INSPECTION D'ACADEMIE DE
PIKINE-GUEDIAWAYE
TEL: 33 834 71 44

- Section : i-Prépa annuel -

3. Mécanique
2ème Loi - Mouvement parabolique
- Cours + énoncé exos -

3. Mécanique
2ème Loi - Mouvement parabolique
- Cours + énoncé exos -

Chapitre 6 : 2ème et 3ème Lois de Newton
- Mouvements plans dans le champ de pesanteur terrestre -

I. Accélération

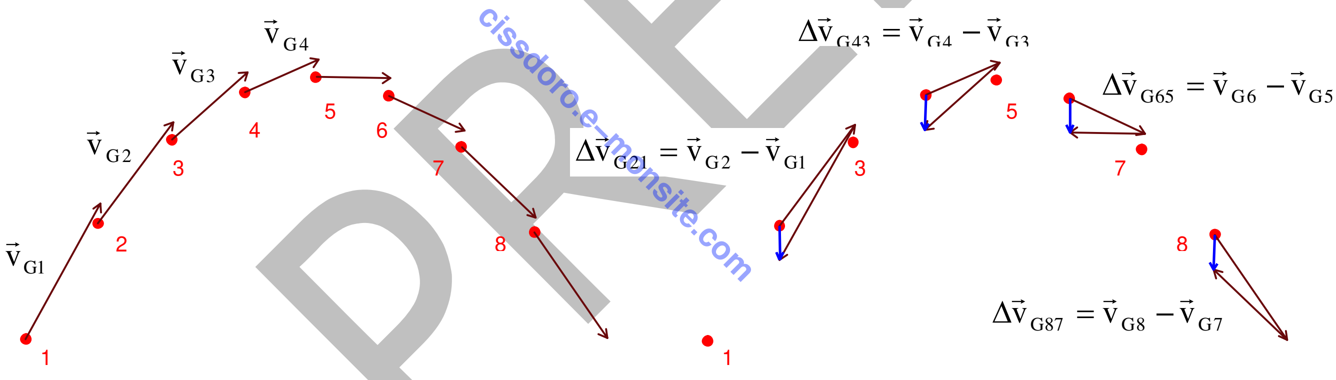
- accélération moyenne : la variation de vitesse par unité de temps définit l'accélération

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \text{a est en m.s}^{-2}$$

- accélération instantanée : c'est la variation de vitesse pour un temps extrêmement court ;

$$\vec{a} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Remarque : expérimentalement, on peut mesurer l'accélération grâce à une chronophotographie :



II. 2ème et 3ème Lois de Newton

a) Enoncé de la 2ème Loi :

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées au solide est égale au produit de la masse m du solide par le vecteur accélération $\vec{a}$ du centre d'inertie :

$$\boxed{2\text{ème } \textit{Loi} : \sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}}$$

Remarques :

- ✓ validité de la $2^{ème}$ Loi : si v < 0,14 c (c : célérité de la lumière dans le vide) ; sinon il faudrait raisonner dans le cadre de la relativité restreinte (Hors-Programme)
- ✓ si $\vec{a} = \vec{0}$, alors $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$, donc $\vec{v} = \overrightarrow{cte}$ et le mouvement est rectiligne uniforme ; or, si $\vec{a} = \vec{0}$, $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$: on retrouve la $1^{ère}$ Loi
- ✓ la $2^{ème}$ Loi de Newton est aussi appelée : Relation Fondamentale de la dynamique (RFD), ou : Théorème du Centre d'Inertie (TCI)

b) $3^{ème}$ Loi de Newton, ou : loi des actions réciproques, ou : Principe de l'action et de la réaction

« Les forces sont toujours une affaire de paire ». Autrement dit, si un système a exerce sur un corps B une action mécanique $\vec{F}_{B/A}$, alors le système b exerce sur le corps A l'action mécanique opposée : $\vec{F}_{A/B}$

$$\boldsymbol{\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}}$$

Ces forces ont la même droite d'action, des sens opposés, et la même norme.

