}{1{,}08 \times 10^{-2}} = -92{,}6 \ ,$$

$$b = \frac{g}{J_\Delta \ddot{\theta}} = \frac{10}{1{,}08 \times 10^{-2} \times 16{,}31} = 56{,}77 \ et \ c = 0$$

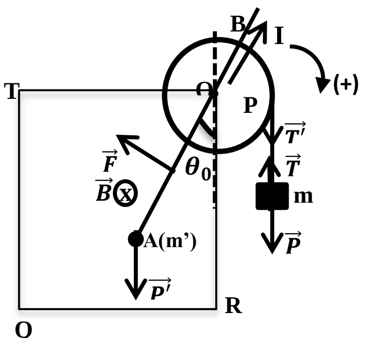
Valeur de m si r = 2,5cm

$$k = -92{,}6x^2 + 56{,}77x$$

$$A.N: k = -92{,}6 \times 0{,}025^2 + 56{,}77 \times 0{,}025 = 1{,}36$$

$$m = \frac{1}{k} = \frac{1}{1{,}36} = 0{,}735kg$$

2. a)) Déterminons les forces dont les effets permettent au système (S) d'être en équilibre



Les forces exercée par (S) à l'équilibre

- La Force magnétique (force de Laplace) $\vec{F} = I\overrightarrow{OA} \wedge \vec{B}$
- Poids de la masse m' $\vec{P'} = m'\vec{g}$
- La tension du fil $\vec{T'}$

b)) En utilisant la règle de 3doigts de la main droite, le vecteur champ $\vec{B}$ entrant (voir figure)

Valeur de l'intensité I du courant à l'équilibre

A l'équilibre : $M(\vec{P'}) + M(\vec{F}) + M(\vec{T'}) = 0$

$$soit \ -P'OA\sin\theta_0 + F\frac{OA}{2} + T'r = 0$$

$$\Longrightarrow -m'gOA\sin\theta_0 + IOAB \times \frac{OA}{2} + T'r = 0 \ \ or \ T' = mg$$

$$-m'gOA\sin\theta_0 + \frac{1}{2}IOA^2B + mgr = 0$$

$$\Longrightarrow I = 2g\frac{(m'OA\sin\theta_0 - mr)}{OA^2B}$$

$$A.N: I = 20 \times \frac{(0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}5 - 0{,}13 \times 0{,}025)}{10^{-2} \times 5} = 0{,}7A$$

Solution 23 :

1. a)) Représentation des forces

Chacun des côtés du cadre est soumis à une force de Laplace appliquée en son milieu.

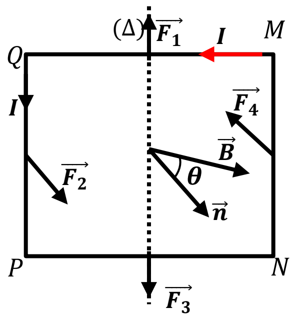


Schéma vue en respective

Ces forces ont les propriétés suivantes :

$\vec{F_1} = -\vec{F_3}$ et $\vec{F_2} = -\vec{F_4}$ ce qui implique que l'ensemble des forces n'imprime pas un mouvement de translation de cadre.

$$F_2 = F_4 = IaB$$

$$F_2 = F_4 = 4{,}5.10^{-3} \times 2{,}5.10^{-2} \times 1{,}2.10^{-2} = 1{,}35 \times 10^{-6}N$$

Ces deux forces ne sont pas parallèles à l'axe Δ, elles ont donc un effet de rotation du cadre autour de l'axe Δ.

$$F_1 = F_3 = IbB$$

$$F_1 = F_3 = 4{,}5.10^{-3} \times 4.10^{-2} \times 1{,}2.10^{-2} = 2{,}16 \times 10^{-6}N$$

Ces deux forces sont parallèles à l'axe Δ, elles n'ont donc aucun effet sur la rotation du cadre autour de l'axe Δ.

b)) Position d'équilibre stable du cadre

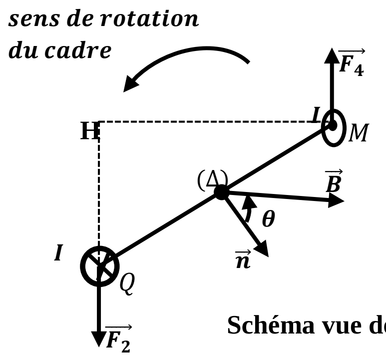


Schéma vue de dessus

D'après la question 1. a)) , le circuit est soumis à un couple formé par $\vec{F_2}$ et $\vec{F_4}$ et dont le module est égale à :

$$\Gamma = F_2MH \ avec \ MH = MQ\sin\theta = b\sin\theta \ \Longrightarrow \Gamma = IabB\sin\theta$$

Un circuit comportant N spires de surface S, parcouru par un courant I, le moment du couple électromagnétique s'écrit :

$$\Gamma = NIabB\sin\theta = NBIS\sin\theta$$

A l'équilibre :$\Gamma = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \pi \ ou \ \theta = 0$

Pour $\theta = 0$ $(équilibre \ stable)$ et $\theta = \pi$ $(équilibre \ instable)$

$équilibre \ stable$ $\quad$ $équilibre \ instable$

c)) Flux magnétique du circuit

$$\Phi = N\vec{B}.\vec{S} = NBS\cos\theta = NBab\cos\theta$$

A l'équilibre stable $\theta = 0 \Longrightarrow \Phi = NBab = \Phi_{max}$

$$\Longrightarrow \Phi = \Phi_{max} = NBab$$

$\Phi_{max} = 100 \times 1{,}2 \times 10^{-2} \times 2{,}5 \times 10^{-2} \times 4 \times 10^{-2}$

$\Phi_{max} = 1{,}2 \times 10^{-3} Wb = 1{,}2 mWb$

2. a)) Expliquons pourquoi le cadre est le siège d'une f.é.m. induit

Le mouvement du cadre est circulaire uniforme, $\theta = \omega t = 100\pi t$

$\Phi = \mathrm{N}\vec{B}.\vec{S} = NBS\cos\theta = NBab\cos\theta$

$\Phi(t) = \Phi_{max}\cos(\omega t) = \Phi_{max}\cos(100\pi t)$

Le flux magnétique varie en fonction du temps, donc le cadre est siège d'une phénomène d'induction électromagnétique de f.é.m.

$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_{max}\omega\sin(\omega t) = 1{,}2 \times 10^{-3} \times 100\pi\sin(100\pi t)$

$soit\ \ e(t) = 0{,}377\sin(100\pi t)$

$e = e_{max}\sin(100\pi t) = 0{,}377\sin(100\pi t) \implies e_{max} = 0{,}377V$

b)) Expression du couple électromagnétique

$\Gamma = NIabB\sin\theta = \Gamma_{max}\sin(\omega t) \implies \Gamma_{max} = NIBab$

$\Gamma_{max} = 100 \times 4{,}5.10^{-3} \times 1{,}2.10^{-2} \times 2{,}510^{-2} \times 4.10^{-2}$

$soit\ \ \Gamma_{max} = 5{,}4 \times 10^{-6} N.m$

3. a)) Condition d'équilibre du cadre

A l'équilibre le couple électromagnétique est égal et opposé au couple de rappel $M_r = -C\theta_0$ exercé par le ressort.

Donc $\Gamma_{max} = -M_r \implies NIBab = C\theta_0$

En déduisons la constante du torsion C

$NIBab = C\theta_0 \implies C = \frac{NIBab}{\theta_0} = \frac{\Gamma_{max}}{\theta_0}$

$A.N: C = \frac{5{,}4 \times 10^{-6}}{\frac{\pi}{6}} = 1{,}031 \times 10^{-5} N.m.rad^{-1}$

b)) Équation différentielle du mouvement

Les frottements et le couple de torsion étant nuls, le couple d'inertie est équilibré par le couple magnétique :

$$\Gamma = -NIabB\sin\theta$$

Le couple s'oppose toujours au déplacement.

R.F.D (en rotation) :

$$\Gamma = J\ddot{\theta} \implies -NIabB\sin\theta = J\ddot{\theta} \implies \ddot{\theta} + \frac{NIabB}{J}\sin\theta = 0$$

Or θ est plus petit donc

$$\sin\theta \sim \theta \implies \ddot{\theta} + \frac{NIabB}{J}\theta = 0 \implies \ddot{\theta} + \frac{\Gamma_{max}}{J}\theta = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre caractérise un mouvement de rotation sinusoïdal.

Calcul de la période T

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ où $\omega^2 = \frac{\Gamma_{max}}{J} \implies T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\Gamma_{max}}}$

$A.N:\ T = 2\pi\sqrt{\frac{10^{-4}}{5{,}4 \times 10^{-6}}} = 4{,}3s$

Solutions sur Les Oscillateurs Électriques

Solution 1

1. a)) Calcul du flux propre : $\Phi_P = Li = 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}03Wb$

b)) Caractéristique de $\vec{B}$ au centre du solénoïde

- direction : parallèle à l'axe du solénoïde
- sens : de la face sud vers la face nord
- intensité : $B = \mu_0 \frac{N}{l} i$ (à déterminer)

Calcul du nombre de spire N

$$\Phi_P = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l} i \Rightarrow N = \sqrt{\frac{\Phi_P L}{\mu_0 \pi R^2 i}}$$

$$A.N:\ N = \sqrt{\frac{0{,}03 \times 1{,}5}{4\pi \times 10^{-7} \pi \times 10^{-2} \times 0{,}3}} = 1{,}93 \times 10^3 spires$$

$$A.N:\ B = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{1{,}93 \times 10^3}{1{,}5} \times 0{,}3 = 4{,}85 \times 10^{-4} T$$

c)) Tension aux bornes de la bobine

$$U = -e + ri = L\frac{di}{dt} + ri \quad or\ i = I = cst \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow U = ri = 5 \times 0{,}3 = 1{,}5V$$

d)) Calcul de la tension aux bornes de la bobine à $t=t_1$

$$U = L\frac{di}{dt} + ri \Rightarrow U = 0{,}1 \times 2 + 1{,}5 = 1{,}7V$$

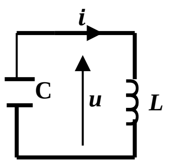
c)) Energie emmagasinée dans la bobine à $t=t_1$

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times 0{,}3^2 = 4{,}5 \times 10^{-3} J$$

2. a)) Dans le circuit, il y a naissance des oscillations électrique sinusoïdale (harmonique) car la résistance interne de la bobine est négligeable.

- Calcul de la charge initiale : $Q_0 = CU = 10^{-5} \times 10 = 10^{-4} C$

b)) Equation différentielle liant u



- Aux bornes du condensateur : $u_C = \frac{q}{C}$
- Aux bornes de la bobine : $u_L = L\frac{di}{dt}$

On a : $u = u_C = u_L$:

Le condensateur se décharge : $i = -\frac{dq}{dt}$

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -C\frac{d}{dt} \times \frac{du}{dt} = -C\frac{d^2u}{dt^2}$$

$$\Rightarrow u = -LC\frac{d^2u}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC}u = 0 \ (1)$$

- Pulsation propre du circuit

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}1 \times 10^{-5}}} = 10^3 rad.s^{-1}$$

- Equation horaire du mouvement

L'équation (1) a pour solution $u(t) = U_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

A t=0, $U_0 = U_{max} = U_{max}\cos(\varphi)$

$$\Rightarrow U_{max}\cos(\varphi) = U_{max} \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$u(t) = U_0\cos(\omega_0 t) = 10\cos(10^3 t)\ (V)$$

- Expression de l'intensité i(t) en fonction du temps t

$$i = -C\frac{du}{dt} = -CU_0(-\omega_0)\sin(\omega_0 t) = CU_0\omega_0\sin(\omega_0 t)$$

En posant $I_{max} = CU_0\omega_0 = 10^{-5} \times 10 \times 10^3 = 0{,}1A$

$$i(t) = I_{max}\sin(\omega_0 t) = 0{,}1\sin(10^3 t)\ (A)$$

c)) Energie électromagnétique totale

$$E = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2 = cste$$

Les oscillations sont harmonique, alors l'énergie totale se conserve : $E = cste \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}C\frac{du^2}{dt} + \frac{1}{2}L\frac{di^2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}C \times 2u\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}L \times 2i\frac{di}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow Cu\frac{du}{dt} + Li\frac{di}{dt} = 0 \quad or\ i = -C\frac{du}{dt} \quad et \quad \frac{di}{dt} = -C\frac{d^2u}{dt^2}$$

$$\Rightarrow Cu\frac{du}{dt} + L\left(-C\frac{du}{dt}\right) \times \left(-C\frac{d^2u}{dt^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow Cu\frac{du}{dt} + LC^2\frac{du}{dt} \times \frac{du^2}{dt^2} = 0 \Rightarrow C\frac{du}{dt}\left(u + LC\frac{du^2}{dt^2}\right) = 0$$

$$or\ C\frac{du}{dt} \neq 0 \Rightarrow u + LC\frac{du^2}{dt^2} = 0 \quad d'où:\ \frac{du^2}{dt^2} + \frac{1}{LC}u = 0$$

Solution 2

1. a)) Caractéristique de $\vec{B}$ au centre du solénoïde

- direction : parallèle à l'axe du solénoïde
- sens : de la face sud vers la face nord
- intensité : $B = \mu_0 \frac{N}{l} i = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{2500 \times 5}{0{,}4} = 3{,}92 \times 10^{-2} T$

b)) Inductance L du solénoïde

$$\Phi_P = NBS \ avec\ B = \mu_0 \frac{N}{l} i \Rightarrow \Phi_P = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i$$

- par définition $\Phi_P = Li \Rightarrow Li = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i \Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$

$$Or\ S = \pi r^2 \Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2 \pi r^2}{l}$$

$$A.N: L = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{2500^2 \times \pi \times 0{,}02^2}{0{,}4} = 2{,}46 \times \mathbf{10^{-2}} H$$

c)) Calcul du flux propre :

$$\Phi_P = Li = 2{,}46 \times 10^{-2} \times 5 = 0{,}123Wb$$

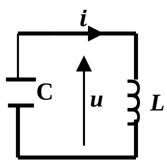
2. –Charge maximale :

$$Q_0 = CU = 2{,}5 \times 10^{-6} \times 20 = 5 \times 10^{-5} C$$

- Énergie emmagasiné :

$$E_0 = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \times 2{,}5 \times 10^{-6} \times 20^2 = 5 \times 10^{-4} J$$

3. a)) Equation différentielle liant u(t)



- Aux bornes du condensateur : $u_C = \frac{q}{C}$
- Aux bornes de la bobine : $u_L = L\frac{di}{dt}$

On a : $u = u_C = u_L$

Le condensateur se décharge : $i = -\frac{dq}{dt}$

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -C\frac{d^2u}{dt^2} \Rightarrow$$

$$u = u_L = -LC\frac{d^2u}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC}u = 0 \ (1)$$

b)) Soit $u(t) = U_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ solution de l'équation (1)

Condition initiale : à t=0, $U_0 = U_{max} = 20$ *et*

$$U_{max} = U_{max}\cos(\varphi) \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}025\times 2{,}5\times 10^{-6}}} = 4\times 10^3 rad.s^{-1}$$

$$u(t) = U_0\cos(\omega_0 t) = 20\cos(4.10^4 t)\ (V)$$

c)) Montrons que l'énergie totale e est constante

$$E = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

$$\text{où } i = -C\frac{du}{dt} = CU_{max}\omega_0\sin(\omega_0 t)$$

$$E = \frac{1}{2}CU_{max}{}^2cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}LC^2\omega_0{}^2U_{max}{}^2sin^2(\omega_0 t)$$

or $LC\omega_0{}^2 = 1$

$$Alors:\ E = \frac{1}{2}CU_{max}{}^2cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}CU_{max}{}^2sin^2(\omega_0 t) \Rightarrow$$

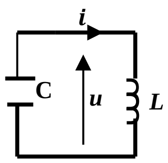
$$E = \frac{1}{2}CU_{max}{}^2\left(cos^2(\omega_0 t) + sin^2(\omega_0 t)\right) = \frac{1}{2}CU_{max}{}^2 = cste$$

$$E = \frac{1}{2}CU_{max}{}^2 = \frac{1}{2}\times 2{,}5\times 10^{-6}\times 20^2 = 5\times 10^{-4}J$$

Solution 3

1. a))Schéma du circuit (L,C)

La décharge du condensateur de capacité C dans la bobine d'inductance L et de résistance interne négligeable donne naissance à des oscillations électrique sinusoïdales.



b)) Calcul de la charge maximale du condensateur :

$$Q_{max} = CU = 6\times 10^{-6}\times 1 = 6\times 10^{-6}C$$

2. Equation différentielle liant la charge q

Loi d'additivité des tensions :

$$u_C = u_L \quad \Rightarrow \frac{q}{C} = L\frac{di}{dt}\ \ or\ ici\ i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2} \Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0\ \ soit\ \ \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0\ \ (1)$$

3. Calcul :

a)) de la pulsation propre ω_0

L'équation (1) a pour solution $q(t) = Q_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$i = -\frac{dq}{dt} = \omega_0 Q_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi) = I_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$I_{max} = \omega_0 Q_{max} \Rightarrow \omega_0 = \frac{I_{max}}{Q_{max}} = \frac{2{,}4.10^{-3}}{6.10^{-6}} = 400 rad.s^{-1}$$

-Période propre :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{400} = 1{,}57\times 10^{-2}s$$

- Inductance L de la bobine :

