REPUBLIQUE DU SENEGAL
UN PEUPLE-UN BUT-UNE FOI
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
INSPECTION D'ACADEMIE DE PIKINE-GUEDIAWAYE
EMAIL: iapikgue2014@gmail.com / Tél: 33 834 71 44
www.academiedepikineguediawaye.net

Terminale Esse Devoir le mercredi 26 mai 2004

Exercice un :

Une entreprise dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc, …

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre

$\lambda = \dfrac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.

On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par $p(D \leq \text{A}) = \displaystyle\int_0^A \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}}\, dx$.

Dans tout l'exercice les résultats numériques seront arrondi au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
   a) comprise entre 50 et 100 km ;
   b) supérieure à 300 km.
2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des prochains 25 kilomètres ?
3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.
   a) Au moyen d'une intégration par partie, calculer $\text{I}(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{1}{82}\, x\, e^{-\frac{x}{82}}\, dx$; où A est un nombre réel positif.
   b) Calculer la limite de $\text{I}(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. (Cette limite représente la distance moyenne cherchée).
4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient l'incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$.

   d est un nombre réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

   a) Montrer que X_d suit une loi Binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$.

   b) Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

Exercice deux :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

doro-cisse.e-monsite.com

On considère les points A, B, C et S de coordonnées respectives :

$$A(-1, 0, 1)\ ;\ B(1, 4, -1)\ ;\ C(3, -4, -3)\ ;\ S(4, 0, 4).$$

1. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en A.
2. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{SO}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
3. a. Démontrer que O est le barycentre des points A, B, C affectés de coefficients que l'on déterminera.

b. En déduire que O est situé dans le triangle ABC.

4. Calculer le volume V du tétraèdre $SABC$. (un tiers de la base par la hauteur…….)

Exercice trois :

On appelle série harmonique la suite (H_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par $H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$

1°) Calculer H_1, H_2 H_3 H_4 et H_5 puis placer les points de coordonnées (n , H_n) pour n = 1, 2, 3, 4, 5 sur le graphique fourni où est tracée la courbe de Ln, que constate-t- on ?

On considère la suite (U_n) définie pour n > 0 par $U_n = H_n - \ln n$

2°) Démontrer les inégalités suivantes :

Si $x \in]-1 ; +\infty[$ alors $\ln(1 + x) \leq x$ et si $x \in]-\infty ; 1[$ alors $\ln(1 - x) \leq -x$

3°) a) Démontrer que l'on a $\ln(n + 1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$ on a $\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{k}$

c) En déduire que la suite (U_n) est positive

4°) a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a $U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ **doro-cisse.e-monsite.com**

b) En déduire le sens de variation de (U_n)

5°) Démontrer que la suite (U_n) est convergente

Info *: la limite de cette suite est nommée constante d'Euler (1781), elle vaut environ :*

$\gamma \approx$ **0,5772156649 0153286060 6512090082 4024310421 5933593992 3598805767 2348848677 2677766467** *Personne ne sait encore si elle est rationnelle ou irrationnelle, on sait simplement que si elle est rationnelle (de la forme $\frac{a}{b}$)alors b est plus grand que* $10^{244\,663}$