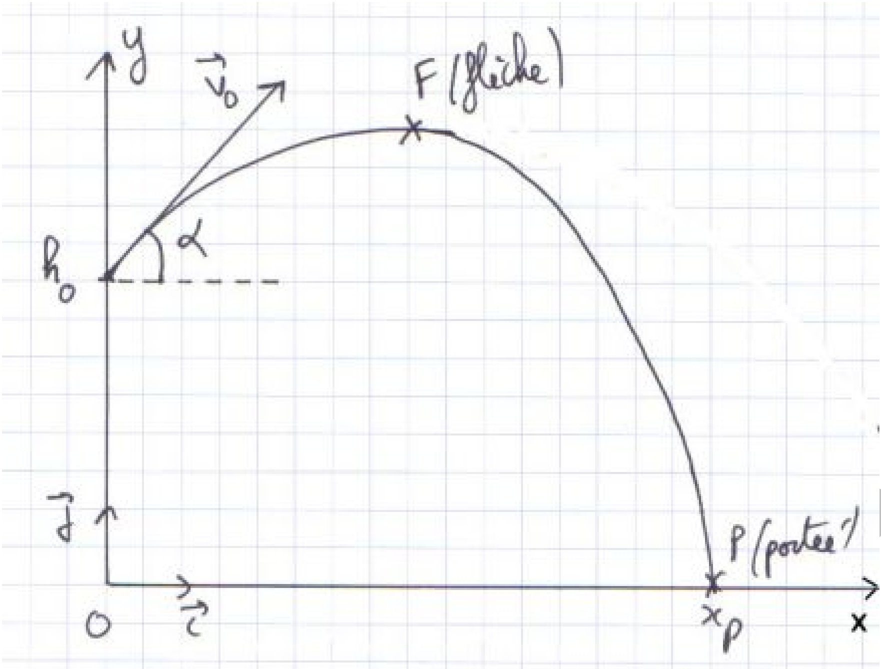
Exemples : avions à réaction, les moteurs éjectent des gaz qui produisent une poussée, une propulsion sur l'avion lui-même ; starting-bloc, l'athlète pousse sur le starting-bloc, qui, bien accroché, résiste et « renvoie » la force vers l'avant, ce qui propulse l'athlète ; recul d'un arme à feu lors d'un tir, …

III. <u>Mouvements Plans ; exemple-type : projectile dans le champ de pesanteur</u>

a) Equations du mouvement :

Exemple-type : projectile M lancé d'une hauteur $h_0$avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle $\propto$ avec l'horizontale.

1. Système : {le projectile}
2. Référentiel : terrestre supposé galiléen
3. Bilan des forces : le poids $\vec{P}$



4. **Système** : {le projectile}
5. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
6. **Bilan des forces** : le poids $\vec{P}$
7. Dans le référentiel galiléen, la 2nde Loi de Newton appliquée au projectile donne :

$$\vec{P} = m.\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

Soit : $\vec{a} = \vec{g}$

8. Projection selon les axes du repère [O,x,y) :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

Comme $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, on a, après intégration :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\, sin\alpha \end{cases}$$

Comme $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, on a, après intégration :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\begin{cases} \boldsymbol{x = (v_0 \cos\alpha)\, t} \\ \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\, sin\alpha)\, t + h_0} \end{cases}$$

Equations paramétriques (ou horaires) du mouvement de M

⇒ Selon l'axe [Ox] , le mouvement est rectiligne uniforme $(v_x = v_0 \cos\alpha = cte)$

⇒ Selon l'axe [Oy], le mouvement est rectiligne uniformément décéléré ($a_y = -g = cte$)

➢ Grâce à $x = (v_0\, cos\, \alpha)\, t$ on peut isoler le temps t, c'est-à-dire : $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, expression que l'on injecte dans y ; soit :

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + (v_0\, sin\alpha)\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) + h_0$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{g}{2\, v_0^2\, cos^2\alpha}\, .x^2 + x.tan\alpha + h_0}$$

équation cartésienne de la trajectoire

Cette trajectoire est de la forme : $y = ax^2 + bx + c$ trinôme du second degré dont la courbe est **un arc de parabole ; la trajectoire suivie par le projectile lancé d'une hauteur h est une parabole tronquée**

b) Portée / Flèche :

Portée x_P : abscisse du lieu où retombe le projectile

Si le lancer se fait sur un plan horizontal, on a au point de portée : ⇒ ***y = 0***

On est alors amené à résoudre un polynôme du second degré :