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L = \frac{1}{C\omega_0{}^2} = \frac{1}{6.10^{-6}\times 400^2} = 1{,}04H$$

b)) Intensité du courant, charge et tension en fonction de t

Condition initiale : *à t=0,*

$$Q_0 = Q_{max} = Q_{max}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$q(t) = Q_{max}\cos(\omega_0 t) \Rightarrow q(t) = 6\times 10^{-6}\cos(400t)$$

$$i(t) = I_{max}\sin(\omega_0 t) = 6\times 10^{-6}\sin(400t)$$

$$et\ \ u(t) = \frac{q}{C} = U_0\cos(\omega_0 t) = \cos(400t)$$

c)) Energie emmagasinée par le condensateur et par la bobine en fonction du temps

$$E_C = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}\times 6\times 10^{-6}cos^2(400) = 3\times 10^{-6}cos^2(400)$$

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\times 1{,}04\times(2{,}4\times 10^{-3})^2cos^2(400t)$$

$$E_L = 3\times 10^{-6}cos^2(400t)$$

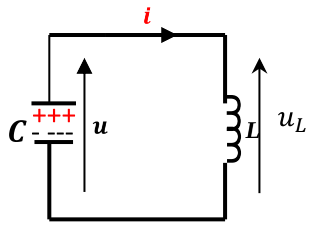
- Energie totale du circuit

$$E = E_e + E_m = 3\times 10^{-6}cos^2(400) + 3\times 10^{-6}cos^2(400t)$$

$$E = 3\times 10^{-6}(cos^2(400) + cos^2(400t)) = 3\times 10^{-6}J$$

Solution 4

1. a)) et b))



2. a)) Tensions

- Aux borne de la bobine :

$$u_L = L\frac{di}{dt}\ \ or\ \ i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2} \Rightarrow u_L = -L\frac{d^2q}{dt^2}$$

-Aux bornes du condensateur : $u_C = \frac{q}{C}$

b)) Equation différentielle liant la charge q

$$u_C = u_L \Rightarrow \frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2}\ \ soit\ \ \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

3. a)) Solution générale de l'équation différentielle

Cette équation admet une solution de la forme :

$$q(t) = Q_{max}\,cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Q_{max} : amplitude ; $\omega_0 t + \varphi$: phase de la charge q(t) à la date t

φ : phase initiale de la charge q(t) à la date t=0.

b)) Expression de la période propre

$$Soit\ \ \omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}\ \ soit\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La période propre est : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$

c)) Expression de q(t) en tenant compte des conditions initiales

A t=0, on enregistre les variations de q dès qu'on branche le condensateur préalablement en série aux bornes de la bobine : $q(0) = Q_{max}$

$$q(0) = Q_{max}\cos(\varphi) \Rightarrow Q_{max}\cos(\varphi) = Q_{max}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0\ \ donc:\ q(t) = Q_{max}\,cos(\omega_0 t)$$

c)) Expressions numérique de q(t) , u(t) et i(t) :

$$q(t) = Q_{max}\,cos(\omega_0 t)$$

$$avec\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{9.10^{-3}\times 12.10^{-6}}} = 3\times 10^3 rad.s^{-1}$$

$$Q_{max} = CU_0 = 12.10^{-6} \times 12 = 1{,}44 \times 10^{-4}C$$
$$q(t) = 1{,}44 \times 10^{-4}\cos(3.10^3 t)$$
$$u(t) = U_{max}\cos(\omega_0 t) = 12\cos(3.10^3 t)$$
$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = 1{,}44.3210^{-4} \times 3.10^3 \sin(3.10^3 t)$$
$$i(t) = 0{,}4\sin(3.10^3 t)$$

Solution 5

1. Valeur de la charge maximale du condensateur

$$Q_{max} = CU_0 = 6{,}28.10^{-6} \times 50 = 3{,}14 \times 10^{-4}C$$

2. a)) Equation différentielle liant la charge q

Loi d'additivité des tensions *:*

$$u_C = u_L \Rightarrow \frac{q}{C} = L\frac{di}{dt} + ri \;\; or\; i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$$
$$\frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2} - r\frac{dq}{dt} \Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + r\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$
$$soit\; \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dq}{qt} + \frac{1}{LC}q = 0 \;\; ou\;\; \ddot{q} + \frac{r}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

b)) Expression de l'énergie totale

$$E = E_{el} + E_{mag} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$

c)) Montrons que l'énergie totale varie

$$On\ a:\ E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$
$$\frac{dE}{dt} = 2 \times \frac{1}{2}\frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + 2 \times \frac{1}{2}Li\frac{di}{dt} = \frac{q}{C}i + Li\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right)$$
$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2}\right)i$$
$$or\; L\frac{d^2q}{dt^2} + r\frac{dq}{qt} + \frac{1}{C}q = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = -r\frac{dq}{qt} = -ri$$
$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2}\right)i = -ri^2 < 0 \Rightarrow E \neq cste$$

Donc E est une fonction décroissante du temps

Alors le système n'est plus conservatif ; ceci est dû aux pertes par effet-Joule dans la résistance r.

Par conséquent l'énergie totale varie en fonction du temps t.

d)) Nature des Oscillations

Comme l'énergie totale varie en fonction du temps, alors la décharge du condensateur dans une bobine de résistance r, donne naissance à des oscillations électriques amortis.

Au bout d'un certain temps suffisamment longs, le condensateur sera préalablement déchargé et l'énergie électromécanique totale du circuit sera quasiment nulle.

e)) Nature des oscillations si r=0

$$On\ a\;\; \ddot{q} + \frac{r}{L}\dot{q} + \omega_0{}^2 q = 0 \;\; si\; r = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \omega_0{}^2 q = 0$$

D'où : si la résistance de la bibine est nulle (r = 0), la décharge du condensateur dans une bobine idéale, donne naissance à des oscillations électriques libre et harmonique, de pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Fréquence propre des oscillations

$$\omega_0 = 2\pi N_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$
$$N_0 = \frac{1}{2\pi \times \sqrt{0{,}318 \times 6{,}28.10^{-6}}} = 112{,}62Hz$$

Solution 6

1. a)) Capacité du condensateur

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \;\; avec\;\; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow T_0{}^2 = 4\pi^2 LC$$
$$soit\;\; C = \frac{T_0{}^2}{4\pi^2 L} = \frac{(2 \times 10^{-4})^2}{4\pi^2 \times 10^{-2}} = 10^{-7}F$$

b)) Calcul de la charge maximale du condensateur *:*

$$Q_{max} = CU = 10^{-7} \times 5 = 5 \times 10^{-7}C$$

2. a)) Equation différentielle liant la charge q

Loi d'additivité des tensions *:*

$$u_C = u_L \Rightarrow \frac{q}{C} = L\frac{di}{dt} \;\; or\ ici\ i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$$
$$\frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2} \Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \;\; soit\;\; \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (1)$$

b)) Equation horaire

L'équation (1) a pour solution $q(t) = Q_{max}\cos(\omega_0 t)$ avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}01 \times 10^{-7}}} = 3{,}16 \times 10^3 rad.s^{-1}$$
$$\Rightarrow q(t) = 5 \times 10^{-7}\cos(3{,}16 \times 10^4 t)$$

3. a)) Energie emmagasinée dans la bobine *:*

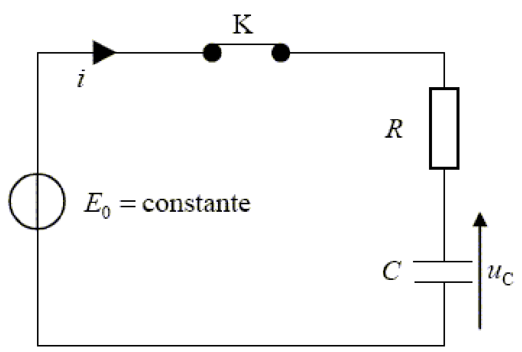
$$E = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-7} \times 25^2 = 3{,}125 \times 10^{-5}J$$

b)) Valeur de l'amplitude maximale I_{max}

$$E = \frac{1}{2}CU_{max}{}^2 = \frac{1}{2}LI_{max}{}^2 \Rightarrow I_{max} = \sqrt{\frac{2E}{L}}$$
$$A.N:\ I_{max} = \sqrt{\frac{2 \times 3{,}125 \times 10^{-5}}{0{,}01}} \Rightarrow I_{max} = 7{,}90 \times 10^{-2}A$$

Solution 7

1. a)) Equation différentielle liant U du condensateur



En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$E = U_C + U_R$, $or\ U_R = Ri\ \ avec$

$$i = \frac{dq}{dt}\ \ et\ q = CU_C \Rightarrow i = C\frac{dU_{DC}}{dt}$$

$$Soit\ E = U_C + RC\frac{dU_C}{dt} \Rightarrow \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = \frac{E}{RC}$$

Valeur de U_0

A l'instant $t = 10{,}5s, I = 22\mu A$:

$$I = \frac{Q}{t} \Rightarrow Q = It = 22 \times 10^{-6} \times 10{,}5 = 2{,}31 \times 10^{-4}C$$

$$Q = CU_0 \Rightarrow U_0 = \frac{Q}{C} = \frac{2{,}31 \times 10^{-4}}{30 \times 10^{-6}} = 7{,}7V$$

b)) Détermination de A, B et β

$$\frac{dU_C}{dt} = -\beta Be^{-\beta t}, donc :\ \ E = A + \beta Be^{-\beta t} - RC\beta Be^{-\beta t}$$

$$\Rightarrow (-E + A) + (1 - \beta RC)Be^{-\beta t} = 0\ \ \ or\ Be^{-\beta t} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow A - E = 0\ et\ (1 - \beta RC) = 0$$

$$soit\ \ A = E\ \ et\ 1 - \beta RC = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{RC}$$

$$A\ t = 0, U_C = A + B = 0 \Rightarrow B = -A = -E$$

$$d'où :\ U_C(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

c)) - La constante du temps τ du dipôle RC est le produit de la résistance R par la capacité du condensateur C :

$$\tau = RC = 2.10^3 \times 30 \times 10^{-6} = 0{,}06s = 60ms$$

- La constante du temps τ représente le temps nécessaire pour que le condensateur atteint 63% de sa charge totale.

d)) Expression de q (t) et i(t) en fonction du I_0 et τ

$$q(t) = CU_0 = CU_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = CU_0 \times \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$avec\ RC = \tau\ \ et\ I_0 = \frac{U_0}{R}\ \ ; soit\ \ i(t) = I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

En régime permanant c'est-à-dire $t = \infty \Rightarrow i = 0$

e)) L'énergie emmagasinée dans le condensateur est dissipée par l'effet joule à travers la résistance ohmique R :

$$E_e = \frac{1}{2}CU_0{}^2 = \frac{1}{2} \times 30 \times 10^{-6} \times (7{,}7)^2 = 8{,}9 \times 10^{-4}J$$

2. a)) Valeur de l'inductance L de la bobine

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\ \ avec\ \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow T_0{}^2 = 4\pi^2LC$$

$$soit\ \ L = \frac{T_0{}^2}{4\pi^2C} = \frac{(6 \times 10^{-3})^2}{4\pi^2 \times 30 \times 10^{-6}} = 0{,}03H = 30mL$$

Charge maximale :

$$Q_{max} = CU_0 = 2{,}31 \times 10^{-4}$$

b)) Equation différentielle obéissant u(t)

- Aux bornes du condensateur : $u_C = \frac{q}{C}$
- Aux bornes de la bobine : $u_L = L\frac{di}{dt}$

$On\ a : u = u_C = u_L$

Le condensateur se décharge : $i = -\frac{dq}{dt}$

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -C\frac{d^2u}{dt^2} \Rightarrow$$

$$u = u_L = L\frac{di}{dt} = -LC\frac{d^2u}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC}u = 0$$

c)) Equation horaire

Soit $u(t) = U_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ solution de l'équation différentielle

Condition initiale : à t=0, $U_0 = U_{max}$

$$u(0) = U_{max} = U_{max}\cos(\varphi) \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{6.10^{-3}} = 10^3 rad.s^{-1}$$

$$u(t) = U_{max}\cos(\omega_0 t) = 7{,}7\cos(10^3t)$$

d)) Energie emmagasinée dans la bobine :

$$E = \frac{1}{2}LI_{max}{}^2 = \frac{1}{2}CU_0{}^2 = 8{,}9 \times 10^{-4}$$

Valeur de l'amplitude maximale I_{max}

$$E = \frac{1}{2}CU_{max}{}^2 = \frac{1}{2}LI_{max}{}^2 \Rightarrow I_{max} = \sqrt{\frac{2E}{L}} = \sqrt{\frac{2\times 8{,}9\times 10^{-4}}{0{,}03}}$$

$soit\ \ I_{max} = 0{,}244A$

Solutions sur le circuit (RLC)

Solution 1

1. a)) Caractéristique de $\vec{B}$ au centre du solénoïde

- direction : parallèle à l'axe du solénoïde
- sens : de la face sud vers la face nord
- intensité : $B = \mu_0 \frac{N}{l} i = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{1000\times 2}{0{,}05} = 5{,}027 \times 10^{-2} T$

2. a)) Schéma de la bobine

- Facteur de puissance de la bobine

$$P_m = UI\cos\varphi \Longrightarrow \cos\varphi = \frac{P_m}{UI} = \frac{81}{110 \times 1{,}5} = 0{,}49$$

b)) –Calcul d'impédance Z : $Z = \frac{U}{I} = \frac{110}{1{,}5} = 73{,}33\Omega$

- Valeur numérique de R et L :

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \Longrightarrow R = Z\cos\varphi = 73{,}33 \times 0{,}49 = 35{,}93\Omega$$

$$Par\ définition : Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \Longrightarrow Z^2 = R^2 + (L\omega)^2$$

$$Soit\ \ L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi N} = \frac{\sqrt{73{,}33^2 - 35{,}93^2}}{2\pi \times 50} = 0{,}2H$$

c)) Expression de i(t)

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(2\pi Nt - \varphi)\ \ avec \cos\varphi = 0{,}49 \Longrightarrow \varphi = 60{,}66°$$

$$\varphi = 60{,}66° = 0{,}33\pi rad \ \Longrightarrow i(t) = 1{,}5\sqrt{2}\sin(100\pi t - 0{,}33\pi)$$

$$i(t) = 2{,}12\sin(100\pi t - 0{,}33\pi)$$

Solution 2

1. la tension maximal de la source est :

$$U_{max} = U\sqrt{2} = 220\sqrt{2} \ \Longrightarrow U_{max} = 311{,}13V$$

2. a)) Détermination de Z_R , Z_B et Z

$$Z_R = \frac{U_R}{I} = \frac{140}{3{,}5} = 40\Omega\ ;\ \ Z_B = \frac{U_B}{I} = \frac{120}{3{,}5} = 34{,}28\Omega\ \ et$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{3{,}5} = 62{,}86\Omega$$

b)) Valeur de R, r et L $R = Z_B = 40\Omega$;

Pour la bobine *B* :

$$Z_B = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2} \ \Longrightarrow {Z_B}^2 = r^2 + (L\omega)^2 \ \ (1)$$

Pour l'ensemble bobine +conducteur ohmique

$$Z = \sqrt{(R + r)^2 + (L\omega)^2} \Longrightarrow Z^2 = (R + r)^2 + (L\omega)^2 \ \ (2)$$

$$(2) - (1) \Longrightarrow \ Z^2 - {Z_B}^2 = (R + r)^2 - r^2 = R^2 + r^2 + 2rR - r^2$$

$$Z^2 - {Z_B}^2 = R^2 + 2rR \ \Longrightarrow r = \frac{Z^2 - {Z_B}^2 - R^2}{2R}$$

$$A.N:\ r = \frac{62{,}86^2 - 34{,}28^2 - 40^2}{2 \times 40} = 14{,}7\Omega$$

$$(1): {Z_B}^2 = r^2 + (L\omega)^2 \Longrightarrow L\omega = \sqrt{{Z_B}^2 - r^2}$$

$$\Longrightarrow L = \frac{\sqrt{{Z_B}^2 - r^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{{Z_B}^2 - r^2}}{2\pi N}$$

$$A.N: L = \frac{\sqrt{34{,}28^2 - 14{,}7^2}}{100\pi} = 9{,}86 \times 10^{-2} H$$

c)) Déphasage entre u et i :

$$\tan\varphi = \frac{L\omega}{R + r} = \frac{9{,}86.10^{-2} \times 100\pi}{40 + 14{,}7} = 0{,}566 \ \Longrightarrow \ \varphi = 0{,}52rad$$

d)) Expression de i(t)

A l'instant où la tension est maximal,

i est en retard par rapport à u, donc :

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(2\pi Nt - \varphi)$$

$$i(t) = 3{,}5 \times \sqrt{2}\sin(100\pi t - 0{,}51) = 4{,}95\sin(100\pi t - 0{,}51)$$

Solution 3

1. a)) Expression de l'impédance Z du circuit : $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

b)) Expression de l'intensité efficace du courant : $Z = \frac{U}{I} \Rightarrow I = \frac{U}{Z}$

c)) Expression du déphasage de u(t) par rapport à i(t) :

$$tan\,\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

2. Calcul numérique de Z, I et φ

$$\begin{cases} L\omega = 0{,}3 \times 314 = 94{,}2 \\ \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{20 \times 10^{-6} \times 314} = 159{,}23 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow Z = \sqrt{10^2 + (94{,}2 - 159{,}23)^2} = 65{,}80\Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{65{,}80} = 1{,}52A\ \ et\ \ tan\,\varphi = \frac{94{,}2 - 159{,}23}{10} = -6{,}50$$

$$\Rightarrow \ \varphi = -1{,}42rad$$

3. a)) Calcul des tensions U_1 et U_2

- Aux bornes de la bobine :

$$U_2 = Z_2 I = L\omega I = 94{,}2 \times 1{,}52 = 143{,}2V$$

- Aux bornes du condensateur :

$$U_1 = Z_1 I = \frac{1}{C\omega} \times I = 159{,}23 \times 1{,}52 = 242V$$

b)) Expression de instantanées de u_1 et u_2

$$u_1 = U_1\sqrt{2}\,sin(\omega t + \varphi_1)\ \ et\ \ u_2 = U_1\sqrt{2}\,sin(\omega t + \varphi_2)$$

