REPUBLIQUE DU SENEGAL
UN PEUPLE-UN BUT-UNE FOI
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
**INSPECTION D'ACADEMIE DE PIKINE-GUEDIAWAYE**
EMAIL: iapikgue2014@gmail.com / Tél: 33 834 71 44
www.academiedepikineguediawaye.net

**LYCEE MBAO** **2016 - 20017**

**DEVOIR N°2** **$TS_2D$**

**Second semestre**

**04h**

**EXERCICE 1 04 points**

Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$ ou z est une variable complexe.

1. a. Calculer P(2).
   b. Résoudre alors P(z) = 0.
2. On considère les complexes $z_1 = 2$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.
   a. Calculer le module et un argument de chacun de ces trois complexes.
   b. Ecrire le quotient $\dfrac{z_3}{z_2}$ sous la forme trigonométrique ; puis la forme algébrique.
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal ( O ; $\vec{u};\vec{v}$ ), on considère les points $M_1$, $M_2$ et $M_3$ d'affixes respectives $z_1$, $z_2$ et $z_3$.
   a. Déterminer l'affixe du point G barycentre des point $M_1$, $M_2$ et $M_3$ affecté des coefficients respectifs 1, -1 et -2
   b. Montrer qu'il existe une rotation r de centre O qui transforme $M_2$ en $M_3$. Donner une mesure, en radian, de l'angle de cette rotation.
   c. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle.
   d. Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre O qui transforme G en $M_3$

**EXERCICE 2 04 points**

Un élève se rend à l'école en bus. S'il est à l'heure il, prend le bus de ramassage



gratuit mis à la disposition de l'école, s'il est en retard il prend le bus de la ville, il lui coûte 150f.

Si l'élève est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$ Si l'élève est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle $R_n$ l'événement « l'élève est en retard le jour n ».On note $p_n$ la probabilité de $R_n$ et $q_n$ celle de $\overline{R_n}$ . On suppose que $p_1 = 0$.

**1.** **a.** Déterminer les probabilités conditionnelles : $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

**b.** Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de $p_n$ et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ en fonction de $q_n$.

**c.** Exprimer $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$ et de $q_n$.

**d.** En déduire que $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20} p_n$ .

**2.** Pour tout entier non nul n, on pose $v_n = p_n - \dfrac{4}{23}$.

**a.** Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{20}$.

**b.** Exprimer $v_n$ puis $p_n$ en fonction de n.

**c.** justifier que la suite $p_n$ est convergente et calculer sa limite.

**PROBLEME 12 points**

**Partie A**

1. Déterminer les solutions h sur IR de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.
2. On considère l'équation différentielle (F) : $y'' + 4y' + 4y = -4x$.
   a. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $\varphi : x \mapsto ax + b$ soit solution de (F).
   b. Montrer qu'une fonction f est solution de (F) si, et seulement si, $f - \varphi$ est solution de (E).
   c. En déduire toutes les solutions de (F)
   d. Donner la solution f de (F) qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$.

**Partie B**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.
On appelle C la courbe représentative de f.
On se propose d'étudier cette fonction ainsi l'équation $f(x) = 0$.

1. a. Calculer la fonction f' dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f' sur $[0, +\infty[$. Indiquer la limite de f' en $+\infty$.
   En déduire le signe de f' sur $[0, +\infty[$.
   b. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$. Indiquer la limite de f en $+\infty$
   c. Montrer que C admet une asymptote d que l'on déterminera.
   Construire d et C sur un même graphique.
2. a. justifier que f est bijective de $[0, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser, en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0, +\infty[$ une solution et une seule. On note $\alpha$ cette solution.
   b. Justifier l'encadrement $1 \leq \alpha \leq 2$.
   c. Calculer l' aire du domaine D délimité par la courbe C , les droites d'équations $x = 0$ ; $x = \alpha$ et l'axe (x' x)
   d. en déduire $\int_2^0 f^{-1}(x)dx$

**Partie C**

*On se propose d'étudier une méthode d'approximation de $\alpha$*

On observe pour cela que $\alpha$ est l'unique solution de l'équation de l'équation $g(x) = x$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1. Etudier les variation de g sur J. on ne demande pas de construire sa courbe représentative.
   En déduire que pour tout élément x de J, g(x) appartient encore à J.
2. Montrer que pour tout x de J, on a :

$$|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}.$$

En déduire que pour tout x de J, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$

3. Soit $(u_n)$ la suite d'éléments de J définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$
   Pour tout entier n, positif non nul.
   a. montrer que pour tout entier n positif ou nul, on a :
   $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$.
   b. En déduire que pour tout entier n, positif ou nul, on a :
   $|u_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{3}{e^2})^n$ .
   c. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.
   d. Déterminer une indice p pour lequel on est sûr d'avoir $|u_p - \alpha| \leq 10^{-3}$ .
   Calculer $u_p$ à l'aide de votre calculatrice ( on donnera la partie entière et les trois premières décimaux