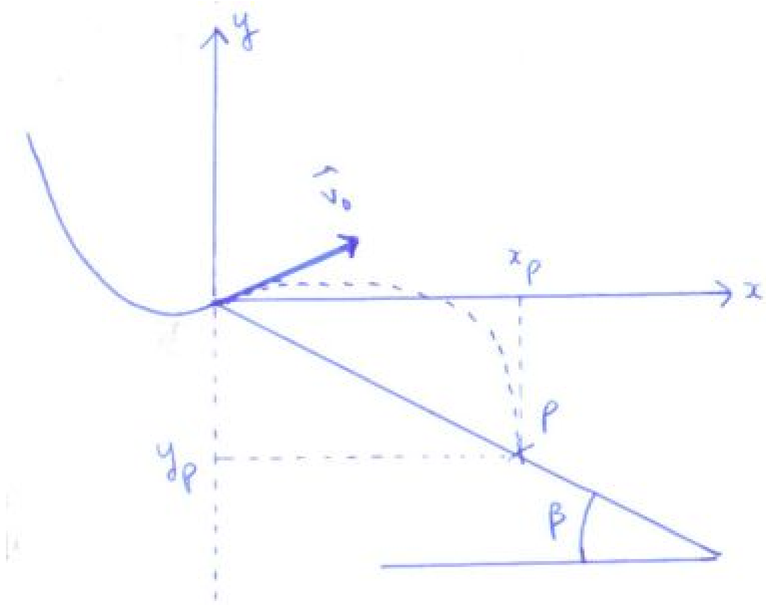
$$0 = -\frac{g}{2\, v_0^2\, cos^2\alpha}\, .x^2 + x.tan\alpha + h_0 \qquad \ldots$$

Remarque :

- si $h_0 = 0$ *(tir à partir de l'origine), on obtient:*

$$x_P = \frac{v_0^2 . \sin 2\alpha}{g}$$

- Attention, si le plan n'est pas horizontal mais par exemple incliné d'un angle β :



Equation du plan incliné : $y = x\,tan\beta$

la portée sera donc obtenue grâce à : $\begin{cases} y = -\dfrac{g}{2\,v_0^2\,cos^2\alpha}\,.x^2 + x.tan\alpha \;\; (ici\; h_0 = 0) \\ y = x\,tan\beta \end{cases}$

on est donc amené à résoudre un trinôme du second degré de la forme :

$$-\frac{g}{2\,v_0^2\,cos^2\alpha}\,.x^2 + x.tan\alpha = x.tan\,\beta \qquad \ldots$$

Flèche y_F : ordonnée du point de plus haute altitude $\Rightarrow v_y = 0$

grâce à : $v_y = -gt + v_0\,sin\alpha$*, on extrait:* $t = \dfrac{v_0.\sin\alpha}{g}$

que l'on injecte dans les équations horaires de la trajectoire :

$$\overrightarrow{OF} \begin{cases} x_F = (v_0\cos\alpha)\,.\dfrac{v_0.\sin\alpha}{g} \\ y_F = -\dfrac{1}{2}g.\left(\dfrac{v_0.\sin\alpha}{g}\right)^2 + (v_0\,sin\alpha).\dfrac{v_0.\sin\alpha}{g} + h_0 \end{cases}$$

$$\textbf{on obtient}:\; \overrightarrow{OF} \begin{cases} x_F = \dfrac{v_0^2.\sin 2\alpha}{2g} \\ y_F = \dfrac{v_0^2.\sin^2\alpha}{2g} + h_0 \end{cases}$$

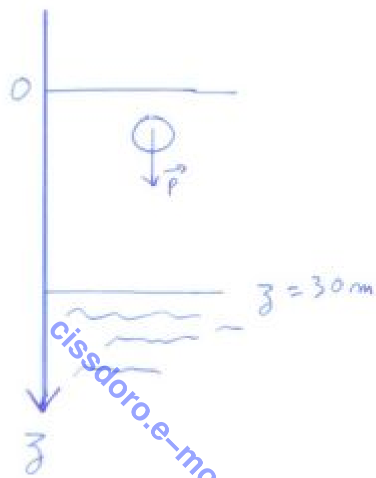
Remarque : on constate que l'abscisse de la flèche est la moitié de celle de la portée :

$$x_F = \frac{v_0^2 . \sin 2\alpha}{2g} = \frac{x_P}{2}$$

c) Mouvement à une dimension :

(Cas particulier plus simple que les mouvements à 2 dimensions, on ne projette que sur ***un*** axe)

Exemple 1 :



On lâche une balle d'un pont de 30 m sans vitesse initiale et sans frottements. On prend g = 10 m/s² et on prend comme origine des dates l'instant du lâcher, et comme origine de l'espace l'endroit du lâcher. On se référera à un axe vertical descendant.

Au bout de combien de temps la balle touche-t'elle l'eau ?

$$\vec{P} = m.\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$Soit : \ \vec{a} = \vec{g}$$

$$projection\ selon : [Oz) \quad a_z = g$$

Comme $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, on a, après intégration : $v_z(t) = gt + cte$

$$or\ v_z(t=0) = 0\ et\ v_z(t=0) = g \times 0 + cte = cte \Longrightarrow cte = 0$$
$$d'où : \ v_z(t) = gt$$

Comme $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$*, on a, après intégration :* $z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + cte$

$$or\ z(t=0) = 0\ et\ z(t=0) = \frac{1}{2}g \times 0^2 + cte \Longrightarrow cte = 0$$

$$d'où : z(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{2z}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 30}{10}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{t = 2,45\ s}$$

Remarque : 3[e] façon de trouver la formule de la chute libre sans vitesse initiale :

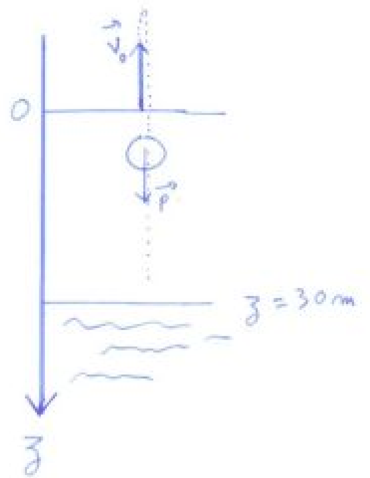
$$\begin{cases} on\ a :\ v_z(t) = gt \Longrightarrow t = \dfrac{v_z}{g} \\ et :\ z(t) = \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{v_z}{g}\right)^2 = \dfrac{1}{2}g\dfrac{(v_z)^2}{g^2} \Longrightarrow z = \dfrac{(v_z)^2}{2g} \Longrightarrow (v_z)^2 = 2gz \end{cases}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2gz}}$$

Exemple 2 :

On recommence la même expérience que l'exemple 1 mais on impulse maintenant à la balle une vitesse initiale verticale vers le haut $v_0 = 5\ m.s^{-1}$. On prend g = 10 m/s² et on prend comme origine des dates l'instant du lâcher, et comme origine de l'espace l'endroit du lâcher. On se référera à un axe vertical ascendant.

Au bout de combien de temps la balle touche-t'elle l'eau ?



$$\vec{P} = m.\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$Soit :\ \vec{a} = \vec{g}$$

$$projection\ selon :[Oz)\ \ a_z = g$$

Comme $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, on a, après intégration : $v_z(t) = gt + cte$

$$or\ v_z(t=0) = -v_0\ et\ v_z(t=0) = g \times 0 + cte = cte \Longrightarrow cte = -v_0$$
$$d'où :\ v_z(t) = gt - v_0$$

Comme $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, *on a, après intégration :* $z(t) = \frac{1}{2}gt^2 - (v_0)t + cte$

$$or\ z(t=0) = 0\ et\ z(t=0) = \frac{1}{2}g \times 0^2 - (v_0) \times 0 + cte \Longrightarrow cte = 0$$

$$d'où :\ z(t) = \frac{1}{2}gt^2 - (v_0)t$$

$$\begin{cases} z(t) = \frac{1}{2}gt^2 - (v_0)t \\ z = 30 \end{cases}$$

$$d'où :\ \frac{1}{2}gt^2 - (v_0)t = 30$$

$$soit\ à\ résoudre :\ \frac{1}{2}gt^2 - (v_0)t - 30 = 0$$

$$5t^2 - 5t - 30 = 0\ \ ou\ encore :\ t^2 - t - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 \Longrightarrow \begin{cases} t_1 = -2 < 0\ ne\ convient\ pas \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{t = 3\ s}$$

Enoncé des exercices du Chapitre 6 : Mouvement dans un champ de pesanteur

exercice 1 : **Trajectoire d'une balle de volley**

Le plafond horizontal d'un gymnase est situé à 10 m au-dessus de la surface de jeu où se déroule une partie de volley-ball. On assimile le ballon à un point matériel et on néglige l'action de l'air sur celui-ci. On prendra pour intensité de la pesanteur g = 9,8 m/s².
Le filet entre les deux camps est tendu de manière à ce que son bord supérieur B soit placé à la hauteur H = 2,43 m au-dessus du sol. La distance entre le filet et la ligne de fond de chaque camp est D = 9 m.
Les points C et E délimitent le terrain.