- Détermination de φ_1 et φ_2

$$\tan\varphi_2 = \frac{L\omega}{R} = \frac{94{,}2}{10} = 9{,}42 \ \Rightarrow \ \varphi_2 = 1{,}46rad\ et$$

Pour la capacité pur $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$

$$u_1 = 242\sqrt{2}\,sin\left(314t - \frac{\pi}{2}\right)\ et\ u_2 = 143{,}2\sqrt{2}\,sin(314t + 1{,}46)$$

$$u_1 = 342{,}24\,sin\left(314t - \frac{\pi}{2}\right)\ \ et\ u_2 = 202{,}5\,sin(314t + 1{,}46)$$

Solution 4

1. Vérifions que $Z = 33\Omega$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(2\pi NL - \frac{1}{2\pi NC}\right)^2}$$

$$\begin{cases} 2\pi NL = 2\pi \times 60 \times 0{,}20 = 75{,}39 \\ \dfrac{1}{2\pi NC} = \dfrac{1}{2\pi \times 60 \times 25 \times 10^{-6}} = 106{,}10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Z = \sqrt{12^2 + (75{,}39 - 106{,}10)^2} = 32{,}97\Omega = 33\Omega$$

b)) Calcul de l'intensité efficace I : $Z = \frac{U}{I} \Rightarrow I = \frac{U}{Z} = \frac{120}{33} = 3{,}63\Omega$

c)) Détermination de φ_1

$$\pi NL < \frac{1}{2\pi NC} \Rightarrow \varphi_1 < 0 \Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{R}{Z} = \frac{12}{33} = 0{,}3636$$

$$donc\ \ \varphi_1 = -0{,}348 rad$$

2. a)) *Calcul de U_{AF}*

$$U_{AF} = Z_{AF} I = \sqrt{R^2 + (2\pi NL)^2}\, I$$

$$U_{AF} = \sqrt{12^2 + 75{,}39^2} \times 3{,}63 = 277{,}11V$$

b)) Calcul de φ_2

$$\cos\varphi_2 = \frac{R}{Z_{AF}} = \frac{RI}{U_{AF}} = \frac{12 \times 3{,}63}{277{,}11} = 0{,}172 \Rightarrow \varphi_2 = 1{,}40 rad$$

- Expression de $U_{AF}(t)$: $u_{AF}(t) = U_{AF}\sqrt{2}\sin(2\pi Nt + \varphi_2)$

$$u_{AF}(t) = 277{,}11\sqrt{2}\sin(120\pi t + 1{,}40)$$

$$soit\ \ u_{AF}(t) = 391{,}89\sin(120\pi t + 1{,}40)$$

Solution 5

1. a)) Déphasage φ entre U(t) et l'intensité i(t)

$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t) \quad et\ \ u(t) = U\sqrt{2}\,Cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} rad$$

b)) Impédance Z du dipôle MN :

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow Z = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{20}{\cos\frac{\pi}{4}} = 28{,}28\Omega$$

c)) *Calcul de I et U*

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)I}{RI} = \frac{U_{PN}}{RI}$$

$$\Rightarrow I = \frac{U_{PN}}{R\tan\varphi} = \frac{6\sqrt{2}}{20\tan 45°} = 0{,}42A$$

d)) Montrons que $\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4{\omega_0}^2}\right)$

Pulsation à la résonance $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \Rightarrow Z^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(R\sqrt{2}\right)^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \Rightarrow 2R^2 - R^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = R$$

$$LC\omega^2 - 1 = RC\omega \Rightarrow LC\omega^2 - RC\omega - 1 = 0$$

$$\Delta = (RC)^2 + 4LC > 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{RC - \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} < 0 \quad et$$

$$\omega_2 = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{1}{2}\left[\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}\sqrt{R^2C^2 + 4LC}\right]$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2C^2}{L^2C^2} + \frac{4LC}{L^2C^2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}\right]$$

$$or\ {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4{\omega_0}^2}\right]$$

2. a)) Montrons que $\sqrt{\omega_1 . \omega_2} = \omega_0$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4{\omega_0}^2}\right]$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 - \frac{R}{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4{\omega_0}^2}\right] - \frac{R}{L}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4{\omega_0}^2}\right] - \frac{R}{L} = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4{\omega_0}^2}$$

$$\omega_1 \times \omega_2 = \left(-\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4{\omega_0}^2}\right)\left(\left[\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4{\omega_0}^2}\right]\right)$$

$$\omega_1 \times \omega_2 = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4{\omega_0}^2\right) - \frac{R^2}{4L^2} = {\omega_0}^2 \Rightarrow \sqrt{\omega_1 \times \omega_2} = \omega_0$$

b)) Calcul de ω_2 et ω_1

$$\omega_0 = 10^4 \Rightarrow {\omega_0}^2 = 10^8 \quad et\ \omega_2 - \omega_1 = 2 \times 10^3 rad.s^{-1} = \frac{R}{L}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4{\omega_0}^2}\right] = \frac{1}{2}\left(2000 + \sqrt{2000^2 + 4.10^8}\right)$$

$$\omega_2 = 11 \times 10^3 rad.s^{-1}\ et\ \ \omega_2 - \omega_1 = 2 \times 10^3 rad.s^{-1}$$

$$Soit\ \ \omega_1 = 11 \times 10^4 - 2 \times 10^3 = 9 \times 10^3 rad.s^{-1}$$

c)) Valeur de L et C

$$\frac{R}{L} = \Delta\omega \Rightarrow L = \frac{R}{\Delta\omega} = \frac{20}{2000} = 0{,}01H$$

$$et\ \ {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{L{\omega_0}^2} = \frac{1}{10^{-2} \times 10^8} = 10^{-6}F = 1\mu F$$

Solution 6

1. a)) Expression de l'impédance Z du circuit

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{(R+r)^2 + \left(2\pi NL - \frac{1}{2\pi NC}\right)^2}$$

$$\begin{cases} 2\pi NL = 2\pi \times 100 \times 0{,}8 = 502{,}65 \\ \dfrac{1}{2\pi NC} = \dfrac{1}{2\pi \times 100 \times 4{,}4 \times 10^{-6}} = 361{,}715 \end{cases}$$

$$Z = \sqrt{(345 + 55)^2 + (502{,}65 - 361{,}715)^2} = 424{,}10\Omega$$

b)) Expressions numériques de U_{AB} et i_{AB}

$$U_{AB} = U_{AB_{max}}\cos(\omega t + \varphi)\ \ et\ i_{AB} = I_{max}\cos(\omega t)$$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + r} = \frac{502{,}65 - 361{,}715}{345 + 55} = 0{,}3523 \Rightarrow \varphi = 0{,}338 rad$$

$$U_{AB} = U_e\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)\ \ et\ \ i_{AB} = I\sqrt{2}\cos(\omega t)$$

$$U_{AB} = 4\sqrt{2}\cos(200\pi t + 0{,}338)\ \ et\ \ i_{AB} = I\sqrt{2}\cos(\omega t)$$

$$Z = \frac{U}{I} \Rightarrow I = \frac{U}{Z} = \frac{4}{424{,}10} = 9{,}43 \times 10^{-3}A$$

$$\Rightarrow\ i_{AB} = 9{,}43 \times 10^{-3}\sqrt{2}\cos(200\pi t)$$

2. Valeur de l'intensité à la résonance

$$A\ la\ résonance\ \ \omega_0 = 2\pi N_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$A.N: N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}8 \times 4{,}4 \times 10^{-6}}} = 84{,}83Hz$$

3. La bande passante en pulsation est l'ensemble des pulsations de l'intervalle $[\omega_1\ ;\ \omega_2]$ où ω_1 et ω_2 les limites de la bande passante.

- Détermination de ω_1 et ω_2

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow Z^2 = (R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$\left((R+r)\sqrt{2}\right)^2 = (R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2(R+r)^2 - (R+r)^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = (R+r)^2 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm(R+r)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L{\omega_1}^2 + (R+r)C\omega_1 - 1 = 0\ (1) \\ L{\omega_2}^2 - (R+r)C\omega_2 - 1 = 0\ (2) \end{cases}$$

$$\Delta = \left((R+r)C\right)^2 + 4LC > 0$$

$$\omega_1 = \frac{-(R+r)C + \sqrt{\left((R+r)C\right)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\omega_2 = \frac{(R+r)C + \sqrt{\left((R+r)C\right)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\omega_1 = \frac{-(345+55)\times 4{,}4\times 10^{-6} + \sqrt{\left((345+55)4{,}4\times 10^{-6}\right)^2 + 4.0{,}8\times 4{,}4.10^{-6}}}{2\times 0{,}8\times 4{,}4\times 10^{-6}}$$

$$\omega_2 = \frac{(345+55)\times 4{,}4\times 10^{-6} + \sqrt{\left((345+55)4{,}4\times 10^{-6}\right)^2 + 4.0{,}8\times 4{,}4.10^{-6}}}{2\times 0{,}8\times 4{,}4\times 10^{-6}}$$

$\omega_1 = 338{,}72rad.s^{-1}$ et $\omega_2 = 838{,}72rad.s^{-1}$

4. Montrons que $\Delta\omega$ peut s'exprimer en fonction de R, r et L

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{(R+r)C}{2LC} + \frac{(R+r)C}{2LC} = \frac{2(R+r)C}{2LC} = \frac{R+r}{L}$$

5. Calcul du facteur du qualité Q

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}\ \ \text{où}\ \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0{,}8\times 4{,}4\times 10^{-6}}} = 533rad.s^{-1}\ et\ Q = \frac{533}{838{,}72 - 338{,}72} = 1{,}066\ 6.$$

Puissance consommée dans le circuit

$$P = UI\cos\varphi\ \ avec\ \cos\varphi = \frac{R+r}{Z} \Rightarrow P = UI\frac{(R+r)}{Z}$$

$$Or\ Z = \frac{U}{I} \Rightarrow I = \frac{U}{Z} \Rightarrow P = U \times \frac{U}{Z} \times \frac{(R+r)}{Z} = \frac{{U_e}^2(R+r)}{Z^2}$$

7. Puissance moyenne reçue à la résonance

A la résonance $R + r = Z$ et $\varphi = 0$

$$P = \frac{{U_e}^2(R+r)}{Z^2} = \frac{{U_e}^2}{Z} = \frac{4^2}{424{,}10} = 3{,}77 \times 10^{-2}W$$

Solution 7

1. a)) Expression de $u_{AB}(t)$ en fonction de Z_1, I_{max}, ω et φ_1

$$u_{AB}(t) = U_{ABmax}\sin(\omega t + \varphi_1)\ \ or\ Z_1 = \frac{U_{ABmax}}{I_{max}}$$

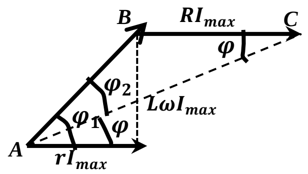
$$U_{ABmax} = Z_1 I_{max} \Rightarrow u_{AB}(t) = Z_1 I_{max}\sin(\omega t + \varphi_1)$$

b)) Expression de $u_{BC}(t)$ en fonction de R, I_{max} et ω

$$u_{BC}(t) = U_{BCmax}\sin(\omega t)\ \ or\ Z_2 = R = \frac{U_{BCmax}}{I_{max}};$$

$$U_{BCmax} = RI_{max} \Rightarrow u_{BC}(t) = RI_{max}\sin(\omega t)$$

2. a)) Diagramme de Fresnel



b)) *Calcul de* φ et φ_1

Dans le triangle ABC :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2ACBC\cos\varphi \Rightarrow$$

$${U_{AB}}^2 = {U_{AC}}^2 + {U_{BC}}^2 - 2U_{AC}U_{BC}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{{U_{AC}}^2}{2U_{AC}U_{BC}} = \frac{U_{AC}}{2U_{BC}}$$

$$\cos\varphi = \frac{70\sqrt{3}}{2\times 70} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}rad$$

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2BAAC\cos\varphi_2 \Rightarrow$$

$${U_{BC}}^2 = {U_{BA}}^2 + {U_{AC}}^2 - 2U_{BA}U_{AC}\cos\varphi_2 \Rightarrow \cos\varphi_2 = \frac{U_{AC}}{2U_{AB}}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{70\sqrt{3}}{2\times 70} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}rad\ \text{et}$$

$$\varphi_1 = \varphi + \varphi_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}rad$$

3. a)) Calcule Z_1 r, L

$$U_{AB} = IZ_1\,, U_{BC} = RI\ \ et\ \ U_{AB} = U_{BC}$$

$$\Leftrightarrow IZ_1 = RI\ \ \Rightarrow Z_1 = R = 100\Omega$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{L\omega I_m}{Z_1 I_m} = \frac{L\omega}{Z_1} \Rightarrow L = \frac{Z_1\sin\varphi_1}{\omega}$$

$$A.N:\ L = \frac{100\times\sin 60°}{100\pi} = 0{,}275H$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{rI_m}{Z_1 I_m} = \frac{r}{Z_1} \Rightarrow r = Z_1\cos\varphi_1 = 100\cos 60° = 50\Omega$$

b)) Expression de $U_{AC}(t)$

$$U_{AC}(t) = ZI_m\sin(\omega t + \varphi)\ \text{où :}\ Z = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega)^2}$$

$$A.N:\ \ Z = \sqrt{(100+50)^2 + (100\pi\times 0{,}275)^2} = 173{,}10\Omega$$

$$I_m = I\sqrt{2}\ \ or\ \ I = \frac{U_{BC}}{R} = \frac{70}{100} = 0{,}7A$$

$$et\ \ ZI_m = 173{,}07 \times 0{,}7\sqrt{2} = 171{,}33V$$

$$U_{AC}(t) = 171{,}33\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Solution 8

a)) Calcul de l'impédance $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$$\begin{cases} L\omega = 0{,}4 \times 250 = 100 \\ \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{40 \times 10^{-6} \times 250} = 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z = \sqrt{50^2 + (100 - 100)^2} = 50\Omega \ \Rightarrow Z = R = 50\Omega$$

D'où le circuit est à la résonance et

la pulsation à la résonance est $\omega_0 = 250 \mathrm{rad.s^{-1}}$

b)) Déphase entre u(t) et i(t)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(2\pi NL - \frac{1}{2\pi NC}\right)^2}$$

$$\begin{cases} 2\pi NL = 2\pi \times 50 \times 0{,}4 = 125{,}66 \\ \dfrac{1}{2\pi NC} = \dfrac{1}{2\pi \times 0{,}4 \times 40 \times 10^{-6}} = 79{,}58 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z = \sqrt{50^2 + (125{,}66 - 79{,}58)^2} = 68\Omega$$

$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{50}{68} = 0{,}735 \ \ or\ 2\pi NL < \frac{1}{2\pi NC} \Rightarrow \ \varphi < 0$

$\cos\varphi = 0{,}735 \Rightarrow \varphi = -42{,}69° = -0{,}745 rad$

c)) Expression de i(t)

$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) = I\sqrt{2}\sin(100\pi t - 0{,}745)$

$I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{20}{68} = 0{,}29 \Rightarrow i(t) = 0{,}69\sqrt{2}\sin(100\pi t - 0{,}745)$

d)) Calcul de la puissance moyenne :

$$P = UI\cos\varphi = 20 \times 0{,}29 \times 0{,}745 = 4{,}32W$$

2. a)) Valeur de la capacité C à la résonance

A la résonance $N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \ \Rightarrow \ N^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} \ \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 LN^2}$

$$C = \frac{1}{4\pi^2 LN^2} = \frac{1}{4 \times 10 \times 0{,}4 \times 50^2} = 2{,}5 \times 10^{-5} = 25\mu F$$

b)) Puissance moyenne à la résonance

$P_{moy} = UI\cos\varphi \quad or\ à\ la\ résonance\ \varphi = 0 \ \Rightarrow \cos\varphi = 1$

$P_{moy} = UI = 20 \times 0{,}29 = 5{,}8W$

- Tension efficace aux bornes de la bobine

$U_L = Z_L I = L\omega_0 I = 2\pi L N_0 I = 2\pi \times 0{,}4 \times 50 \times 0{,}29 = 36{,}44V$

Solution 9

1. *Calcul de R, L C et ω_0*

A la résonance $Z = R = \frac{U}{I} = \frac{10}{0{,}1} = 100A$

- La largeur de la bande passante est définie par :

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} \Rightarrow L = \frac{R}{\Delta\omega} = \frac{100}{20\pi} = 1{,}59H$$

- Le facteur de qualité est défini par

$: Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow Q^2 = \frac{L}{R^2 C} \ \Rightarrow C = \frac{L}{Q^2 R^2}$

$$C = \frac{1{,}59}{100^2 \times 100^2} = 1{,}59 \times 10^{-8} C$$

Pulsation à la résonance :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}59 \times 1{,}59 \times 10^{-8}}} = 6{,}29 \times 10^3 rad.s^{-1}$$

2. a)) Tension efficace aux bornes du condensateur :

$$U_C = Z_C I = QU = 100 \times 10 = 1000V$$

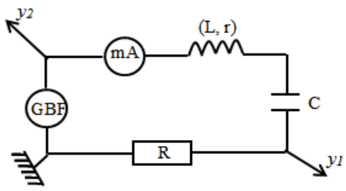
b)) Puissance Moyenne consommée dans le circuit

$P = UI\cos\varphi \ \ et\ à\ la\ résonance\ \ \varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1$

$$\Rightarrow P = UI = 10 \times 0{,}1 = 1W$$

Solution 10

1. Schéma du circuit (RLC)



Voie y_1 : on visualise la tension aux bornes de la résistance R.

Voie y_2 : on visualise la tension aux bornes du dipole RLC.

2. a)) Calcul de l'inductance L

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \ \Rightarrow \ N_0{}^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} \ \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 C N_0{}^2}$$

$$L = \frac{1}{4 \times 10 \times 3{,}3 \times 10^{-6} \times 148^2} = 0{,}345H$$

b)) Valeur de l'intensité I

$U_C = Z_C I = \frac{1}{C\omega_0} I = L\omega_0 I \ \Rightarrow I = \frac{U_C}{L\omega_0} = \frac{U_C}{2\pi N_0 L}$

$A.N:\ I = \dfrac{15}{2\pi \times 148 \times 0{,}345} = 46{,}75 \times 10^{-3} A$

c)) Valeur de la largeur de la bande passante

$$\Delta N = \frac{R + r}{2\pi L} = \frac{47 + 15}{2\pi \times 0{,}345} = 28{,}60 Hz$$

3. a)) Calcul de l'impédance Z du circuit

$$Z = \sqrt{(R + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{(R + r)^2 + \left(2\pi NL - \frac{1}{2\pi NC}\right)^2}$$

$$\begin{cases} 2\pi NL = 2\pi \times 200 \times 0{,}35 = 439{,}82 \\ \dfrac{1}{2\pi NC} = \dfrac{1}{2\pi \times 200 \times 3{,}3 \times 10^{-6}} = 241{,}14 \end{cases}$$

$$Z = \sqrt{(47 + 15)^2 + (439{,}82 - 241{,}14)^2} = 208{,}13\Omega$$

b)) Valeur de l'intensité efficace du courant

$$Z = \frac{U}{I} \ \Rightarrow I = \frac{U}{Z} = \frac{2{,}2}{208{,}13} = 0{,}01A$$

c)) Valeur de la tension aux bornes de la résistance :

$$U_R = RI = 47 \times 0{,}01 = 0{,}47V$$

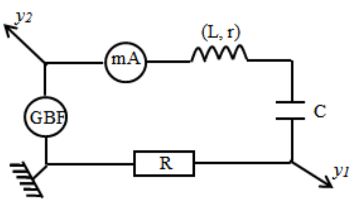
d)) Déphasage entre la tension et l'intensité

$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{47}{208{,}13} = 0{,}225 \ \Rightarrow \ \varphi = 1{,}34 rad$

.

Solution 11

1. a)) Schéma du circuit



b)) Equation différentielle du circuit (R ,L,C)

En appliquant la loi d'additivité des tension, on a :

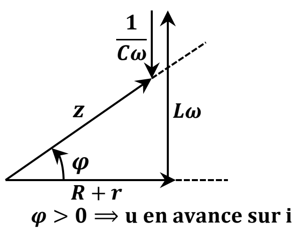
$$u = U_L + U_C + U_R \quad avec \ \ U_L = L\frac{di}{dt} + ri\,, U_R = Ri \quad et\ U_C = \frac{q}{C}$$

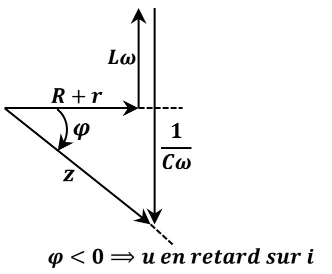
$$i = \frac{dq}{dt} \Longrightarrow q = \int idt \Longrightarrow u = L\frac{di}{dt} + ri + \int idt + Ri$$

$d'où: l'équation\ différentielle :$

$$u = (R+r)i + L\frac{di}{dt} + + \int idt$$

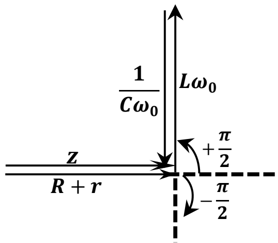
c)) Construction de Fresnel du circuit (R,L,C)





2. a)) u et i sont en phase, alors le circuit est à l'état de résonance.

- Construction de Fresnel du circuit à la résonance



b)) Montrons que l'équation différentielle s'écrit : $L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int idt = 0$

$On\ a : u = (R+r)i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int idt$ or à la résonance :

$$Z = (R+r) = \frac{u}{i} \Longrightarrow u = (R+r)i \Longrightarrow L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = 0$$

c)) Valeur de l'inductance L

Posons $i = I_{max}\sin(2\pi N_0 t)$

$$L\frac{d}{dt}(I_{max}\sin(2\pi N_0 t)) + \frac{1}{C}\int (I_{max}\sin(2\pi N_0 t))dt = 0$$

$$2\pi N_0 L I_{max}\cos(2\pi N_0 t) - \frac{1}{C}\frac{I_{max}}{2\pi N_0}\cos(2\pi N_0 t) = 0$$

$$\left(2\pi N_0 L - \frac{1}{2\pi c N_0}\right) I_{max} cos(2\pi N_0 t) = 0$$

$$Or\ \ I_{max}cos(2\pi N_0 t) \neq 0 \Longrightarrow 2\pi N_0 L - \frac{1}{2\pi N_0 C} = 0$$

$$\frac{4\pi^2 {N_0}^2 LC - 1}{2\pi N_0 C} = 0 \Longrightarrow 4\pi^2 {N_0}^2 LC - 1 = 0 \Rightarrow N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Et\ \ L = \frac{1}{4\pi^2 C {N_0}^2} = \frac{1}{4 \times 10 \times 1 \times 10^{-6} \times 500^2} = 0{,}1H$$

3. Etude d la courbe de résonance d'intensité

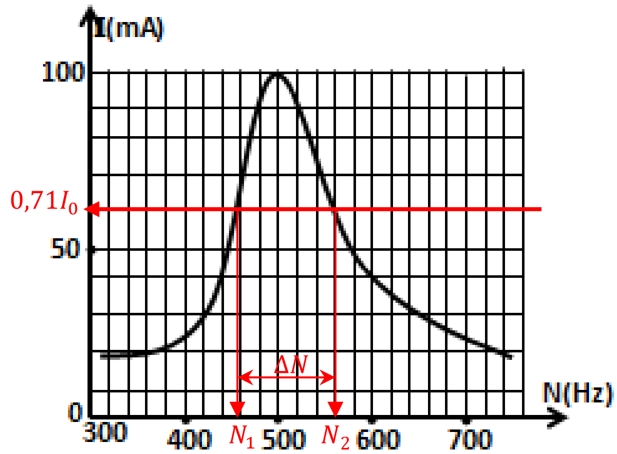
a)) A partir de la courbe $N_0 = 500$Hz

b)) La bande passante d'un circuit (RLC) désigne l'ensemble des fréquence pour lesquelles la réponse en intensité est supérieur à 71% de la réponse à la résonance.

Calculons la largeur de la bande passante

$\Delta N = N_2 - N_1 :\ la\ courbe\ done\ respectivement$

On a : $0{,}71 I_0 = 0{,}71 \times 100 = 71mA$



$N_1 = 460Hz\ \ et\ N_2 = 540Hz \ \Longrightarrow \Delta N = 540 - 460 = 80Hz$

c)) Calculons le facteur de qualité du circuit

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{500}{80} = 6{,}25$$

d)) Calcul de R_T , L et C

A la résonance l'impédance du circuit est minimale et égale à la résistance totale du circuit.

$$I = \frac{U}{Z}\ \ avec\ \ Z = R_T \Longrightarrow\ I_0 = \frac{U}{R_T} \Longrightarrow R_T = \frac{U}{I_0} = \frac{2}{0{,}1} = 20\Omega$$

$$\Delta N = \frac{R_T}{2\pi L} \ \Rightarrow L = \frac{R_T}{2\pi \Delta N} = \frac{20}{2\pi \times 80} = 3{,}97 \times 10^{-2}H$$

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \ \Longrightarrow {N_0}^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} \ \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 L {N_0}^2}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2 \times 3{,}97 \times 10^{-2} \times 500^2} = 2{,}52 \times 10^{-6}F$$

4. a)) Montrons que $\tan\varphi = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R - r} = \frac{L\omega}{R+r} - \frac{1}{(R+r)C\omega}$$

$$Or\ Q = \frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{1}{(R+r)C\omega_0}$$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega\omega_0}{(R+r)\omega_0} - \frac{1 \times \omega_0}{(R+r)C\omega\omega_0} = Q \times \frac{\omega}{\omega_0} - Q \times \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\Longrightarrow \tan\varphi = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

- Montrons Que $Z = (R+r)\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(\frac{(R+r)L\omega\omega_0}{(R+r)\omega_0} - \frac{(R+r)\omega_0}{(R+r)C\omega\omega_0}\right)^2}$$

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left((R+r)Q\frac{\omega}{\omega_0} - (R+r)Q\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + (R+r)^2Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$$Z = (R+r)\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

c)) <u>Montrer que le facteur de qualité</u> $Q = \frac{1}{R_T}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R_T} \quad avec \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{L}{R_T} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R_T}\sqrt{\frac{L^2}{LC}} = \frac{1}{R_T}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$A.N: Q = \frac{1}{20}\sqrt{\frac{3{,}97 \times 10^{-2}}{2{,}25 \times 10^{-6}}} = 6{,}64$$

d)) <u>Expression de U_C en fonction de Q et U</u>

$$U_C = Z_C I = \frac{1}{C\omega_0} \times \frac{U}{R_T} = \frac{1}{R_T C\omega_0} U = QU$$

Q est appelé coefficient de surtension à la résonance.

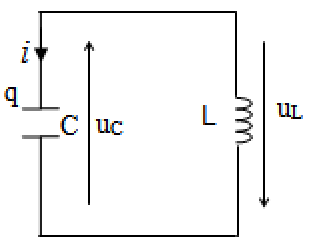
<u>Solution 12</u>

1. a)) <u>Calcul de la charge Q_0</u> :

$$Q_0 = CU = 10 \times 10^{-6} \times 10 = 10^{-4}C$$

- <u>Equation différentielle du circuit (L,C)</u>

En appliquant la loi d'ohm pour un circuit fermé :



$$u_C + u_L = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$i = \frac{dq}{qt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{dq^2}{dt^2} \Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{dq^2}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dq^2}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \ \ en\, posant \ \ {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \frac{dq^2}{dt^2} + {\omega_0}^2 q = 0 \ (1)$$

b)) <u>Expression de q(t) en fonction de t</u>

La solution de l'équation différentielle (1) est de la forme :

$q(t) = Q_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ Condition initiale :

$$Q_0 = Q_{max} = Q_{max}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$q(t) = Q_{max}\cos(\omega_0 t) \ \text{ où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}1 \times 10^{-5}}} = 1000 rad.s^{-1}$$

$$q(t) = 10^{-4}\cos(1000t)$$

- <u>Intensité maximal du courant</u>

$$i = -\frac{dq}{dt} = 10^{-4}.10^3\sin(10^3 t) = 0{,}1\sin(10^3 t) \Rightarrow I_{max} = 0{,}1A$$

d)) <u>Retrouvons l'équation différentielle</u>

$$E = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2 = cste$$

Les oscillations sont harmonique, alors l'énergie totale se conserve : $E = cste \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}C\frac{du^2}{dt} + \frac{1}{2}L\frac{di^2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}C \times 2u\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}L \times 2i\frac{di}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow Cu\frac{du}{dt} + Li\frac{di}{dt} = 0 \ \ or\ i = -\frac{dq}{dt} \ \ et \ \ \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2} \ \ et\ u = \frac{q}{C}$$

$$Soit \ \ C\frac{q}{C} \times \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + L\frac{dq}{dt} \times \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{dq}{dt}\left(\frac{q}{C} + L\frac{dq^2}{dt^2}\right) = 0$$

$$\frac{dq}{dt} \neq 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{dq^2}{dt^2} = 0 \ \Rightarrow \frac{dq^2}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

2. a)) <u>Intensité efficace du courant</u>

$$U_C = Z_C I = \frac{1}{C\omega}I \ \Rightarrow I = C\omega U_C = 2\pi NCU_C$$

$$\Rightarrow I = 2\pi \times 50 \times 10^{-5} \times 60 = 0{,}188A$$

b)) <u>Calcul de l'impédance Z du circuit</u> :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{120}{0{,}188} = 638{,}29\Omega$$

- <u>Valeur de la résistance R</u>

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \Rightarrow Z^2 = R^2 + (L\omega)^2 \Rightarrow R = \sqrt{Z^2 - (L\omega)^2}$$

$$R = \sqrt{Z^2 - (2\pi NL)^2} = \sqrt{638{,}29^2 - (2\pi.50.0{,}1)^2} = 637{,}5\Omega$$

c)) <u>Tensions aux bornes des composantes</u>

- Aux bornes de la résistance R:

$$U_R = RI = 637{,}5 \times 0{,}188 = 119{,}85V$$

- Aux bornes de la bobine :

$$U_L = Z_L I = L\omega I = 2\pi NLI = 2\pi \times 50 \times 0{,}1 \times 0{,}188 = 5{,}9V$$

d)) <u>Valeur du déphasage entre i et u</u>

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L\omega = 2\pi NL = 2\pi \times 50 \times 0{,}1 = 31{,}41 \\ \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi NC} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 10^{-5}} = 318{,}3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L\omega < \frac{1}{C\omega} \ \Rightarrow \varphi < 0$$

$$\tan\varphi = \frac{31{,}41 - 318{,}3}{637{,}5} = -0{,}45 \Rightarrow \varphi = -1{,}10 rad$$

<u>Solution 13</u>

1. <u>Valeur de U,</u> ω et φ

$u(t) = 12\sqrt{2}\cos(100\pi t + 0{,}92) \Rightarrow U = 12V, \omega =$ $100\pi rad.s^{-1}$ $et\ \varphi = 0{,}92rad$

2. <u>Calcul de l'impédance Z du circuit :</u> $Z = \frac{U}{I} = \frac{12}{1{,}2} = 10\Omega$

3. a)) <u>Expression de $\cos\varphi$ et $\tan\varphi$</u> : $\cos\varphi = \frac{r}{Z} \quad et\ \tan\varphi = \frac{L\omega}{r}$

b)) <u>Valeur numérique de r et L</u>

$$\cos\varphi = \frac{r}{Z} \Rightarrow r = Z\cos\varphi = 10\cos 52{,}7° = 6\Omega$$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega}{r} \Rightarrow L = \frac{r\tan\varphi}{\omega} = \frac{6\tan 52{,}7°}{100\pi} = 2{,}5 \times 10^{-2}H$$

4. <u>Valeur de la capacité C à la résonance</u>

A la résonance $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{L{\omega_0}^2}$

$$C = \frac{1}{2{,}5.10^{-2} \times (100\pi)^2} = 4{,}052 \times 10^{-4}F$$

5. a)) Valeur maximale de l'intensité : $I_0 = \frac{U}{r} = \frac{12}{6} = 2A$

b)) La tension efficace aux bornes du condensateur

$$U_C = Z_C I = \frac{1}{C\omega_0} \times I = \frac{2}{400 \times 10^{-6} \times 100\pi} = 15{,}915V$$

c)) Calculons le facteur du qualité Q :

$$Q = \frac{1}{rC\omega_0} = \frac{1}{6 \times 400 \times 10^{-6} \times 100\pi} = 1{,}326$$

6. a)) Expression de l'inductance

$$\Phi_P = NBS \ avec \ B = \mu_0 \frac{N}{l} i \ \Rightarrow \ \Phi_P = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i$$

$$-\text{ par définition } \Phi_P = L_{th} i \ \Rightarrow L_{th} i = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i$$

$$\Rightarrow L_{th} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

b)) Valeur numérique de L_{th}

$$L_{th} = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{500^2 \times 3{,}18 \times 10^{-2}}{0{,}4} = 2{,}5 \times 10^{-2} H$$

c)) On remarque que $L = L_{th} = 2{,}5 \times 10^{-2} H$

Solution 14

1. a)) Valeur de la période T

Une période correspond à 10cm, alors $T = 10 \times 2 = 20$ms

- La fréquence N : $N = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}020} = 50Hz$
- La pulsation ω : $\omega = 2\pi N = 100\pi rad.s^{-1}$

b)) Amplitude de chaque tension

- La voie y_1 donne les variations de la tension u_{NM}.

