



## Devoir deux heures N° 8

le 9 mars 2004

Termesse

### Exercice un :

On se place dans le plan complexe et  $f$  à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = z^2 + 1$

1°) Déterminer les antécédents de 0

2°)  $f$  admet-elle des points invariants ? préciser leurs affixes.

3°) Soit  $A$  d'affixe  $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$  déterminer l'affixe de  $A'$  image de  $A$  par  $f$  puis démontrer que  $O$ ,  $A$  et  $A'$  sont alignés.

4°) Soit  $\theta$  un nombre réel de  $]0, 2\pi[$  et  $N$  le point d'affixe  $z_N = e^{i\theta}$

a) Justifier que  $N$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon 1

b)  $N'$  est l'image de  $N$  par  $f$ , démontrer que  $N'$  est sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c) Vérifier que  $\overrightarrow{ON'} = 2 \cos \theta \overrightarrow{ON}$ , quelle conclusion peut-on tirer pour  $O$ ,  $N$  et  $N'$ ? (On rappelle  $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ )

### Exercice deux :

On considère  $f$  et  $g$  définies sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x + x \times e}{x^2}$  et  $g(x) = -2 \ln x - x \times e + 1$

1°) Etudier les variations de  $g$

2°) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[1/2; 1]$

3°) Etudier les limites aux bornes pour  $f$

4°) Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{1 + \alpha \times e}{2 \alpha^2}$

5°) Soit  $H$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $H(x) = \frac{\ln x}{x}$ , calculer  $H'(x)$  puis vérifier que

$f(x) = -H'(x) + \frac{e}{x} + \frac{1}{x^2}$  et donner alors une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$

### Exercice trois :

$(U_n)$  est une suite arithmétique de premier terme  $U_0 = 2$  et de raison  $-1$

1°) On pose  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$  Démontrer que  $S_n = \frac{(n+1)(4-n)}{2}$

2°) On pose  $V_n = e^{U_n}$

doro-cisse.e-monsite.com

a) Démontrer que  $(V_n)$  est géométrique.

b) On pose  $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$ ,

déterminer l'expression de  $P_n$  en fonction de  $n$  et déterminer  $n$  pour que  $P_n = e^{-88}$

### Exercice quatre :

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention parmi ses dossiers d'accidents de la circulation.

85 % des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle et 20% des frais de dommages corporels.

De plus 12% des dossiers entraînant des frais de réparation matérielle entraînent aussi des frais de dommages corporels.

Soit les événements suivants :  $R$  : "le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle " et  $D$  : "le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels "

1°) En utilisant les notations  $R$  et  $D$ , exprimer les trois pourcentages de l'énoncé en termes de probabilité; les résultats seront donnés sous forme décimale.

2°) Calculer la probabilité qu'un dossier :

a) Entraîne des frais de réparation matérielle et des frais de dommages corporels

b) Entraîne seulement des frais de dommages corporels

c) Entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels.

3°) On constate que 40% des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse et, parmi ces derniers 60% entraînent des frais de dommages corporels.

a) On choisit un dossier, quelle est la probabilité que ce dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels ?

b) On choisit 5 dossiers au hasard de façon indépendante. Quelle est la probabilité qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels