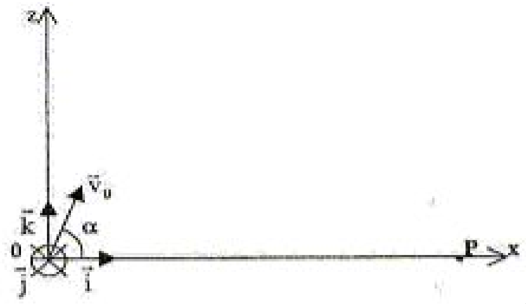
Quand le joueur au service frappe le ballon, celui-ci est immobile au point A à la hauteur h = 1,80 m au-dessus du sol et à la distance d = 1,00 m derrière la limite du terrain.
A l'instant initial, le ballon a un vecteur vitesse v_0 situé dans le plan contenant A et orthogonal au plan du filet, incliné d'un angle α = 30 ° par rapport à l'horizontale, et de valeur v_0 = 12,0 m/s.
Le point O est sur le sol à la verticale du point A.

1. a) Etablir les expressions littérales des équations paramétriques du mouvement du centre du ballon dans le repère (O ; x ; y ; z)
   b) En déduire l'expression littérale de l'équation de la trajectoire ; préciser sa forme
2. On souhaite savoir si le service d'un joueur sera bon :
   a) vérifier que le ballon ne peut pas heurter le plafond
   b) la ballon ne doit pas toucher le filet ; en déduire une condition sur y(x) et vérifier que cette condition est bien remplie.
   c) le ballon doit retomber à l'intérieur du camp adverse ; chercher le point de chute de la balle et vérifier si la condition est bien remplie
3. Déterminer la distance entre le point de chute I du ballon et le filet
4. Calculer le temps dont dispose un adversaire pour recevoir le ballon avant qu'il ne touche le sol, à partir de la frappe du ballon
5. Calculer à quelle vitesse le ballon retombe sur le sol et l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale

9. Question subsidiaire : vérifier que, quelque soit l'angle avec lequel le service est effectué, le ballon ne peut pas heurter le plafond

<u>exercice 2 :</u> Trajectoire d'une balle de golf .

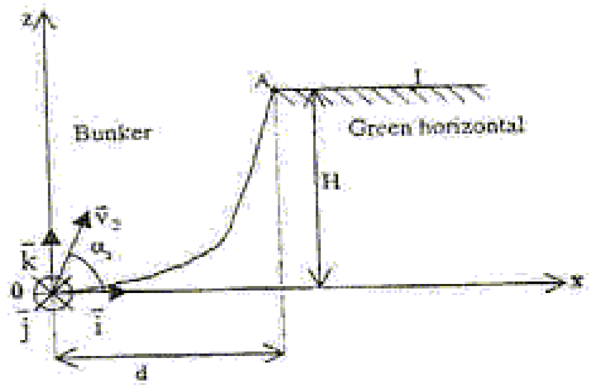
<u>Partie A :</u>



Un joueur utilise un club de golf et communique à la balle un vecteur vitesse v_0 dans le plan vertical. A la date t = 0 la balle, supposée ponctuelle et de masse m, part du point O avec le vecteur vitesse v_0. On néglige les frottements de l'air sur la balle ; on donne g = 10 m/s² . Le référentiel lié à la Terre est supposé galiléen.

- **a)** Dans un premier temps le joueur tente de lancer la balle le plus loin possible avec une vitesse v_0 = 40 m/s ; déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de la balle et préciser sa nature. *(attention : le repère a 3 dimensions)*
- **b)** On appelle portée L la distance entre le point de lancement O et le point d'impact P de la balle sur le sol ; exprimer la portée L de la trajectoire.
- **c)** Pour quelle valeur de l'angle de lancer α_0 la portée est-elle maximale ? Calculer alors la portée maximale L_{max}
- **d)** On appelle S, le sommet de la trajectoire ; exprimer les coordonnées du sommet S de la trajectoire en fonction de g, v_0 et α
- **e)** Pour quelle valeur de l'angle de lancer α, la flèche (altitude maximale atteinte) est-elle maximale ?
- **f)** Calculer la flèche h_0 pour α_0

<u>Partie B :</u>



Le joueur a malencontreusement fait tomber la balle de golf dans un bunker (creux de sable). Pour s'en dégager le joueur souhaite placer la balle en I sur le green horizontal près du trou. Il envoie à la date t = 0, la balle du point O avec une vitesse v_2 = 10 m/s et avec un angle α_2 = 70°. On donne : H = d = 1 m

- **a)** Vérifier que la balle peut sortir du bunker
- **b)** Exprimer littéralement la vitesse v_1 de la balle en I ; calculer cette vitesse