La valeur maximale de u_{NM} correspond à 5cm, donc

$$(U_{NM})_{max} = 5 \times 1 = 5V$$

$$U_{NM} = \frac{(U_{NM})_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3{,}53V$$

- Sur la voie y_2 apparait la tension U_{QM}, sa valeur maximale correspond à 8cm, donc :

$$U_{max} = 8 \times 3 = 24 \ et \ U_{QM} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{24}{\sqrt{2}} = 16{,}97V$$

c)) Intensité efficace aux bornes du générateur

$$(U_{NM})_{max} = RI_{max} \Rightarrow I_{max} = \frac{(U_{NM})_{max}}{R} = \frac{5}{15} = 0{,}33A$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{(U_{NM})_{max}}{R\sqrt{2}} = \frac{5}{15\sqrt{2}} = 0{,}235A$$

2. a)) Déphasage entre u et i

Par définition : $|\varphi| = 2\pi \frac{l}{L}$: La longueur correspondante à une période est :*L=10cm* et le décalage entre les deux courbes sur l'axe horizontal vaut : $l = 1{,}50cm$: $\varphi = 2\pi \frac{1{,}5}{10} = 0{,}3\pi$rad

La tension u est en avance sur i, donc : $\varphi = +0{,}3\pi$rad

b)) Expression de i(t) en fonction du temps

$$i(t) = I_{max} \cos(\omega t + \varphi) = 0{,}33 \cos(100\pi t - 0{,}3\pi)$$

3. a)) Impédance Z du circuit

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{16{,}97}{0{,}235} = 72{,}21\Omega$$

b)) Valeurs de r et L

$$cos\ \varphi = \frac{R+r}{Z} \Rightarrow R + r = Z\ cos\ \varphi = 72{,}21 \cos(0{,}3\pi) = 42{,}44\ \Omega$$

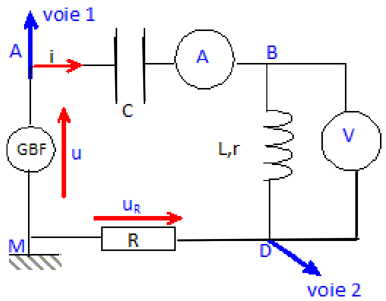
$$r = 42{,}44 - R = 42{,}44 - 15 = 27{,}44\Omega$$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega}{r+R} \Rightarrow L\omega = (R+r)\tan\varphi \Rightarrow L = \frac{(R+r)\tan\varphi}{\omega}$$

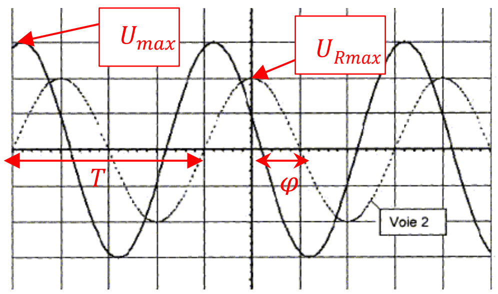
$$A.N:\ L = \frac{42{,}44 \tan 0{,}3\pi}{100\pi} = 0{,}186H = 186mH$$

EXERCICE 15

1. Schéma du circuit correspondant



2.a)) Calcul de la période, fréquence et la pulsation du signal



La période correspond à une longueur L=4cm=4div

$$T = 1 \times 4 = 4ms = 4 \times 10^{-3}s$$

Fréquence N : $N = \frac{1}{T} = \frac{1}{4 \times 10^{-3}} = 250Hz$

Pulsation :

$$\omega = 2\pi N = 2\pi \times 250 = 1{,}57 \times 10^3 rad.s^{-1}$$

b)) Détermination des valeurs efficaces U et U_R

$$U_{max} = 2 \times 3 = 6V \ \ et\ U_{Rmax} = 1 \times 2 = 2V$$

$$U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = 4{,}24V \ \ et\ U_R = \frac{U_{Rmax}}{\sqrt{2}} = 1{,}41V$$

Valeur de l'intensité I du courant

$$U_R = RI \ \ soit\ I = \frac{U_R}{R} = \frac{1{,}41}{220} = 6{,}4 \times 10^{-3}A$$

c)) Déphasage de u(t) par rapport à i(t)

$$|\varphi| = \frac{2\pi l}{L}$$

Une période correspond à une longueur $L = 4div = 4cm$

Le décalage horizontal entre les deux courbes : $l = 0{,}8div$ = 0,8cm

$$|\varphi| = \frac{2\pi \times 0{,}8}{4} = 0{,}4\pi rad$$

La courbe u(t) est en avance sur $u_R(t)$ donc sur l'intensité i(t).

3. Déduisons :

a)) l'expression de la tension u(t) et de l'intensité i(t)

$u(t) = U_{max}\sin(\omega t) = 6\sin(1{,}57\times 10^3 t)$

$i(t) = I_{max}\sin(\omega t+\varphi) = I\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)$

$i(t) = 6{,}4\times 10^{-3}\sqrt{2}\sin(1{,}57\times 10^3 t - 0{,}4\pi)$

D'où : $i(t) = 9{,}1\times 10^{-3}\sin(1{,}57\times 10^3 t - 0{,}4\pi)$

b)) La tension aux bornes d'un condensateur est en retard sur l'intensité ; la tension aux bornes de la bobine inductive est en avance sur l'intensité. L'intensité i(t) étant en retard sur la tension u(t), le dipôle est inductif.

c)) Valeur de l'impédance Z du dipôle RLC

$Z = \frac{U}{I} = \frac{4{,}24}{6{,}4\times 10^{-3}} = 662{,}5\Omega$

d)) Valeur de la capacité C du condensateur

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \Rightarrow Z^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = Z^2 - R^2 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = \sqrt{Z^2 - R^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C\omega} = L\omega - \sqrt{Z^2-R^2} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega}\times\left(\frac{1}{L\omega - \sqrt{Z^2-R^2}}\right)$$

$$A.N:\ C = \frac{1}{1{,}57\times 10^3}\times\left(\frac{1}{0{,}45\times 1{,}57\times 10^3 - \sqrt{662{,}5^2 - 220^2}}\right)$$

D'où : $C = 7{,}8\times 10^{-6}F = 7{,}8\mu F$

4. a)) Comme les deux tensions visualisées sont en phase, alors le phénomène observé est la résonance d'intensité.

b)) Retrouvons la valeur du condensateur C

A la résonance d'intensité : $LC{\omega_0}^2 = 1$

$$Soit\ \ C = \frac{1}{L{\omega_0}^2}\quad or\ \omega_0 = 2\pi N_0\ \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2{N_0}^2 L}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2\times 86{,}5^2\times 0{,}45} = 7{,}5\times 10^{-6}F$$

b)) A la résonance, l''impédance est minimale, égale à la résistance R du circuit : $Z = Z_0 = R = 220\Omega$

Déduisons la valeur de I correspondante :

A la résonance, U étant constant, Z étant minimale, l'intensité est maximale : $I = \frac{U}{R} = \frac{4{,}24}{220} = 1{,}93\times 10^{-2}A$

Solution 16

1.a)) Caractéristique de $\vec{B}$ au centre du solénoïde

- direction : parallèle à l'axe du solénoïde
- sens : de la face sud vers la face nord
- intensité : $B = 0{,}04T$

b)) Valeur de l'inductance L

$$\Phi_P = NBS\ \ avec\ \ B = \mu_0\frac{N}{l}i\ \ \Rightarrow\ \ \Phi_P = \mu_0\frac{N^2S}{l}i$$

par définition $\Phi_P = Li\ \ \Rightarrow Li = \mu_0\frac{N^2S}{l}i\ \ \ \Rightarrow L = \mu_0\frac{N^2S}{l}$

$$A.N:\ L = 4\pi\times 10^{-7}\times\frac{1500^2\times 5{,}4.10^{-2}}{0{,}75} = 0{,}2H$$

Valeur du flux propre de la bobine

$$\Phi_P = Li\ \ or\ B = \mu_0\frac{N}{l}i\ \Rightarrow i = \frac{Bl}{\mu_0 N}\ \ soit\ \Phi_P = L\frac{Bl}{\mu_0 N}$$

$$\Phi_P = 0{,}2\times\frac{0{,}04\times 0{,}75}{4\pi\times 10^{-7}\times 1500} = 3{,}18Wb$$

2. a)) Equation différentielle liant i

On a un dipôle (R ,L), alors en fermant l'interrupteur, la tension appliquée est donnée par la relation :

$$On\ a:\ E = u_L + u_R = -e + Ri = L\frac{di}{dt} + Ri \Rightarrow E = L\frac{di}{dt} + Ri$$

Vérifions que $i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{\frac{-t}{\tau}}\ \ \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E}{R\tau}e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{E}{L}e^{\frac{-t}{\tau}}$$

On remplace dans l'équation différentielle est ça donne:

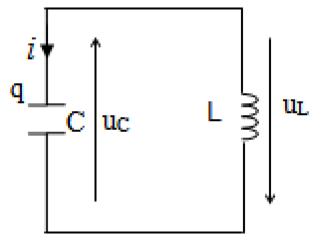
$$E = L\times\frac{E}{L}e^{\frac{-t}{\tau}} + E - Ee^{\frac{-t}{\tau}}\ ,soit\ E = E(cqfv)$$

b)) Calcul de l'énergie maximale emmagasinée

$$E_{max} = \frac{1}{2}L{I_{max}}^2\ \ avec\ I_{max} = \frac{E}{R}\ soit\ \ E_{max} = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2$$

$$E_{max1} = \frac{1}{2}\times 0{,}2\left(\frac{10}{8}\right)^2 = 0{,}156J$$

3. a)) Equation différentielle liant la charge q



$$u_C + u_L = 0 \Rightarrow u + L\frac{di}{dt} = 0\ \ avec\ i = \frac{dq}{qt}\ \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}\ \ et\ u = \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0\ \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0\ \ en\ posant\ {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + {\omega_0}^2 q = 0$$

soit $q(t) = Q_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ solution de l'équation différentielle

Condition initiale : *à t=0*, $Q_0 = Q_{max}$

$$\Rightarrow\ Q_{max} = Q_{max}\cos(\varphi) \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$q(t) = Q_{max}\cos(\omega_0 t)\ \ où\ \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b)) Calcul de C et T_0

$$I_{max} = CU_0\omega_0 = CU_0\times\frac{1}{\sqrt{LC}} = U_0\times\sqrt{\frac{C^2}{CL}} = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$soit\ \frac{C}{L} = \left(\frac{I_{max}}{U_0}\right)^2 \Rightarrow C = L\left(\frac{I_{max}}{U_0}\right)^2\ \ et\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$C = 0{,}2\left(\frac{0{,}036}{10}\right)^2 = 2{,}6\times 10^{-6}F = 2{,}6\mu F$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{0{,}2\times 2{,}6\times 10^{-6}} = 4{,}53\times 10^{-3}s = 4{,}53ms$$

c)) Montrons que l'énergie totale est constante

$$E = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2\ \ où\ \ i = -\frac{dq}{dt} = CU_{max}\omega_0\sin(\omega_0 t)$$

et $u = \frac{q}{C} = U_{max}\cos(\omega_0 t)$

$E = \frac{1}{2}CU_{max}{}^2cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}LC^2\omega_0{}^2U_{max}{}^2sin^2(\omega_0 t)$

or $LC\omega_0{}^2 = 1$

$Alors:\ E = \frac{1}{2}CU_{max}{}^2cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}CU_{max}{}^2sin^2(\omega_0 t) \Longrightarrow$

$E = \frac{1}{2}CU_{max}{}^2\left(cos^2(\omega_0 t) + sin^2(\omega_0 t)\right) = \frac{1}{2}CU_{max}{}^2 = cste$

$E = \frac{1}{2}CU_{max}{}^2 = \frac{1}{2} \times 2{,}6 \times 10^{-6} \times 10^2 = 1{,}3 \times 10^{-4}J$

4. a)) Calcul de l'impédance Z du circuit RLC

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} L\omega = 0{,}2 \times 100 = 20 \\ \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2{,}6 \times 10^{-6} \times 100} = 3{,}85 \times 10^3 \end{cases}$$

$Z = \sqrt{4^2 + (20 - 3{,}85 \times 10^3)^2} = 3{,}83k\Omega$

Calcul de l'intensité efficace I *:*

$$Z = \frac{U}{I} \Rightarrow I = \frac{U}{Z} = \frac{20}{3.80 \times 10^3} = 5{,}22\text{mA}$$

Valeur de déphasage :

$$tan\,\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{20 - 3{,}83 \times 10^3}{4} = -9{,}575 \times 10^2$$

$\varphi = tan^{-1}(-9{,}575 \times 10^2) = -90°$ (circuit capacitif)

b)) Puissance moyenne consommée

$P_{moy} = UI\cos\varphi = RI^2$

$P_{moy} = 4 \times (5{,}22 \times 10^{-3})^2 = 2{,}088 \times 10^{-2}W$

c)) Valeur de N_0

A la résonance

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}2 \times 2{,}6 \times 10^{-6}}} = 221Hz$$

Valeur de la largeur de la bande passante :

$\Delta N = N_2 - N_1 = \frac{R}{2\pi L} = \frac{4}{2\pi \times 0{,}2} = 3{,}18Hz$

Valeur du facteur de qualité Q

$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{0{,}2}{2{,}6 \times 10^{-6}}} = 69{,}33$

Puissance moyenne consommée à la résonance

$P = UI\cos\varphi$, or à la résonance $\varphi = 0 \Longrightarrow P = UI$

$P = 20 \times 5{,}22 \times 10^{-3} = 0{,}1044W$

Solutions sur l'Énergie Nucléaire et Atomique

Solution 1

1. a)) Équation de désintégration de cobalt 60

$^{60}_{27}Ca \longrightarrow {}^{60}_{28}X + {}_{-1}^{0}e$ comme $z = 28$; $X = Ni$

b)) Calcul de la constante radioactif λ

$$\lambda = \frac{ln2}{T} = \frac{ln2}{5,3} = 0,13année^{-1}$$

2. a)) Calcul de N_0

$$\frac{m_0}{M} = \frac{N_0}{N_A} \Longrightarrow N_0 = \frac{m_0}{M}N_A$$

$A.N$: $N_0 = \frac{1}{60} \times 6.02.10^{23} = 0,1 \times 10^{23}Noyaux$

b)) Nombre de noyau contenu à l'instant t_1=1anné

En utilisant la loi de décroissance radioactive : $N = N_0e^{-\lambda t}$

$A.N$: $N_1 = 0,1.10^{23} \times e^{-0,13 \times 1} = 0,088 \times 1^{23}Noyaux$

3. a)) Définition de l'activité radioactive :

C'est le nombre de noyaux désintégrés par unité de temps.

b)) Calcul de pourcentage $\frac{A(t_1)}{A(t_0)}$.

$$\frac{A(t_1)}{A(t_0)} = \frac{A_1}{A_0} = \frac{\lambda N_1}{\lambda N_0} = \frac{N_1}{N_0} = \frac{0,088 \times 1^{23}}{0,1. \times 10^{23}} = 0,88 = 88\%$$

Solution 2

1. Énergie de liaison par nucléon de α

$$E = \frac{\Delta mc^2}{A} = \frac{(Zm_n + Nm_n - m(\alpha))c^2}{A}$$

$$A.N:\ E = \frac{(2 \times 1,00728 + 2 \times 1,00867 - 4,0015)}{4} \times 931,5$$

$$E = \frac{7,0794MeV}{nucléon}$$

2. Composition du noyau de 227Th

$Z = 90$ *et* $N = A - Z = 227 - 90 = 137$

Le noyau de thorium contient :

$$Z = 90protons\ et\ N = 137neutrons$$

3. Réaction de désintégration α

$$^{227}_{90}Th \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{4}_{2}He$$

Conservation de A : $227 = A + 4 \Longrightarrow A = 223$ et

Conservation de Z : $90 = Z + 2 \Longrightarrow Z = 88$

L'élément dont $Z = 88$ *est la radium*, donc X = Ra, on a :

$$^{227}_{90}Th \longrightarrow {}^{223}_{88}Ra + {}^{4}_{2}He$$

4. a)) Définition de la T d'un radioélément

C'est le temps T où la moitié du nombre de noyau initial disparait.

b)) Encadrement de la valeur de la période T

On a : à $t = 0s, N/N_0 = 1 \Longrightarrow$ à $t = T$, $N/N_0 = 0,5$

soit $15 \leq T \leq 20j$

5. a)) Établissons la loi décroissance radioactive

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \Longrightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \Longrightarrow \ln N = -\lambda t + K$$

Or $t = 0, N = N_0 \Longrightarrow K = \ln N_0$ *soit* $\ln N - \ln N_0 = -\lambda t \Longrightarrow$

$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \Longrightarrow N = N_0e^{-\lambda t}$

b)) Valeur de la constante radioactive λ

$$N = N_0e^{-\lambda t} \Longrightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \Longrightarrow \ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{t}\ln\frac{N}{N_0}$$

$$A.N: \lambda = -\frac{1}{4}\ln 0,86 = 3,77 \times 10^{-2}j^{-1}$$

Déduisons la valeur de la période T

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{3,77 \times 10^{-2}} = 18,38jours$$

Solution 3

1. Valeur de x, y, x' et y'.

$$^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{226}_{88}Ra + x{}^{4}_{2}He + y{}_{-1}^{0}e$$

Conservation de mase : $238 = 226 + 4x \Longrightarrow x = 3$

Conservation de charge : $92 = 88 + 3 \times 2 - y \Longrightarrow y = 2$

D'où l'équation globale s'écrit : $^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{226}_{88}Ra + 3{}^{4}_{2}He + 2{}_{-1}^{0}e$

L'équation globale de la transformation du radon s'écrit :

$^{226}_{88}Ra \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + x'{}^{4}_{2}He + y'{}_{-1}^{0}e$

Conservation de A : $226 = 206 + 4x' \Longrightarrow x' = 5$

Conservation de Z : $88 = 82 + 5.2 - y' \Longrightarrow y' = 4$

D'où : $^{226}_{88}Ra \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + 5{}^{4}_{2}He + 4{}_{-1}^{0}e$

2. a)) Équation de désintégration de l'uranium 238.

$$^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{A}_{Z}Th + {}^{4}_{2}He$$

Conservation de masse : $238 = A + 4 \Longrightarrow A = 234$

Conservation de charge : $92 = Z + 2 \Longrightarrow Z = 90$

D'où : $^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He$

b)) Calcul de l'énergie libérée lors de la réaction nucléaire :

$$E = \Delta mc^2$$

Valeur de la perte de masse :

$\Delta m = (m_{Th} + m_\alpha) - m_U = (234,0781 + 4,0026) - 238,086$

$\Delta m = -0,0053u$

$\Longrightarrow E = -0,0053 \times 1,67.10^{-27} \times (3.10^8)^2 = -7,96 \times 10^{-13}J$

$$E = -7,96 \times 10^{-13}J = \frac{-7,96 \times 10^{-13}}{1,6 \times 10^{-13}} = -4,975MeV$$

$E < 0 \Longrightarrow$ la réaction de désintégration de l'uranium 238 est exothermique.

c)) Vitesse d'émission de la particule α

$$E_C = |E| = \frac{1}{2}m_\alpha v^2 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{2|E|}{m_\alpha}}$$

$$A.N:\ v = \sqrt{\frac{2 \times 7,96 \times 10^{-13}}{4,0026 \times 1,67 \times 10^{-27}}} = 1,54 \times 10^7 m.s^{-1}$$

Solution 4

1. Équation traduisant les deux désintégrations

Désintégration de type α : $^{214}_{84}Po \longrightarrow {}^{A}_{Z}Pb + {}^{4}_{2}He$

Conservation A : $214 = A + 4 \Longrightarrow A = 210$ et conservation de Z :$84 = Z + 2 \Longrightarrow Z = 82$

D'où : ${}^{214}_{84}Po \longrightarrow {}^{210}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He$

Désintégration de type β^- : ${}^{210}_{82}Pb \longrightarrow {}^{A}_{Z}Bi + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$

Conservation A : $210 = A$ et

conservation de Z : $82 = Z - 1 \Longrightarrow Z = 83$

D'où : ${}^{210}_{82}Pb \longrightarrow {}^{210}_{83}Bi + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$

2. Type d'émission et cause

La deuxième désintégration s'accompagne d'une émission des particules $\bar{\gamma}$ très énergétique. Elle provient de la désintégration d'un noyau instable en un noyau stable.

