



Terminale Esse

Devoir du Mercredi 17 Mars de l'an 2004

**calculatrices autorisées**

**Exercice un :**

A] On considère  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$  définie sur  $[0; +\infty[$

1°) Démontrer que si  $0 \leq x \leq 1$  alors  $0 \leq f(x) \leq 1$

2°) Démontrer que  $f(x) - x = \frac{-2x^2 + x + 1}{2\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + x\right)}$  (on peut l'admettre si on n'arrive pas à le démontrer) et étudier le signe de  $f(x) - x$  pour  $x$

$\in [0; 1]$

B] On considère la suite  $(U_n)$  définie par  $U_0 = 0$  et  $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$

1°) Démontrer par récurrence que si  $n \geq 0$  on a  $0 \leq U_n \leq 1$

2°) Etudier le sens de variation de  $(U_n)$

3°) On rappelle la formule très connue  $\cos(2a) = 2(\cos a)^2 - 1$

a) Démontrer que l'on a  $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$  pour  $x \in [0; \pi]$

b) Démontrer par récurrence que si  $n \geq 0$  on a  $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

c) Conclure pour la limite de  $(U_n)$

doro-cisse.e-monsite.com

**Exercice deux :**

A et B sont des points du plan complexe d'affixes respectives  $z_A = i$  et  $z_B = -1 - 2i$

1°) a) Décrire l'ensemble  $\Gamma$  des points du plan M d'affixe  $z$  tels que  $|z - i| = \sqrt{10}$

b) Démontrer que B appartient à  $\Gamma$

c) Ecrire une équation de  $\Gamma$  et déterminer les points d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe des abscisses.

2°) a) Calculer le module et un argument de  $z_A + z_B$

b) Calculer  $z_A \times z_B$  et en déduire que le point C d'affixe  $2 - i$  est l'image de B par une rotation de centre O dont on précisera l'angle.

**Exercice trois :**

On considère  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x)$

1°) Démontrer que  $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x})$  et en déduire que la droite **D** d'équation  $y = 2x$  est asymptote à la courbe **C** de  $f$  et étudier la position relative de **D** et **C**

2°) Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe avec soin pour en déduire le sens de variation de  $f$ .

**Exercice quatre :**

On dispose d'un bac rempli de 25 boulons et on considère que parmi les 25 boulons, il y en a 5 défectueux

1°) On prend trois boulons simultanément au hasard dans le bac, quelle est la probabilité d'obtenir 2 boulons défectueux lors de ce tirage.

2°) On tire successivement et avec remise six boulons du sac et  $X$  est la variable aléatoire qui compte le nombre de boulons défectueux.

a) Quelle est la loi suivie par  $X$

b) Calculer  $P(X = 2)$

c) Combien vaut  $E(X)$  ? et  $\sigma(X)$  ?