3. Nombre de désintégrations x de α et y de β^-

${}^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + x{}^{4}_{2}He + y{}_{-1}^{0}e$

Conservation de mase : $238 = 206 + 4x \Longrightarrow x = 8$

Conservation de charge : $92 = 82 + 2 \times 8 - y \Longrightarrow y = 6$

D'où l'équation globale s'écrit : ${}^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + 8{}^{4}_{2}He + 6{}_{-1}^{0}e$

4. Comparaison de l'activité

131_I : $A_1 = \lambda_1 N_1 = \frac{\ln 2}{T_1} N_1$

$$Pour\ \ 132_I\ : A_2 = \lambda_2 N_2 = \frac{\ln 2}{T_2} N_2 = \frac{\ln 2}{T_2} N_1$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{13}{8{,}1} = 1{,}6 \Longrightarrow A_1 = 1{,}6 A_2$$

Solution 5

1. Proportion massique de chaque isotope dans le rubidium nature

$$\begin{cases} x_1 M_1 + x_2 M_2 = M \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 - x_1 \\ x_1 M_1 - x_1 M_2 + M_2 = M \end{cases}$$

$\Longrightarrow x_1(M_1 - M_2) = M - M_2$

$$x_1 = \frac{M - M_2}{M_1 - M_2} = \frac{85{,}47 - 86{,}91}{84{,}91 - 86{,}91} = 0{,}72 = 72\%\ \ et$$

$x_2 = 1 - 0{,}72 = 0{,}28 = 28\%$

2. a)) Équation de désintégration :

${}^{87}_{37}Rb \longrightarrow {}^{87}_{38}Sr + {}^{A}_{Z}X$

Conservation de A : $87 = 87 + A \Longrightarrow A = 0$ et

Conservation de Z : $37 = 38 + Z \Longrightarrow Z = -1$

L'élément dont $Z = -1$ et $A = 0$ est un particule β^- ou ${}_{-1}^{0}e$

D'où : ${}^{87}_{37}Rb \longrightarrow {}^{87}_{38}Sr + {}_{-1}^{0}e$

b)) Calcul de l'activité initiale :

$A_0 = \lambda N_0 = \frac{\ln 2}{T} N_0$, en supposant que à t=0,

$$N_0 = 1 \Longrightarrow A_0 = \frac{\ln 2}{T}$$

$A_0 = \frac{ln2}{47\times10^9} = 1{,}47 \times 10^{-11} désintégration\ par\ année.$

Solution 6

1. Nombre des désintégrations α et β

${}^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + x{}^{4}_{2}He + y{}_{-1}^{0}e$

Conservation de mase : $238 = 206 + 4x \Longrightarrow x = 8$

Conservation de charge : $92 = 82 + 2 \times 8 - y \Longrightarrow y = 6$

D'où : l'équation globale s'écrit : ${}^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + 8{}^{4}_{2}He + 6{}_{-1}^{0}e$

2. a)) Valeur de $r = \frac{N(Pb)}{N(U)}$

D'après la loi décroissance radioactive, le nombre de noyau N(U) présents à l'instant t est :

$N(Pb) = N_0(U) - N(U) = N(U)e^{\lambda t} - N(U) = N(U)\left(e^{\lambda t} - 1\right)$

$$\Longrightarrow r = \frac{N(Pb)}{N(U)} = e^{\lambda t} - 1$$

b)) Age t_1 du minerai

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A} \Longrightarrow N = \frac{m}{M} N_A$$

$$\Longrightarrow r = \frac{N(Pb)}{N(U)} = \frac{m(Pb)}{M(Pb)} \times \frac{M(U)}{m(U)} = e^{-\lambda t} - 1$$

$$e^{\lambda t} - 1 = r \Longrightarrow \lambda t = \ln(r + 1) = \ln\left(\frac{m(Pb)}{M(Pb)} \times \frac{M(U)}{m(U)} + 1\right)$$

$$Soit\ \ t_1 = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{m(Pb)}{M(Pb)} \times \frac{M(U)}{m(U)} + 1\right)$$

$$\Longrightarrow\ t_1 = \frac{T}{\ln 2} \times \ln\left(\frac{m(Pb)}{M(Pb)} \times \frac{M(U)}{m(U)} + 1\right)$$

$$A.N: t_1 = \frac{4{,}5.10^9}{ln2} \ln\left(\frac{10^{-2}}{206} \times 238 + 1\right) = 7{,}45 \times 10^7 années$$

Solution 7

1. Équation de la réaction nucléaire

${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}X \Longrightarrow X = P = proton$

2. a)) Montrons que $A = \frac{A_0}{2^k}$

D'après la loi de décroissance radioactive : $A = A_0 e^{-\lambda t}$

La période est le temps T où la moitié de l'activité initiale disparait : $T = \frac{ln2}{\lambda} \Longrightarrow \lambda = \frac{ln2}{T}$

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{ln2}{T}t} = A_0 e^{-\frac{ln2}{T}\times kT} = A_0 e^{-kln2}$$

$$soit\ \ A = A_0 e^{ln2^{-k}} = 2^{-k} A_0 \Longrightarrow A = \frac{A_0}{2^k}$$

Déduisons Activité à la date t = 11200ans=2T

$$A = \frac{A_0}{2^2} = \frac{\lambda N_0}{4} = \frac{\ln 2}{T} \times \frac{m_0}{M_0} N_A$$

$$A.N:\ A = \frac{\ln 2}{5600 \times 365 \times 24 \times 3600} \times \frac{7.10^{-3}}{4 \times 14} \times 6{,}02 \times 10^{23}$$

$A = 2{,}94 \times 10^8 Bq$

b)) Age approximatif du bois préhistorique

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = \frac{A_0}{7} \Longrightarrow e^{\lambda t} = 7 \Longrightarrow t = \frac{\ln 7}{\lambda} = \frac{ln7}{ln2} T$$

$$A.N:\ t = \frac{ln7}{ln2} \times 5600 = 15600ans$$

Solution 8

1. Équation de la réaction nucléaire

La désintégration du carbone 14 : ${}^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N + {}_{-1}^{0}e$

Le bombardement de l'atome d'azote sous l'impact d'un neutron :

$${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}H$$

2. Établissons la loi de décroissance radioactive

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \Longrightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \Longrightarrow \ln N = -\lambda t + K \;;$$

Or $t = 0, N = N_0 \Longrightarrow K = \ln N_0$

$$soit\ \ln N - \ln N_0 = -\lambda t \Longrightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \Longrightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Démontrons que $A = A_0 e^{-\lambda t}$

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}\ \ or\ à\ t = 0, A(t = 0) = A_0 = \lambda N_0$$

$$\Longrightarrow A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

3. Durée coulée depuis le dernier feu, dans la grotte

A l'instant t, $A = \frac{1{,}60}{60} = 0{,}0266Bq$ et à t = 0,

$$A_0 = \frac{11{,}6}{60} = 0{,}193Bq$$

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \Longrightarrow \frac{A_0}{A(t)} = e^{\lambda t} \Longrightarrow \lambda t = \ln\left(\frac{A_0}{A(t)}\right)$$

$$\Longrightarrow t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{A_0}{A(t)}\right) = \frac{T}{\ln 2} \ln\left(\frac{A_0}{A(t)}\right)$$

$$A.N:\ t = \frac{5570}{\ln 2} \times \ln\left(\frac{0{,}193}{0{,}0266}\right) = 15918{,}95 années$$

Solution 9

1. Équation de la réaction nucléaire :

$${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}P$$

2. Équation de désintégration du carbone 14 :

$${}^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$$

Calcul de l'énergie libérée lors de cette réaction de désintégration

$\mathrm{E} = \Delta \mathrm{m}c^2 = \big(m(N) + m(e) - m(14C)\big)c^2$

$E = (14{,}003074 + 0{,}00055 - 14{,}003241).931{,}5 = 3{,}074MeV$

3. Établissons la loi de décroissance radioactive

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \Longrightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \Longrightarrow \ln N = -\lambda t + K \;;$$

Or $t = 0, N = N_0 \Longrightarrow K = \ln N_0$

$$soit\ \ln N - \ln N_0 = -\lambda t \Longrightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \Longrightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Relation entre la période T et la constante radioactive λ,

La période T est la durée nécessaire pour que la moitié de noyau initial disparait :

$$A\ t = T, N = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \Longrightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Longrightarrow e^{\lambda T} = 2$$

$$\Longrightarrow \lambda T = \ln 2 \Longrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

$$A.N:\ \lambda = \frac{\ln 2}{5730} = 1{,}21 \times 10^{-4} année^{-1}$$

4. Détermination de la date de décès de l'individu

$$N = 0{,}78N_0 = N_0 e^{-\lambda t} \Longrightarrow 0{,}78 = e^{-\lambda t} \Longrightarrow e^{\lambda t} = \frac{100}{78}$$

$$\Longrightarrow \lambda t = \ln\left(\frac{100}{78}\right) \Longrightarrow t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{100}{78}\right)$$

$$A.N: t = \frac{1}{1{,}21 \times 10^{-4}} \ln\left(\frac{100}{78}\right) = 2{,}053 \times 10^3 années.$$

Solution 10

1. Équation de désintégration

$${}^{40}_{19}K \longrightarrow {}^{40}_{18}Ar + {}^{A}_{Z}X$$

Conservation de A : $40 = 40 + A \Longrightarrow A = 0$ et

conservation de Z : $19 = Z + 18 \Longrightarrow Z = 1$

particule dont $Z = 1\ et\ A = 0$ est u positon (: ${}^{0}_{1}e\ : \beta^+$) ; d'où :

$${}^{40}_{19}K \longrightarrow {}^{40}_{18}Ar + {}^{0}_{1}e$$

2. a)) Constante radioactive du potassium

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0{,}69}{1{,}5.10^9 \times 365 \times 24 \times 3600} = 1{,}4586 \times 10^{-17} s^{-1}$$

b)) Établissons la loi de décroissance radioactive

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \Longrightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \Longrightarrow \ln N = -\lambda t + K \;;$$

Or $t = 0, N = N_0 \Longrightarrow K = \ln N_0$

$$soit\ \ln N - \ln N_0 = -\lambda t \Longrightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \Longrightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Déduisons la relation entre $\frac{N(Ar)}{N(K)}$

$${}^{40}_{19}K \longrightarrow {}^{40}_{18}Ar + {}^{0}_{1}e$$

Nombre de noyaux d'Argon formé est égal aux nombres de noyau de potassium désintégré.

$$\frac{N(Ar)}{N(K)} = \frac{N_0 - N_0 e^{-\lambda t}}{N_0 e^{-\lambda t}} = \frac{N_0 e^{-\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t} - 1$$

c)) Age de ces roches

La masse du potassium (K) restante est $m(K) = 1{,}66 \times 10^{-6} g$ et le nombre de mol d'Argon (Ar) formé est :

$$n(Ar) = \frac{V}{V_m} = \frac{82 \times 10^{-4}}{22{,}4 \times 10^3} = 3{,}66 \times 10^{-7} mol$$

Nombre de mol de potassium désintégré est : $3{,}66 \times 10^{-7} mol$

Nombre des noyaux de potassium (K) restant :

$$N(K) = n(K) \times N_A = \frac{m(K)}{M(K)} \times N_A = \frac{1{,}66 \times 10^{-6}}{40} \times 6{,}02 \times 10^{23}$$

$$soit\ N(K) = 2{,}498 \times 10^{16} noyaux$$

Nombre de noyaux de potassium désintégré :

$$N(Ar) = n(Ar)N_A = 3{,}66 \times 10^{-7} \times 6{,}02 \times 10^{23}$$

$$soit\ N(Ar) = 2{,}20 \times 10^{17} noyaux$$

$$\frac{N(Ar)}{N(K)} = \frac{2{,}20 \times 10^{17}}{2{,}498 \times 10^{16}} = 8{,}80 \Longrightarrow e^{\lambda t} - 1 = 8{,}80$$

$$\Longrightarrow e^{\lambda t} = 9{,}80 \Longrightarrow \lambda t = \ln 9{,}80$$

$$t = \frac{\ln 9{,}80}{\lambda} = \frac{\ln 9{,}80}{\ln 2} T$$

$$A.N: t = \frac{\ln 9{,}80}{\ln 2} \times 1{,}5 \times 10^9 = 4{,}94 \times 10^9 années$$

3. a)) Âges des ossements

$$N(Ar) = 4N(K) \Longrightarrow \frac{N(Ar)}{N(K)} = 4 \Longrightarrow e^{\lambda t} - 1 = 4 \Longrightarrow \lambda t = \ln 5$$

$\Longrightarrow t = \dfrac{\ln 5}{\lambda} = \dfrac{\ln 5}{\ln 2}T$

$t = \dfrac{\ln 5}{\ln 2} \times 1{,}5 \times 10^9 = 3{,}48 \times 10^9 années$

Solution 11

1. Calcul de A et Z

$${}_1^1H + {}_3^7Li \longrightarrow {}_2^4He + {}_Z^AX$$

Conservation de A : $1 + 7 = 4 + A \Longrightarrow A = 4$

Conservation de Z : $1 + 3 = 2 + Z \Longrightarrow Z = 2$

L'élément dont Z = 2 est l'hélium (He), alors :

$${}_1^1H + {}_3^7Li \longrightarrow 2\,{}_2^4He$$

b)) Calcul de la variation de la masse en u

$E = \Delta mc^2 \Longrightarrow \Delta m = \dfrac{E}{c^2} = \dfrac{3{,}7}{931{,}5} = 2{,}972 \times 10^{-3}u$

2. a)) Équation de désintégration du césium

Cs est radioactif $\boldsymbol{\beta^-}$, alors : ${}_{55}^{137}Cs \longrightarrow {}_Z^AX + {}_{-1}^{0}e$

Conservation de A :$137 = A$ et

conservation de Z : $35 = Z - 1 \Longrightarrow Z = 56$

Comme Z = 56, alors X = Ba et l'équation devient :

$${}_{55}^{137}Cs \longrightarrow {}_{56}^{137}Ba + {}_{-1}^{0}e$$

b)) Énergie libérée en MeV au cours de la désintégration du césium 137

$E = \Delta mc^2 = (m_{Ba} + m_e - m_{Cs})c^2$

$E = (136{,}9750 + 0{,}0055 - 136{,}8773) \times 931{,}5 = 91{,}52MeV$

3. a)) Activité initiale $\boldsymbol{A_0}$

$A_0 = \lambda N_0$ où $\lambda = \dfrac{ln2}{T}$ et $n = \dfrac{m_0}{M} = \dfrac{N_0}{N_A}$ soit $N_0 = \dfrac{m_0}{M}N_A$

$\Longrightarrow A_0 = \dfrac{ln2}{T}.\dfrac{m_0}{M}N_A$

$A_0 = \dfrac{0{,}69}{30 \times 365 \times 24 \times 3600} \times \dfrac{1}{137} \times 6{,}02 \times 10^{23}$

$= 3{,}2047 \times 10^{12}Bq$

b)) Temps si $m = \frac{3}{4}m_0$

En utilisant la loi de décroissance radioactive, on a :

$$m = m_0e^{-\lambda t} = \frac{3}{4}m_0$$

$$e^{-\lambda t} = \frac{3}{4} \; soit \; e^{\lambda t} = \frac{4}{3} \Longrightarrow \lambda t = ln\frac{4}{3}$$

$$\Longrightarrow t = \frac{1}{\lambda}ln\frac{4}{3} = \frac{(ln\,4 - ln\,3)}{ln\,2}T$$

$A.N:\; t = \frac{(ln\,4 - ln\,3)}{ln\,2}(30) = 12{,}45ans$

Solution 12

1. Nombre de désintégration α et β

L'équation globale de la transformation du radon s'écrit :

$${}_{88}^{226}Ra \longrightarrow {}_{82}^{206}Pb + x\,{}_2^4He + y\,{}_{-1}^{0}e$$

Conservation de A : $226 = 206 + 4x \Longrightarrow x = 5$

Conservation de Z : $88 = 82 + 5 \times 2 - y \Longrightarrow y = 4$

D'où : ${}_{88}^{226}Ra \longrightarrow {}_{82}^{206}Pb + 5\,{}_2^4He + 4\,{}_{-1}^{0}e$

2. a)) Masse du radon restant à la date nT

$m = \dfrac{m_0}{2^n}$ d'où la masse désintégrée à cette date est:

$m' = m_0 - \dfrac{m_0}{2^n}$

b)) Durée nécessaire pour que $m' = \frac{3}{4}m_0$

En utilisant la loi de décroissance radioactive :

$m' = m_0 - m_0e^{-\lambda t} = \dfrac{4}{9}m_0$

$m_0 - m_0e^{-\lambda t} = \dfrac{4}{9}m_0 \Longrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = \dfrac{4}{9} \Longrightarrow e^{-\lambda t} = \dfrac{5}{9}$

$\Longrightarrow e^{\lambda t} = \dfrac{9}{5}$ soit $t = \dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{9}{5}$

soit $t = \dfrac{(\ln 9 - \ln 5)}{\ln 2}T = \dfrac{(\ln 9 - \ln 5)}{\ln 2} \times 3{,}825 = 3{,}243jours$

3. a)) Équation de désintégration

$${}_{88}^{226}Ra \longrightarrow {}_{82}^{222}Rn + {}_Z^AX$$

Conservation de A : $226 = 222 + A \Rightarrow A = 4$ et

conservation de Z : $88 = 82 + Z \Rightarrow Z = 2$

L'élément dont Z = 2 est l'Hélium (He),

alors la particule émise est $\boldsymbol{\alpha}$.

L'équation devient : ${}_{88}^{226}Ra \longrightarrow {}_{82}^{222}Rn + {}_2^4He$

b)) Calcul de l'énergie libérée lors de la désintégration du radon 226

$E = \Delta mc^2 = (m_{Rn} + m_{He} - m_{Ra})c^2$

$E = (222{,}0869 + 4{,}0026 - 226{,}0960).1{,}67.10^{-27} \times (3.10^8)^2$

soit $E = -1{,}328 \times 10^{-12}J$

c)) Vitesse émise par les particules $\boldsymbol{\alpha}$

$E_C = |E| = \dfrac{1}{2}m_{He}v^2 \Longrightarrow v = \sqrt{\dfrac{2|E|}{m_{He}}}$

$A.N:\; v = \sqrt{\dfrac{2 \times 1{,}328 \times 10^{-12}}{4{,}0026 \times 1{,}67 \times 10^{-27}}} = 2 \times 10^7 m.s^{-1}$

La valeur trouvée justifie l'application de la mécanique classique car $v < 0{,}1c$.

c)) Valeur réelle de la vitesse de la particule $\boldsymbol{\alpha}$

$|E| = E_C + E(\gamma) \Longrightarrow E_C = |E| - E(\gamma)$ or

$E\,(\gamma) = hf$ ave $f = \dfrac{c}{\lambda}$ soit $E(\gamma) = h\dfrac{c}{\lambda} = 6{,}6.10^{-34} \times \dfrac{3.10^8}{10^{-12}}$

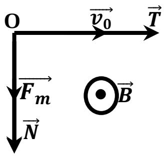
$= 1{,}98 \times 10^{-13}\,J$

$$E_C = 1{,}328 \times 10^{-12} - 1{,}98 \times 10^{-13} = 1{,}13 \times 10^{-12}J$$

$$E_C = \frac{1}{2}m_{He}{v_0}^2 \Longrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2E_C}{m_{He}}}$$

$A.N:\; v_0 = \sqrt{\dfrac{2 \times 1{,}13 \times 10^{-12}}{4{,}0026 \times 1{,}67 \times 10^{-27}}} = 1{,}84 \times 10^7 m.s^{-1}$

4. a)) Démontrons que le mouvement de la particule $\boldsymbol{\alpha}$ est circulaire uniforme



La particule $\boldsymbol{\alpha}$ dans le champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, est soumise à la force magnétique $\vec{F_m} = |q|\vec{v_0}\Lambda\vec{B}$, elle est verticale et dirigée vers le bas.

$$T.C.I: \vec{F_m} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m}$$

Dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$

$$\vec{F_m} = |q|v_0B\vec{N} \quad et \quad \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{m} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N}$$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{{v_0}^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|v_0B}{m}\vec{N} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

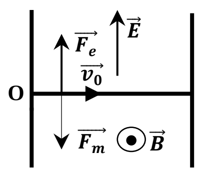
$\Rightarrow v = cte\ donc$ le mouvement est uniforme

Par identification : $\frac{{v_0}^2}{R} = \frac{|q|v_0B}{m} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B} = cte \Rightarrow$

le mouvement est circulaire.

D'où le mouvement des particules $\boldsymbol{\alpha}$ est circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv_0}{|q|B}$.

b)) Calcul de l'intensité du champ E



Dans cette nouvelle zone, la particule α est soumise simultanément à la force électrostatique $\vec{F_e}$ et à la force magnétique $\vec{F_m}$.

Puisque la particule est pseudo-isolée, alors :

$$\vec{F_e} + \vec{F_e} = \vec{0} \Rightarrow F_e = F_m \Rightarrow |q|v_0B = |q|E \Rightarrow E = v_0B$$

$$E = 1{,}84 \times 10^7 \times 10^{-3} = 1{,}84 \times 10^4 V.m^{-1}$$

Solution 13

1. a)) Valeur de la puissance de la pile

$$P = \frac{E}{\Delta t}\ avec\ \ E = \Delta mc^2\ soit\ P = \frac{\Delta mc^2}{\Delta t}$$

$$P = \frac{0{,}1 \times 10^{-2} \times 0{,}4 \times (3.10^8)^2}{24 \times 3600} = 4{,}167 \times 10^8 W$$

b)) Vitesse de chaque neutron

$$E_C = E = \frac{1}{2}m_n{v_0}^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m_n}}$$

$$A.N:\ v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 1}{931{,}5}} = 4{,}63 \times 10^{-2}c = 1{,}389 \times 10^7 m.s^{-1}$$

2. a)) Vitesse d'un neutron après le 1er choc

Comme le choc est parfaitement élastique : il y a conservation de quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

Avant le choc : $P = m_n\vec{v}_0\ \ et\ \ E_C = \frac{1}{2}m_n{v_0}^2$

Après le choc : $P = m_n\vec{v}'_1 + m_c\vec{v}_c$ et $E_C = \frac{1}{2}m_n{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_c{v'_c}^2$

- Conservation de quantité de mouvement :

$$m_n\vec{v}_0 = m_n\vec{v}'_1 + m_c\vec{v}_c \Rightarrow m_nv_0 = m_nv'_1 + m_cv'_c \Rightarrow$$

$$m_n(v_0 - v'_1) = m_cv'_c\ (1)$$

- Conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}m_n{v_0}^2 = \frac{1}{2}m_n{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_c{v'_c}^2$$

$$\Rightarrow m_n({v_0}^2 - {v'_1}^2) = m_c{v'_c}^2 (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow v_0 + v'_1 = v'_c\ (3)$$

$$dans\ \ (1):\ m_nv_0 = m_nv'_1 + m_c(v_0 + v'_1)$$

$$v_1 = \frac{(m_n - m_c)}{m_n + m_c}v_0$$

b)) Vitesse du neutron après le 2ème choc :

D'après la question précédente

$$v_2 = \frac{(m_n - m_c)}{m_n + m_c}v_1 = \frac{(m_n - m_c)}{m_n + m_c} \times \frac{(m_n - m_c)}{m_n + m_c}v_0$$

$$soit\ \ v_2 = \left(\frac{(m_n - m_c)}{m_n + m_c}\right)^2 v_0$$

$$Posons\ \ k = \frac{(m_n - m_c)}{m_n + m_c} \Rightarrow v_2 = k^2v_0$$

Après la troisième choc : $v_3 = k^3v_0$

$Après\ le\ n^{ème}\ choc:\ v_n = k^nv_0$ où $k = \frac{(m_n - m_c)}{m_n + m_c}$

c)) Nombre de choc effectué par le neutron :

Au $n^{ième}$ choc : E = 0,1MeV ; alors :

$$E_C = E = \frac{1}{2}m_n{v_n}^2 \Rightarrow v_n = \sqrt{\frac{2E}{m_n}}$$

$$A.N: v_n = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}1}{931{,}5}} = 1{,}465 \times 10^{-2}c = 4{,}395 \times 10^6 m.s^{-1}$$

$$v_n = k^nv_0 \Rightarrow k^n = \frac{v_n}{v_0} \Rightarrow n\ln|k| = \ln\left|\frac{v_n}{v_0}\right|$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln\left|\frac{v_n}{v_0}\right|}{\ln|k|}\ \ \text{où}\ k = \frac{1 - 12}{1 + 12} = \frac{11}{13}$$

$$\frac{v_n}{v_0} = \frac{4{,}395 \times 10^6}{1{,}389 \times 10^7} = \frac{293}{926} \Rightarrow n = \frac{\ln\left|\frac{293}{926}\right|}{\ln\left|\frac{11}{12}\right|} = 13{,}22 chocs$$

Solution 14

1. a)) Définition de la réaction de fission nucléaire

C'est l'éclatement d'un noyau lourd par bombardement d'un neutron lent pour donner deux noyaux légers.

$$^{235}_{92}\boldsymbol{U} + {}^1_0\boldsymbol{n} \rightarrow {}^{91}_{b}\boldsymbol{Zr} + {}^{a}_{58}\boldsymbol{Ce} + 3\,{}^1_0\boldsymbol{n} + 6\,{}^{0}_{-1}\boldsymbol{e}.$$

Conservation de masse : $235 - 1 = 91 + a + 3 \Rightarrow a = 144$

Conservation de charge : $92 = b + 58 - 6 \Rightarrow b = 40$

b)) Définition de l'unité de masse atomique :

C'est le douzaine de la masse du carbone 12.

c)) Énergie de liaison par nucléon de l'uranium 235.

$$E = \frac{E_l}{A} = \frac{\Delta mc^2}{A} = \frac{\left(Zm_n + Nm_n - m(U)\right)c^2}{A}$$

$$E = \frac{(92 \times 1{,}00728 + 143 \times 1{,}00867 - 224{,}9934)}{235} \times 931{,}5$$

$$soit \;\; E = \frac{7{,}589MeV}{nucléon}$$

d)) Énergie libérée au cours de la réaction de fission

$$E = \sum E_l\,(après) - \sum E_{l(}avant)$$

$$E = E_l(91Zr) + E_l(14Ce) - E_l(235U)$$

$$or \; E' = \frac{E_l}{A} \Longrightarrow E_l = AE'$$

$$E = 91 \times 8{,}8 + 14 \times 8{,}45 - 235 \times 7{,}59 = 200{,}15MeV$$

$$E = 200{,}15 \times 1{,}6 \times 10^{-13} = 3{,}2024 \times 10^{-11}J$$

c)) Vitesse acquise par les neutrons

L'énergie libérée par les neutrons est :

$$E((neutrons) = 100 - 90{,}5 = 9{,}5\%E$$

$$E(neutrons) = 0{,}095 \times 200{,}15 = 19{,}01425MeV$$

$$E_C = E(n) = \frac{1}{2}m_{nT}{v_n}^2 \Longrightarrow v_n = \sqrt{\frac{2E(n)}{m_{nT}}}$$

$$A.N: \quad v_n = \sqrt{\frac{2 \times 19{,}01425}{3 \times 931{,}5}} = 1{,}1665 \times 10^{-1}c$$

$$v_{nT} = 1{,}1665 \times 10^{-1} \times 3 \times 10^8 = 3{,}50 \times 10^7 m.s^{-1}$$

La vitesse totale de trois neutrons produites est :

$$3{,}50 \times 10^7 m.s^{-1}$$

La vitesse moyenne d'un neutron est :

$$v = \frac{v_{nT}}{3} = \frac{3{,}50 \times 10^7}{3} = 1{,}167 \times 10^7 m.s^{-1}$$

2. a)) Valeur de A_1 et Z_1

$${}^{235}_{92}U \;\longrightarrow\; {}^{A_1}_{Z_1}Pu + 2\beta^- \;\Longrightarrow\; {}^{235}_{92}U \;\longrightarrow\; {}^{A_1}_{Z_1}Pu + 2{}^{\;0}_{-1}e$$

Conservation de nombre de masse : $235 = A_1$

Conservation de nombre de charge : $92 = Z_1 - 2 \Longrightarrow Z_1 = 90$

Établissons la loi de décroissance radioactive

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \Longrightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \Longrightarrow \ln N = -\lambda t + K \;\;;$$

Or $t = 0, N = N_0 \Longrightarrow K = \ln N_0$

$$soit \;\ln N - \ln N_0 = -\lambda t \Longrightarrow \ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t \Longrightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}$$

b)) Âges de ces roches

Nombre du noyau de thorium restant est :

$$N(Th) = \frac{m}{M}N_A = \frac{7}{232} \times 6{,}02 \times 10^{23} = 1{,}816 \times 10^{22} noyaux$$

$$soit \; N_0 e^{-\lambda t} = N(Th) = 1{,}816 \times 10^{22} noyaux$$

Nombre de noyaux de plombe formés est égal au nombre noyaux de thorium désintégrés.

$$N(Pb) = \frac{m}{M}N_A = \frac{1}{208} \times 6{,}02 \times 10^{23} = 2{,}894 \times 10^{21} noyaux$$

$$Soit \;\; N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N(Pb) = 2{,}894 \times 10^{21} noyaux$$

$$\frac{N(Pb)}{N(Th)} = \frac{N_0 - N_0 e^{-\lambda t}}{N_0 e^{-\lambda t}} = \frac{N_0 e^{-\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t} - 1$$

$$\frac{N(Pb)}{N(Th)} = \frac{2{,}894 \times 10^{21}}{1{,}816 \times 10^{22}} = 0{,}159$$

$$\Longrightarrow e^{\lambda t} - 1 = 0{,}159 \Longrightarrow e^{\lambda t} = 1{,}159$$

$$\lambda t = \ln 1{,}159 \;\; soit \;\; t = \frac{\ln 1{,}159}{\lambda} = T\frac{\ln 1{,}159}{\ln 2}$$

$$A.N: \;\; t = 14 \times \frac{\ln 1{,}159}{\ln 2} = 3 \; millads \; d'années$$

Solution 15

1. C'est une réaction de fission car il y a éclatement d'un noyau lourd par bombardement d'un neutron lent pour donner deux noyaux légers.

2. Valeurs de a et b

$${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{139}_{a}I + {}^{b}_{39}Y + 3\,{}^{1}_{0}n$$

Conservation de masse : $235 - 1 = 139 + b + 3 \Longrightarrow b = 92$

Conservation de charge : $92 = a + 39 \Longrightarrow b = 53$

3. Calcul de l'énergie libérée $\boldsymbol{E_1}$ par la réaction en J et en MeV

$$E = \Delta mc^2 = (m_I + m_Y + 3m_n - m_U - m_n)c^2$$

$$\Delta m = (138{,}897 + 93{,}890 + 3.1{,}00867 - 234{,}99332 - 1{,}00867)$$

$$soit \; \Delta m = -0{,}18898u$$

$$E = -0{,}18898 \times 1{,}67 \times 1^{-27} \times (3.10^8)^2 = -2{,}84 \times 10^{-11}J$$

Conversion de l'énergie en MeV

$$E = \frac{-2{,}84 \times 10^{-11}}{1{,}6 \times 10^{-13}} = -177{,}5MeV$$

4. Calcul de l'énergie totale produite par les réacteurs

$$E_T = nE = 2.10^3(-2{,}84 \times 10^{-11}) = -5{,}68 \times 10^{-8}J$$

5. Puissance électrique produite

$$\eta = \frac{E_e}{E_T} \Longrightarrow E_e = \eta E_T \;\; or \; P_e = \frac{E_e}{\Delta t} = \frac{\eta E_T}{\Delta t}$$

$$A.N: P_e = \frac{-0{,}4 \times 5{,}68 \times 10^{-8}}{3{,}2 \times 10^7} = 7{,}1 \times 10^{-16}W$$

6. a)) Valeur de A et Z

$${}^{235}_{92}U \;\longrightarrow\; {}^{A}_{Z}Pu + 2\beta^- \;\Longrightarrow\; {}^{235}_{92}U \;\longrightarrow\; {}^{A}_{Z}Pu \; + 2{}^{\;0}_{-1}e$$

Conservation de nombre de masse : $235 = A$

Conservation de nombre de charge : $92 = Z - 2 \Longrightarrow Z = 90$

b)) Établissons la loi de décroissance radioactive

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \Longrightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \Longrightarrow \ln N = -\lambda t + K \;\;;$$

Or $t = 0, N = N_0 \Longrightarrow K = \ln N_0$

$$soit \;\ln N - \ln N_0 = -\lambda t \Longrightarrow \ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t \Longrightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}$$

c)) Nombre de noyaux restant

$$N = \frac{N_0}{2^n} \;\; où \; n = \frac{t}{T} = \frac{25}{5} = 5 \Longrightarrow N = \frac{N_0}{2^5} = N = \frac{N_0}{320}$$

d)) Calcul de m_0

$$A_0 = \lambda N_0 \;\; or \;\; n_0 = \frac{m_0}{M} = \frac{N_0}{N_A} \Longrightarrow N_0 = N_A\frac{m_0}{M} \quad et\, \lambda = \frac{ln2}{T}$$

$$A_0 = \frac{ln2}{T} \times N_A\frac{m_0}{M} \Longrightarrow m_0 = \frac{A_0 TM}{N_A ln2}$$

$$A.N:\ m_0 = \frac{2\times10^3\times5\times60\times235}{6{,}02\times10^{23}\times ln2} = 3{,}38\times10^{-16}g$$

$$m_0 = 3{,}38\times10^{-16}g = 3{,}38\times10^{-13}mg$$

<u>Solution 16</u>

1. <u>Valeur de l'activité</u> A_0

$$A_0 = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{4{,}5\times10^{15}}{24\times3600} = 5{,}21\times10^{10}Bq$$

$$A_0 = \frac{5{,}21\times10^{10}}{3{,}7\times10^{10}} = 1{,}41Ci$$

2. <u>Nombre des particules initiales</u> N_0

$$A_0 = \lambda N_0\ or\ \lambda = \frac{ln2}{T} \Longrightarrow A_0 = \frac{ln2}{T}N_0 \Longrightarrow N_0 = \frac{A_0T}{ln2}$$

$$A.N:\ N_0 = \frac{5{,}21\times10^{10}\times500\times24\times3600}{ln2} = 3{,}25\times10^{18}$$

$$D'où:\ N_0 = 3{,}25\times10^{18}Noyaux$$

3. <u>Valeur de la masse initiale de la particule</u> :

$$n = \frac{m_0}{M} = \frac{N_0}{N_A} \Longrightarrow \frac{m_0}{M} = \frac{N_0}{N_A} \Longrightarrow m_0 = M\frac{N_0}{N_A}$$

$$A.N:\ m_0 = 235\times\frac{3{,}25\times10^{18}}{6{,}02\times10^{23}} = 1{,}27\times10^{-3}g$$

$$D'où:\ m_0 = 1{,}27\times10^{-3}g = 1{,}27mg$$

4. <u>Valeur de la masse restante</u>

$$m = m_0e^{-\lambda t}\ \ or\ \lambda = \frac{ln2}{T}\ \ et\ \frac{t}{T} = \frac{1500}{500} = 3 \Rightarrow t = 3T$$

$$\Longrightarrow m = m_0e^{\frac{ln2}{T}\times3T} = m_0e^{-3ln2} = m_0e^{\frac{1}{ln2^3}} = m_0\times\frac{1}{2^3} = \frac{m_0}{2^3}$$

$$A.N:\ m = \frac{1{,}27\times10^{-3}}{2^3} = 1{,}59\times10^{-4}g$$

5. <u>Activité restante au bout de 2500jours</u>

$$\frac{t}{T} = \frac{2500}{500} = 5 \Longrightarrow t = 5T\ \Longrightarrow A = \frac{A_0}{2^5}$$

$$A.N:\ A = \frac{5{,}21\times10^{10}}{2^5} = 1{,}63\times10^9Bq$$

6. Temps au bout duquel $A = 30\%A_0$

$$A = A_0e^{-\lambda t} = \frac{30}{100}A_0 \Longrightarrow\ e^{-\lambda t} = \frac{3}{10} \Rightarrow e^{\lambda t} = \frac{10}{3}$$

$$\ln e^{\lambda t} = \ln\frac{10}{3} \Rightarrow \lambda t = \ln\frac{10}{3} \Longrightarrow t = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{10}{3} = \frac{T}{\ln 2}\ln\frac{10}{3}$$

$$A.N:\ t = \frac{500}{\ln 2}\ln\frac{10}{3} = 8{,}68\times10^2jours$$

7. Temps au bout duquel $m - m_0 = 70\%m_0$

Soit m' la masse désintégrée : m'$= m_0 - m$

$$m_0 - m = \frac{70}{100}m_0\ \ or\ \ m = m_0e^{-\lambda t}\ \Longrightarrow m_0 - m_0e^{-\lambda t} = \frac{70}{100}m_0$$

$$\Longrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = \frac{7}{10} \Longrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{3}{10} \Longrightarrow e^{\lambda t} = \frac{10}{3} \Longrightarrow$$

$$\ln e^{\lambda t} = \ln\frac{10}{3} \Rightarrow \lambda t = \ln\frac{10}{3} \Longrightarrow t = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{10}{3} = \frac{T}{\ln 2}\ln\frac{10}{3}$$

$$A.N:\ t = \frac{500}{\ln 2}\ln\frac{10}{3} = 8{,}68\times10^2jours$$

LES PARTICULES A GRANDE ENERGIE

<u>Solution 17</u>

1. Montrons la particule est relativiste

$$\alpha = \frac{E_C}{E_0} = \frac{1285}{938} = 1{,}37\ \ or\ \alpha = \frac{E_C}{E_0} = \frac{(\gamma-1)mc^2}{mc^2} = \gamma - 1$$

$$\Longrightarrow \gamma - 1 = 1{,}37 \Longrightarrow \gamma = 2{,}37$$

Comme $\gamma \in [1{,}1\ ;\ 10]$, alors la particule est relativiste.

2. Expression de P

$$P = \gamma mv\ \ \ et\ E_C = (\gamma-1)mc^2 \Longrightarrow \frac{P}{E_C} = \frac{\gamma mv}{(\gamma-1)mc^2} = \frac{\gamma v}{(\gamma-1)c^2}$$

$$or\ \ \alpha = \gamma - 1\ soit\ \gamma = \alpha + 1$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Longrightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Longrightarrow \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2-v^2} \Longrightarrow c^2 - v^2 = \frac{c^2}{\gamma^2}$$

$$Donc\ :\ v = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$$

$$Soit\ \ \frac{P}{E_C} = \frac{\gamma v}{(\gamma-1)c^2} = \frac{\gamma}{\alpha c^2}\times\ c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{1}{\alpha c}\sqrt{\gamma^2\left(\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\right)}$$

$$\Longrightarrow \frac{P}{E_C} = \frac{1}{\alpha c}\sqrt{\gamma^2-1} = \frac{1}{\alpha c}\sqrt{(\alpha+1)^2-1} = \frac{1}{\alpha c}\sqrt{\alpha^2+2\alpha}$$

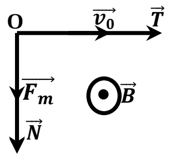
$$\Longrightarrow P = \frac{E_C}{\alpha c}\sqrt{\alpha^2+2\alpha}$$

$$A.N:\ Pc = \frac{1285}{1{,}37}\sqrt{1{,}37^2+2.1{,}37} = 2\times10^3MeV$$

$$D'où:\ P = 2\times10^3MeV.c^{-1}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{2{,}37^2}} = 0{,}9 \Longrightarrow v = 0{,}9c$$

3. a)) <u>Montrons que le mouvement est C.U</u>



Supposons que le proton pénètre dans le champ magnétique $\vec{B}$ uniforme (perpendiculaire au plan et sortant), est soumise à la force magnétique $\vec{F_m} = |q|\vec{v}\Lambda\vec{B}$, elle est verticale et dirigée vers le bas.

$$R.F.D:\ \vec{F_m} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(\gamma m\vec{v})}{dt} = \gamma m\frac{d\vec{v}}{dt} = \gamma m\vec{a}\ \Rightarrow\ \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{\gamma m}$$

Dans la base de Frenet $(\vec{T},\vec{N})$

$$\vec{F_m} = |q|vB\vec{N}\ \ \ et\ \ \vec{a} = \frac{\vec{F_m}}{\gamma m} = \frac{|q|vB}{\gamma m}\vec{N}$$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|vB}{\gamma m}\vec{N}\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

$\Rightarrow v = cte\ donc$ le mouvement est uniforme

Par identification :

$$\frac{v^2}{R} = \frac{|q|vB}{\gamma m} \Rightarrow R = \frac{\gamma mv}{|q|B} = cte \Rightarrow$$

le mouvement est circulaire.

D'où le mouvement des protons est circulaire uniforme

b)) Montrons que $R = \frac{Pc}{300B}$

$$R = \frac{\gamma mv}{|q|B} = \frac{P}{|q|B} \quad or \ \ |q|B = cste \ \Rightarrow |q|B = \frac{P}{R} = cste$$

$$\Rightarrow P = |q|BR \Rightarrow Pc = |q|cBR$$

$Pour \ \ |q| = e \ ; B \ en \ Tesla \ (T) \ ; R \ en \ mètre \ (m) \ et \ P \ en \ MeV$

$$\Rightarrow \ Pc = 300BR \Rightarrow R = \frac{Pc}{300B}$$

$$A.N: \ \ R = \frac{2 \times 10^3}{300 \times 0{,}75} = 8{,}89m = 889cm$$

<u>*Solution 18*</u>

1. a)) Montrons que la particule incident est relativiste

$$On \ a: \ \frac{Pc}{E_0} = \frac{2017}{938} = 2{,}15$$

$$Or \ \ \frac{Pc}{E_0} = \frac{\gamma mvc}{mc^2} = \frac{\gamma v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2-v^2} \Rightarrow c^2 - v^2 = \frac{c^2}{\gamma^2}$$

$$\Rightarrow \ \ v = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \Rightarrow \quad \frac{Pc}{E_0} = \frac{\gamma v}{c} = \frac{\gamma}{c}.c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \gamma\sqrt{\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}}$$

$$\Rightarrow \ \ \frac{Pc}{E_0} = \sqrt{\gamma^2-1} \Rightarrow \gamma^2 - 1 = \left(\frac{Pc}{E_0}\right)^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{1+\left(\frac{Pc}{E_0}\right)^2}$$

$A.N\!: \ \gamma = \sqrt{1+2{,}15^2} = 2{,}37$

Comme $1{,}1 < \gamma < 10$, alors la particule (proton) est relativiste.

b)) Calcul de $P_2 \ \ et \ P_3$

$$\frac{P_1}{R_1} = \frac{P_2}{R_2} = \frac{P_3}{R_3} \Rightarrow P_2 = R_2\frac{P_1}{R_1} \ \ et \ \ P_3 = R_3\frac{P_1}{R_1}$$

$A.N: \ P_2 = 180 \times \frac{2017}{384} = 9{,}45 \times 10^2 MeV.c^{-1}$

$$P_3 = 90 \times \frac{2017}{384} = 4{,}73 \times 10^2 MeV.c^{-1}$$

c)) Caractéristique du vecteur champ magnétique $\vec{B}$

- direction : perpendiculaire au plan $(\vec{F}_m, e\vec{v})$
- sens : utilisation de règle de trois doigts : le vecteur champ $\vec{B}$ est sortant.
- intensité : à déterminer

$$Pc = 300RB \ \ soit \ B = \frac{P_1c}{300R_1} = \frac{2017}{300 \times 3{,}84} = 1{,}75T$$

2. Représentation graphique des vecteurs $\vec{P}$

Échelle : $1cm \ \longrightarrow \ 10^3 MeV.c^{-1}$

$$soit \ : \ \vec{P}_1 = 2cm \, , \vec{P}_2 = \tfrac{9{,}45 \times 10^2}{10^3} = 0{,}95cm \ \ et \ \vec{P}_3 = 0{,}47cm$$

Construire ces vecteurs et remarquer que $\vec{P}_1 \neq \vec{P}_2 + \vec{P}_3$

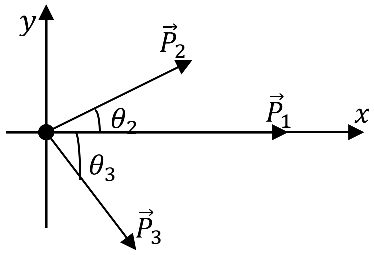
Donc, comme l'équation l'indique il existe une particule 4 qui n'a pas laissé des traces dans la chambre à bulle.

3. Déduisons la valeur de P_4

La conservation du vecteur quantité de mouvement donne :

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4$$

Donc : $\vec{P}_4 = \vec{P}_1 - (\vec{P}_2 + \vec{P}_3)$



$$\vec{P}_4 = \left| \begin{array}{l} P_{4x} = P_1 - (P_2\cos\theta_2 + P_3\cos\theta_3) \\ P_{4y} = P_2\sin\theta_2 - P_3\sin\theta_3 \end{array} \right.$$

$$\vec{P}_4 = \left| \begin{array}{l} P_{4x} = 2017 - (9{,}45 \times 10^2\cos 38° + 4{,}73 \times 10^2\cos 70°) \\ P_{4y} = 9{,}45 \times 10^2 \sin3\,8° - 4{,}73 \times 10^2 \sin 70° \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{P}_4 = \left| \begin{array}{l} P_{4x} = 815MeV.c^{-1} \\ P_{4y} = -860MeV.c^{-1} \end{array} \right.$$

$$P_4 = |\vec{P}_4| = \sqrt{{P_{4x}}^2 + {P_{4y}}^2} = \sqrt{815^2 + 860^2}$$

$D'où: \ \ P_4 = 1{,}18 \times 10^3 MeV.c^{-1}$

4. Étude énergétique

On a : $E^2 = (Pc)^2 + {E_0}^2 \ \ soit \ \ E = \sqrt{(Pc)^2 + {E_0}^2}$

$$\Delta E = E_2 + E_3 + E_4 - (E_1 + E_a)$$

Pour l'hypothèse 1 : (1) $p + p \ \rightarrow \ p + \pi^+ \ + \ n$

$$E_1 = \sqrt{(P_1c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{2017^2 + 938^2} = 2{,}22 \times 10^3 MeV$$

$$E_a = E_0 = 938MeV$$

$$E_2 = \sqrt{(P_2c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{945^2 + 938^2} = 1{,}33 \times 10^3 MeV$$

$$E_3 = \sqrt{(P_2c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{473^2 + 139^2} = 493MeV$$

$$E_4 = \sqrt{(P_4c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{1180^2 + 939^2} = 1{,}51 \times 10^3 MeV$$

$$\Delta E = 1{,}33 \times 10^3 + 493 + 1{,}51 \times 10^3 - (2{,}22 \times 10^3 + 938)$$

$$\Delta E = 175MeV$$

Pour l'hypothèse 2 : (2) $p \ + p \rightarrow \ p + \ p \ + \pi^0$

$E_1 = 2{,}22 \times 10^3 MeV, E_a = E_0 = 938MeV$

$$E_2 = 1{,}33 \times 10^3 MeV$$

$$E_3 = \sqrt{(P_2c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{473^2 + 938^2} = 1{,}05 \times 10^3 MeV$$

$$E_4 = \sqrt{(P_4c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{1180^2 + 135^2} = 1{,}19 \times 10^3 MeV$$

$$\Delta E = 1{,}33 \times 10^3 + 1050 + 1190 - (2{,}22 \times 10^3 + 938)$$

$$\Delta E = 412MeV$$

Pour l'hypothèse 3 : (3) $p + \ p \rightarrow \pi^+ \ + p \ + n$

$E_1 = 2{,}22 \times 10^3 MeV, E_a = E_0 = 938MeV$

$$E_2 = \sqrt{(P_2c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{945^2 + 139^2} = 955MeV$$

$E_3 = 1{,}05 \times 10^3 MeV$ et $E_4 = 1{,}51 \times 10^3 MeV$

$$\Delta E = 955 + 1050 + 1510 - (2{,}22 \times 10^3 + 938)$$

$\Delta E = 357MeV$

D'où : la bonne hypothèse est l'hypothèse (1)

$$(1)\ p + p \rightarrow p + \pi^+ + n$$

Solution 19

1. a)) Sens du champ $\vec{B}$

Utilisation de règle de trois doigts :

le vecteur champ $\vec{B}$ est sortant

b)) L'orientation des courbures après le choc montre que les particules ne peuvent qu'être chargées positivement :

D'où : $q > 0$

c)) Calcul de P_3 et P_4

$$\frac{P_1}{R_1} = \frac{P_3}{R_3} = \frac{P_4}{R_4} \Longrightarrow P_3 = R_3\frac{P_1}{R_1}\ \ et\ \ P_4 = R_4\frac{P_1}{R_1}$$

$A.N:\ P_3 = 113 \times \frac{2033}{430} = 534MeV.c^{-1}$

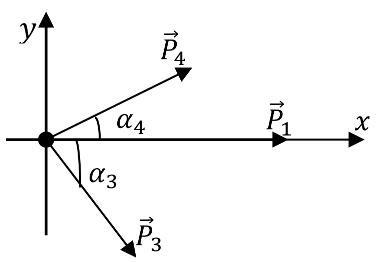
$$P_4 = 185 \times \frac{2033}{430} = 875MeV.c^{-1}$$

d)) Valeur de P_5

La conservation du vecteur quantité de mouvement donne :

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_3 + \vec{P}_4 + \vec{P}_5$$

Donc : $\vec{P}_5 = \vec{P}_1 - (\vec{P}_3 + \vec{P}_4)$



$$\vec{P}_5 = \left| \begin{array}{l} P_{5x} = P_1 - (P_4 \cos\alpha_4 + P_3 \cos\alpha_3) \\ P_{5y} = P_4 \sin\alpha_4 - P_3 \sin\alpha_3 \end{array} \right.$$

$$\vec{P}_5 = \left| \begin{array}{l} P_{5x} = 2033 - (875 \cos 27° + 534 \cos 55°) \\ P_{5y} = 875 \sin 27° - 534 \sin 55° \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \vec{P}_4 = \left| \begin{array}{l} P_{5x} = 947MeV.c^{-1} \\ P_{5y} = -40MeV.c^{-1} \end{array} \right.$$

$$P_5 = |\vec{P}_5| = \sqrt{{P_{5x}}^2 + {P_{5y}}^2} = \sqrt{947^2 + 40^2}$$

$$D'où :\ P_5 = 948MeV.c^{-1}$$

2. Étude énergétique

On a : $E^2 = (Pc)^2 + {E_0}^2\ \ soit\ \ E = \sqrt{(Pc)^2 + {E_0}^2}$

$$\Delta E = E_3 + E_4 + E_5 - (E_1 + E_2)$$

Pour l'hypothèse 1 : $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$

$$E_1 = \sqrt{(P_1c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{2033^2 + 938^2} = 2240MeV$$

$$E_2 = E_0 = 938MeV$$

$$E_3 = \sqrt{(P_3c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{534^2 + 938^2} = 1079MeV$$

$$E_4 = \sqrt{(P_4c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{875^2 + 938^2} = 1283MeV$$

$$E_5 = \sqrt{(P_5c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{948^2 + 135^2} = 958MeV$$

$\Delta E = 1079 + 1283 + 958 - (2240 + 938)$

$\Delta E = 142MeV$

Pour l'hypothèse 2 : $p + p \rightarrow \pi^+ + p + n$

$E_1 = 2240MeV$, $E_2 = E_0 = 938MeV$

$$E_3 = \sqrt{(P_3c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{534^2 + 139^2} = 552MeV$$

$$E_4 = \sqrt{(P_4c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{875^2 + 938^2} = 1283MeV$$

$$E_5 = \sqrt{(P_5c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{948^2 + 939^2} = 1334MeV$$

$\Delta E = 552 + 1283 + 1334 - (2240 + 938)$

$\Delta E = -9MeV$

Pour l'hypothèse 3 : $p + p \rightarrow p + \pi^+ + n$

$E_1 = 2240MeV$, $E_2 = E_0 = 938MeV$

$$E_3 = \sqrt{(P_3c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{534^2 + 938^2} = 1079MeV$$

$$E_4 = \sqrt{(P_4c)^2 + {E_0}^2} = \sqrt{875^2 + 139^2} = 886MeV$$

$E_5 = 1334MeV$

$\Delta E = 1079 + 886 + 1334 - (2240 + 938)$

$\Delta E = 121MeV$

D'après les calculs, l'hypothèse 2 est la plus bonne .

FIN !!!